Přirozená dedukce ve výrokové logice

Konjunkce a implikace

Spojka	Zavedení spojky	Eliminace spojky
$\wedge$	$\dfrac{\varphi \qquad \psi}{\varphi \wedge \psi}\ \mathrm{i}\wedge$	$\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\ \mathrm{e}\wedge_1 \qquad \dfrac{\varphi \wedge \psi}{\psi}\ \mathrm{e}\wedge_2$
$\Rightarrow$	$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\\ \psi\end{array}}}{\varphi \Rightarrow \psi}\ \mathrm{i}\Rightarrow$	$\dfrac{\varphi \qquad \varphi \Rightarrow \psi}{\psi}\ \mathrm{e}\Rightarrow$

Příklady ilustrující odvozovací pravidla

Příklad. Dokažme logický úsudek

$$a \wedge b,\ b \Rightarrow c \vdash c.$$

Důkaz.

1.	$a \wedge b$	P
2.	$b \Rightarrow c$	P
3.	b	$\mathrm{e}\wedge_2$, 1
4.	c	$\mathrm{e}\Rightarrow$, 3, 2

□

Příklad. Dokažme logický úsudek

$$a \Rightarrow b,\ b \Rightarrow c,\ a \vdash b \wedge c.$$

Důkaz.

1.	$a \Rightarrow b$	P
2.	$b \Rightarrow c$	P
3.	a	P
4.	b	$\mathrm{e}\Rightarrow$, 3, 1
5.	c	$\mathrm{e}\Rightarrow$, 4, 2
6.	$b \wedge c$	$\mathrm{i}\wedge$, 4, 5

$\square$

Příklad. Dokažme logický úsudek

$$a \Rightarrow b,\ b \Rightarrow c, \vdash a \Rightarrow c.$$

Důkaz.

$$\begin{array}{lll}
1. & a \Rightarrow b & \mathrm{P} \\
2. & b \Rightarrow c & \mathrm{P} \\
3. & \boxed{a} & \mathrm{P} \\
4. & b & \mathrm{e}\Rightarrow, 3, 1 \\
5. & c & \mathrm{e}\Rightarrow, 4, 2 \\
6. & a \Rightarrow c & \mathrm{i}\Rightarrow, 3\text{-}5
\end{array}$$

$\square$

Příklad. Dokažme logický úsudek

$$a \Rightarrow b,\ c \Rightarrow d, \vdash (a \wedge c) \Rightarrow (b \wedge d).$$

Důkaz.

$$\begin{array}{lll}
1. & a \Rightarrow b & \mathrm{P} \\
2. & b \Rightarrow c & \mathrm{P} \\
3. & a \wedge c & \mathrm{P} \\
4. & a & \mathrm{e}\wedge_1, 3 \\
5. & c & \mathrm{e}\wedge_2, 3 \\
6. & b & \mathrm{e}\Rightarrow, 4, 1 \\
7. & d & \mathrm{e}\Rightarrow, 5, 2 \\
8. & b \wedge d & \mathrm{i}\wedge, 6, 7 \\
9. & (a \wedge c) \Rightarrow (b \wedge d) & \mathrm{i}\Rightarrow, 3\text{-}8
\end{array}$$

$\square$

Příklad. Dokažme logický úsudek

$$a \vdash a.$$

Důkaz.

$$\begin{array}{lll}
1. & a & \mathrm{P}
\end{array}$$

$\square$

Příklad. Dokažme logický úsudek

$$\vdash a \Rightarrow a.$$

Důkaz.

1.	a	P
2.	$a \Rightarrow a$	i$\Rightarrow$, 1-1

$\square$

Rámečky je občas nutné vnořovat.

Příklad. Dokažme logický úsudek

$$(a \wedge b) \Rightarrow c \vdash a \Rightarrow (b \Rightarrow c).$$

Důkaz.

1.	$(a \wedge b) \Rightarrow c$	P
2.	a	P
3.	b	P
4.	$a \wedge b$	i$\wedge$, 2, 3
5.	c	e$\Rightarrow$, 4, 1
6.	$b \Rightarrow c$	i$\Rightarrow$, 3-5
7.	$a \Rightarrow (b \Rightarrow c)$	i$\Rightarrow$, 2-6

$\square$

Pomocné pravidlo iterace umožňuje na řádku zopakovat tvrzení, které již bylo odvozeno dříve a které je z daného řádku viditelné (tj. neleží mimo *scope*, tedy *obor platnosti* daného řádku).

Příklad. Dokažme logický úsudek

$$\vdash a \Rightarrow (b \Rightarrow a).$$

Důkaz.

1.	a	P
2.	b	P
3.	a	it, 1
4.	$b \Rightarrow a$	i$\Rightarrow$, 2-3
5.	$a \Rightarrow (b \Rightarrow a)$	i$\Rightarrow$, 1-4

$\square$

Disjunkce

Spojka	Zavedení spojky	Eliminace spojky
$\vee$	$\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\,\mathrm{i}\vee_1 \qquad \dfrac{\psi}{\varphi \vee \psi}\,\mathrm{i}\vee_2$	$\dfrac{\varphi \vee \psi \quad \boxed{\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\\ \chi\end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c}\psi\\ \vdots\\ \chi\end{array}}}{\chi}\,\mathrm{e}\vee$

Příklady ilustrující pravidla pro disjunkci

Příklad. Dokažme logický úsudek

$$a \vee b,\ a \Rightarrow (c \wedge d),\ b \Rightarrow d \vdash d$$

Důkaz.

1.	$a \vee b$	P
2.	$a \Rightarrow (c \wedge d)$	P
3.	$b \Rightarrow d$	P
4.	a	P
5.	$c \wedge d$	e$\Rightarrow$, 4, 2
6.	d	e$\wedge_2$, 5
7.	b	P
8.	d	e$\Rightarrow$, 7, 3
9.	d	e$\vee$, 1, 4-6, 7-8

□

Příklad. Dokažme logický úsudek

$$a \vee b \vdash b \vee a.$$

Důkaz.

1.	$a \vee b$	P
2.	a	P
3.	$b \vee a$	i$\vee_2$, 2
4.	b	P
5.	$b \vee a$	i$\vee_1$, 4
6.	$b \vee a$	e$\vee$, 1, 2-3, 4-5

$\square$

Negace a absurdita (spor, „false“)

Spojka	Zavedení spojky	Eliminace spojky
$\neg$	$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\\ \perp\end{array}}}{\neg\varphi}\ \mathrm{i}\neg$	$\dfrac{\varphi \qquad \neg\varphi}{\perp}\ \mathrm{e}\neg$
$\perp$	není	$\dfrac{\perp}{\varphi}\ \mathrm{e}\perp$

Příklady ilustrující pravidla pro negaci a absurditu

Příklad. Dokažme logický úsudek

$$a \Rightarrow b,\ a \Rightarrow \neg b \vdash \neg a.$$

Důkaz.

1.	$a \Rightarrow b$	P
2.	$a \Rightarrow \neg b$	P
3.	a	P
4.	b	e$\Rightarrow$, 3, 1
5.	$\neg b$	e$\Rightarrow$, 3, 2
6.	$\perp$	e$\neg$, 4, 5
7.	$\neg a$	i$\neg$, 3-6

$\square$

Příklad. Dokažme logický úsudek

$$a \Rightarrow b \vdash \neg b \Rightarrow \neg a.$$

Důkaz.

1.	$a \Rightarrow b$	P
2.	$\neg b$	P
3.	a	P
4.	b	$e\Rightarrow$, 3, 1
5.	$\bot$	$e\neg$, 4, 2
6.	$\neg a$	$i\neg$, 3-5
7.	$\neg b \Rightarrow \neg a$	$i\Rightarrow$, 2-6

□

Příklad. Dokažme logický úsudek

$$a \vee b,\ \neg b \vdash a.$$

Důkaz.

1.	$a \vee b$	P
2.	$\neg b$	P
3.	a	P
4.	b	P
5.	$\bot$	$e\neg$, 4, 2
6.	a	$e\bot$, 5
7.	a	$e\vee$, 1, 3-3, 4-6

□

Ekvivalence a verum („true“)

Spojka	Zavedení spojky	Eliminace spojky
$\Leftrightarrow$	$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\\ \psi\end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c}\psi\\ \vdots\\ \varphi\end{array}}}{\varphi \Leftrightarrow \psi}\ i\Leftrightarrow$	$\dfrac{\varphi \quad \varphi \Leftrightarrow \psi}{\psi}\ e\Leftrightarrow_1 \qquad \dfrac{\varphi \Leftrightarrow \psi \quad \psi}{\varphi}\ e\Leftrightarrow_2$
$\top$	$\dfrac{}{\top}\ i\top$	není

Nepřímý důkaz

Do této chvíle jsme zavedli pravidla přirozené dedukce pro takzvanou *intuicionistickou výrokovou logiku*. Naše poslední pravidlo, *eliminace dvojité negace*, upraví chování spojky negace:

$$\frac{\neg\neg\varphi}{\varphi}\ \mathrm{e}\neg\neg$$

Příklad. Dokažme logický úsudek

$$\neg(a \wedge b) \vdash \neg a \vee \neg b.$$

Důkaz.

1.	$\neg(a \wedge b)$	P
2.	$\neg(\neg a \vee \neg b)$	P
3.	$\neg a$	P
4.	$\neg a \vee \neg b$	$\mathrm{i}\vee_1$, 3
5.	$\perp$	$\mathrm{e}\neg$, 4, 2
6.	$\neg\neg a$	$\mathrm{i}\neg$, 3-5
7.	a	$\mathrm{e}\neg\neg$, 6
8.	$\neg b$	P
9.	$\neg a \vee \neg b$	$\mathrm{i}\vee_2$, 8
10.	$\perp$	$\mathrm{e}\neg$, 10, 2
11.	$\neg\neg b$	$\mathrm{i}\neg$, 8-10
12.	b	$\mathrm{e}\neg\neg$, 11
13.	$a \wedge b$	$\mathrm{i}\wedge$, 7, 12
14.	$\perp$	$\mathrm{e}\neg$, 13, 2
15.	$\neg\neg(\neg a \vee \neg b)$	$\mathrm{i}\neg$, 2-14
16.	$\neg a \vee \neg b$	$\mathrm{e}\neg\neg$, 15

□

Užitím pravidla e¬¬lze dokázat korektnost odvozeného pravidla: *pravidla vyloučeného třetího* (anglicky *law of excluded middle*, LEM):

$$\frac{}{\varphi \vee \neg\varphi}\ \mathrm{LEM}$$

Příklad. Dokažme logický úsudek

$$\vdash \varphi \vee \neg\varphi.$$

Důkaz.

1.	$\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$	P
2.	φ	P
3.	$\varphi \vee \neg\varphi$	$\mathrm{i}\vee_1$, 2
4.	$\perp$	$\mathrm{e}\neg$, 3, 1
5.	$\neg\varphi$	$\mathrm{i}\neg$, 2-4
6.	$\varphi \vee \neg\varphi$	$\mathrm{i}\vee_2$, 5
7.	$\perp$	$\mathrm{e}\neg$, 6, 1
8.	$\neg\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$	$\mathrm{i}\neg$, 1-7
9.	$\varphi \vee \neg\varphi$	$\mathrm{e}\neg\neg$, 8

□

Poznámka. Pravidlem $\mathrm{e}\neg\neg$ lze též odvodit pravidlo „důkazu sporem“, takzvané *reductio ad absurdum* (RAA):

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\neg\varphi\\ \vdots\\ \perp\end{array}}}{\varphi}\ \mathrm{RAA}$$

Pozor! Toto pravidlo *není totožné s pravidlem zavedení negace*, i když vypadá podobně. V klasické matematice se však důkazové postupy odpovídající zavedení negace (důkaz negace) a důkazu sporem (reductio ad absurdum) obvykle nerozlišují, neboť klasická logika rozdíly mezi nimi stírá.

Poznámka. Nabízí se otázka, proč nezavést následující pravidlo zavedení dvojité negace (označené třeba $\mathrm{i}\neg\neg$)

$$\frac{\varphi}{\neg\neg\varphi}\ \mathrm{i}\neg\neg$$

když jsme zavedli pravidlo eliminace dvojité negace $\mathrm{e}\neg\neg$. Toto pravidlo, ač korektní, lze odvodit z již zavedených pravidel:

1.	φ	P
2.	$\neg\varphi$	P
3.	$\perp$	$\mathrm{e}\neg$, 1, 2
4.	$\neg\neg\varphi$	$\mathrm{i}\neg$, 2-3

Na následující straně naleznete soupis všech pravidel přirozené dedukce zavedených na přednášce.

Spojka	Zavedení spojky	Eliminace spojky
$\wedge$	$\dfrac{\varphi \qquad \psi}{\varphi \wedge \psi}\ \mathrm{i}\wedge$	$\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\ \mathrm{e}\wedge_1 \qquad \dfrac{\varphi \wedge \psi}{\psi}\ \mathrm{e}\wedge_2$
$\vee$	$\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\ \mathrm{i}\vee_1 \qquad \dfrac{\psi}{\varphi \vee \psi}\ \mathrm{i}\vee_2$	$\dfrac{\varphi \vee \psi \qquad \boxed{\begin{matrix}\varphi\\ \vdots\\ \chi\end{matrix}} \qquad \boxed{\begin{matrix}\psi\\ \vdots\\ \chi\end{matrix}}}{\chi}\ \mathrm{e}\vee$
$\Rightarrow$	$\dfrac{\boxed{\begin{matrix}\varphi\\ \vdots\\ \psi\end{matrix}}}{\varphi \Rightarrow \psi}\ \mathrm{i}\Rightarrow$	$\dfrac{\varphi \qquad \varphi \Rightarrow \psi}{\psi}\ \mathrm{e}\Rightarrow$
$\Leftrightarrow$	$\dfrac{\boxed{\begin{matrix}\varphi\\ \vdots\\ \psi\end{matrix}} \qquad \boxed{\begin{matrix}\psi\\ \vdots\\ \varphi\end{matrix}}}{\varphi \Leftrightarrow \psi}\ \mathrm{i}\Leftrightarrow$	$\dfrac{\varphi \qquad \varphi \Leftrightarrow \psi}{\psi}\ \mathrm{e}\Leftrightarrow_1 \qquad \dfrac{\varphi \Leftrightarrow \psi \qquad \psi}{\varphi}\ \mathrm{e}\Leftrightarrow_2$
$\neg$	$\dfrac{\boxed{\begin{matrix}\varphi\\ \vdots\\ \bot\end{matrix}}}{\neg\varphi}\ \mathrm{i}\neg$	$\dfrac{\varphi \qquad \neg\varphi}{\bot}\ \mathrm{e}\neg$
$\top$	$\dfrac{}{\top}\ \mathrm{i}\top$	není
$\bot$	není	$\dfrac{\bot}{\varphi}\ \mathrm{e}\bot$
$\neg\neg$	(netřeba) $\dfrac{\varphi}{\neg\neg\varphi}\ \mathrm{i}\neg\neg$	$\dfrac{\neg\neg\varphi}{\varphi}\ \mathrm{e}\neg\neg$

Pomocné pravidlo: pravidlo iterace (it).
Odvozené pravidlo LEM (zákon vyloučeného třetího, tertium non datur):

$$\frac{}{\varphi \vee \neg\varphi}\ \mathrm{LEM}$$

0.1 Ekvivalence a negace jako „syntactic sugar“

Spojka ekvivalence ($\Leftrightarrow$) je v našem jazyce v jistém smyslu „nepotřebná“: můžeme ji chápat jako konjunkci dvou implikací (tedy tak, jak ji v matematice obvykle používáme). K formalisaci našeho pozorování zavedeme pojem logické ekvivalence:

Definice. Řekneme, že formule φ a ψ jsou *logicky ekvivalentní*, pokud platí $\varphi \vdash \psi$ a současně $\psi \vdash \varphi$.

Příklad. Nechť φ a ψ jsou dvě formule výrokové logiky. Dokažme, že formule $\varphi \Leftrightarrow \psi$ a $(\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi)$ jsou logicky ekvivalentní.

Důkaz. Sestrojme nejprve důkaz

$$\varphi \Leftrightarrow \psi \vdash (\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi).$$

1.	$\varphi \Leftrightarrow \psi$	P
2.	φ	P
3.	ψ	e$\Leftrightarrow_1$, 2, 1
4.	$\varphi \Rightarrow \psi$	i$\Rightarrow$, 2-3
5.	ψ	P
6.	φ	e$\Leftrightarrow_2$, 1, 5
7.	$\psi \Rightarrow \varphi$	i$\Rightarrow$, 5-6
8.	$(\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi)$	i$\wedge$, 4, 7

Nyní sestrojme důkaz

$$(\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi) \vdash \varphi \Leftrightarrow \psi.$$

1.	$(\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi)$	P
2.	$\varphi \Rightarrow \psi$	e$\wedge_1$, 1
3.	$\psi \Rightarrow \varphi$	e$\wedge_2$, 1
4.	φ	P
5.	ψ	e$\Rightarrow$, 4, 1
6.	ψ	P
7.	φ	e$\Rightarrow$, 6, 3
8.	$\varphi \Leftrightarrow \psi$	i$\Leftrightarrow$, 4-5, 6-7

□

Podobně je také možné „vypustit“ logickou spojku negace:

Příklad. Nechť je φ formule výrokové logiky. Dokažme, že formule $\neg\varphi$ a $\varphi \Rightarrow \bot$ jsou logicky ekvivalentní.

Důkaz. Sestrojme nejprve důkaz

$$\neg\varphi \vdash \varphi \Rightarrow \bot.$$

$$\begin{array}{lll}
1. & \neg\varphi & \mathrm{P} \\ \cline{2-3}
2. & \multicolumn{1}{|l}{\varphi} & \multicolumn{1}{l|}{\mathrm{P}} \\
3. & \multicolumn{1}{|l}{\bot} & \multicolumn{1}{l|}{\mathrm{e}\neg,\ 2,\ 1} \\ \cline{2-3}
4. & \varphi \Rightarrow \bot & \mathrm{i}\Rightarrow,\ 2\text{-}3
\end{array}$$

Nyní sestrojme důkaz

$$\varphi \Rightarrow \bot \vdash \neg\varphi.$$

$$\begin{array}{lll}
1. & \varphi \Rightarrow \bot & \mathrm{P} \\ \cline{2-3}
2. & \multicolumn{1}{|l}{\varphi} & \multicolumn{1}{l|}{\mathrm{P}} \\
3. & \multicolumn{1}{|l}{\bot} & \multicolumn{1}{l|}{\mathrm{e}\Rightarrow,\ 2,\ 1} \\ \cline{2-3}
4. & \neg\varphi & \mathrm{i}\neg,\ 2\text{-}3
\end{array}$$

$\square$

Proč byly předchozí dva důkazy triviální? Pravidla pro zavedení a eliminaci negace přesně odpovídají pravidlům pro práci s implikací ve speciálním případě, kdy za formuli ψ dosadíme formuli $\bot$.