Syntax výrokové logiky

Definice (Jazyk výrokové logiky)**.** Mějme množinu *atomických formulí* At. Množina všech formulí výrokové logiky nad množinou At je definována induktivně:

- Každá atomická formule $a \in \mathsf{At}$ je formule.
- $\top$ a $\bot$ jsou formule.
- Je-li φ formule, pak je i $(\neg\varphi)$ formule.
- Jsou-li φ_1 a φ_2 formule, pak je i $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ formule.
- Jsou-li φ_1 a φ_2 formule, pak je i $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ formule.
- Jsou-li φ_1 a φ_2 formule, pak je i $(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)$ formule.
- Jsou-li φ_1 a φ_2 formule, pak je i $(\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2)$ formule.

Řetězec znaků je formule pouze tehdy, když o něm tuto skutečnost můžeme odvodit pomocí výše zmíněných pravidel v konečně mnoha krocích.

Množinu všech formulí výrokové logiky nad množinou At značíme $\mathsf{Fm}(\mathsf{At})$.

Poznámka. K jednoduššímu popisu formálních jazyků se často používá Backusova-Naurova forma (BNF). Pro náš jazyk výrokové logiky by příslušná forma vypadala následovně:

$$F ::= a \mid \top \mid \bot \mid (\neg F) \mid (F \wedge F) \mid (F \vee F) \mid (F \Rightarrow F) \mid (F \Leftrightarrow F)$$

kde a označuje atomickou formuli a F formuli výrokové logiky. BNF slouží ke krátkému popisu toho, jakým způsobem lze formule konstruovat. Jednotlivé způsoby konstrukce jsou odděleny svislou čarou $\mid$. Formuli lze tedy zkonstruovat tak, že vybereme atomickou formuli, symbol $\top$ či $\bot$, nebo vezmeme již zhotovené formule, propojíme je některou z dostupných logických spojek a obalíme závorkami. Spojka $\neg$ (negace) je unární, zbylé spojky $\wedge$ (konjunkce), $\vee$ (disjunkce), $\Rightarrow$ (implikace) a $\Leftrightarrow$ (ekvivalence) jsou binární.

Příklad. Nechť $\mathsf{At} = \{a, b, c, d\}$. Příkladem formulí z množiny $\mathsf{Fm}(\mathsf{At})$ jsou například formule

$$(a \wedge (b \vee c)), \qquad (\neg b), \qquad c, \qquad ((\neg a) \Rightarrow (\neg b)).$$

Poznámka. Formule z $\mathsf{Fm}(\mathsf{At})$ splňují takzvanou *unique readability property* (URP), česky *jednoznačnou čitelnost*. Neformálně řečeno, u každé formule $\varphi \in \mathsf{Fm}(\mathsf{At})$ lze jednoznačně určit

1. pravidlo BNF, kterým byla φ vytvořena,
2. stavební části („přímé podformule"), které byly při konstrukci φ podle pravidla BNF použity.

Například u formule $\varphi = (a \wedge (b \vee c))$ je vidět, že

1. její *hlavní spojkou* je konjunkce $\wedge$ (vznikla spojením dvou formulí φ_1 a φ_2 logickou spojkou $\wedge$),
2. formule φ_1 a φ_2 jsou jednoznačně dané; jsou to formule a a $(b \vee c)$.

Pozorování. Formule jsou jednoznačně čitelné díky svému uzávorkování. Doplňte závorky v nějaké formuli na ovály, a tyto ovály ve vaší formuli vytvoří systém „vrstevnic", které umožňují „detekovat" hlavní spojky a přímé podformule.

Značení. Dovolíme si při zápisu formulí dvěma způsoby *relaxovat* značení:

1. U formulí nebudeme psát vnější závorky. Například formuli

   $$((\neg(p \Rightarrow (\neg q))) \vee (\neg(\neg r)))$$

   můžeme zapisovat jako

   $$(\neg(p \Rightarrow (\neg q))) \vee (\neg(\neg r)).$$

2. U formulí, ve kterých se vyskytuje negace, nebudeme kolem negace používat závorky. Výše zmíněnou formuli

   $$((\neg(p \Rightarrow (\neg q))) \vee (\neg(\neg r)))$$

   tedy můžeme zapisovat jako

   $$\neg(p \Rightarrow \neg q) \vee \neg\neg r$$

Striktně vzato řetězec

$$\neg(p \Rightarrow \neg q) \vee \neg\neg r$$

podle naší definice formule formulí *není*. Jelikož je však tento zápis čitelnější a lze z něj jednoznačně určit, jakou formuli by popisoval, kdybychom značení nerelaxovali, nebude naše dohoda o zápisu dělat žádné problémy.

Pozor! V řetězci

$$\neg(p \Rightarrow \neg q)$$

jsou závorky důležité. Řetězec

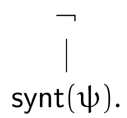
$$\neg p \Rightarrow \neg q$$

je v relaxovaném značení *jinou formulí*, a to formulí

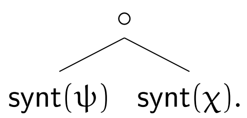
$$((\neg p) \Rightarrow (\neg q)).$$

Definice (Syntaktický strom formule)**.** Syntaktický strom formule φ je kořenový strom $\mathsf{synt}(\varphi)$ s označenými vrcholy zadaný rekurivním výpočtem následovně:

1. Pokud je φ atomickou formulí či pokud $\varphi = \top$ nebo $\varphi = \bot$, pak $\mathsf{synt}(\varphi)$ je jediný vrchol s označením φ.
2. Pokud $\varphi = \neg\psi$ pro nějakou formuli ψ, pak $\mathsf{synt}(\varphi)$ je strom



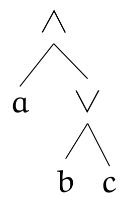
3. Pokud $\varphi = \psi \circ \chi$ (kde $\circ$ je jakákoli binární logická spojka), pak $\mathsf{synt}(\varphi)$ je strom



Příklad. Sestrojíme syntaktické stromy formulí

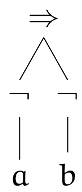
$$\alpha = (a \wedge (b \vee c)), \qquad \beta = \neg b, \qquad \gamma = \neg a \Rightarrow \neg b.$$

Syntaktický strom formule α vypadá následovně:



Syntaktický strom formule β vypadá následovně:

Syntaktický strom formule γ vypadá následovně:



Definice (Hloubka formule)**.** Hloubka formule φ je přirozené číslo $\mathsf{hl}(\varphi)$ zadané rekursivním výpočtem následovně:

1. Pokud je φ atomickou formulí či pokud $\varphi = \top$ nebo $\varphi = \bot$, pak $\mathsf{hl}(\varphi) = 0$.

2. Pokud $\varphi = \neg\psi$ pro nějakou formuli ψ, pak $\mathsf{hl}(\varphi) = 1 + \mathsf{hl}(\psi)$.

3. Pokud $\varphi = \psi \circ \chi$ (kde $\circ$ je jakákoli binární logická spojka), pak $\mathsf{hl}(\varphi) = 1 + \max(\mathsf{hl}(\psi), \mathsf{hl}(\chi))$.

Příklad. U formule $a \wedge (b \vee c)$ spočtěme její hloubku:

$$\begin{aligned}
\mathsf{hl}(a \wedge (b \vee c)) &= 1 + \max(\mathsf{hl}(a), \mathsf{hl}(b \vee c)) \\
&= 1 + \max(0, 1 + \max(\mathsf{hl}(b), \mathsf{hl}(c))) \\
&= 1 + \max(0, 1 + \max(0, 0)) \\
&= 1 + \max(0, 1) \\
&= 1 + 1 = 2.
\end{aligned}$$

Definice (Podformule)**.** Množina podformulí formule $\varphi \in \mathsf{Fm}(\mathsf{At})$ je podmnožina $\mathsf{pf}(\varphi) \subseteq \mathsf{Fm}(\mathsf{At})$ zadaná rekursivním výpočtem následovně:

1. Pokud je φ atomickou formulí či pokud $\varphi = \top$ nebo $\varphi = \bot$, pak $\mathsf{pf}(\varphi) = \{\varphi\}$.

2. Pokud $\varphi = \neg\psi$ pro nějakou formuli ψ, pak $\mathsf{pf}(\varphi) = \{\varphi\} \cup \mathsf{pf}(\psi)$.

3. Pokud $\varphi = \psi \circ \chi$ (kde $\circ$ je jakákoli binární logická spojka), pak $\mathsf{pf}(\varphi) = \{\varphi\} \cup \mathsf{pf}(\psi) \cup \mathsf{pf}(\chi)$.

Příklad. U formule $a \wedge (b \vee c)$ spočtěme množinu jejích podformulí:

$$\begin{aligned}
\mathsf{pf}(a \wedge (b \vee c)) &= \{a \wedge (b \vee c)\} \cup \mathsf{pf}(a) \cup \mathsf{pf}(b \vee c) \\
&= \{a \wedge (b \vee c)\} \cup \{a\} \cup \{b \vee c\} \cup \mathsf{pf}(b) \cup \mathsf{pf}(c) \\
&= \{a \wedge (b \vee c),\ a,\ b \vee c\} \cup \{b\} \cup \{c\} \\
&= \{a \wedge (b \vee c),\ a,\ b \vee c,\ b,\ c\}.
\end{aligned}$$