Predikátová logika - syntax

20. března 2023

Syntax predikátové logiky

Jazyk predikátové logiky $\mathcal{L}$.

Symboly jazyka predikátové logiky se dělí na z

Syntax predikátové logiky

Jazyk predikátové logiky $\mathcal{L}$.

Symboly jazyka predikátové logiky se dělí na z

1. logické symboly, tj.:
   a) spočetnou množinu proměnných: $\mathrm{Var} = \{x, y, z, \ldots, x_1, x_2, \ldots\}$

Syntax predikátové logiky

Jazyk predikátové logiky $\mathcal{L}$.

Symboly jazyka predikátové logiky se dělí na z

1. logické symboly, tj.:
   a) spočetnou množinu proměnných: $\mathrm{Var} = \{x, y, z, \ldots, x_1, x_2, \ldots\}$
   b) výrokové logické spojky: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \top, \bot$

Syntax predikátové logiky

Jazyk predikátové logiky $\mathcal{L}$.

Symboly jazyka predikátové logiky se dělí na z

1. logické symboly, tj.:
   a) spočetnou množinu proměnných: $\mathrm{Var} = \{x, y, z, \ldots, x_1, x_2, \ldots\}$
   b) výrokové logické spojky: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \top, \bot$
   c) obecný kvantifikátor $\forall$ a existenční kvantifikátor $\exists$
   d) symbol rovnosti: $=$

Syntax predikátové logiky

Jazyk predikátové logiky $\mathcal{L}$.

Symboly jazyka predikátové logiky se dělí na z

1. logické symboly, tj.:
   a) spočetnou množinu proměnných: $\mathrm{Var} = \{x, y, z, \ldots, x_1, x_2, \ldots\}$
   b) výrokové logické spojky: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \top, \bot$
   c) obecný kvantifikátor $\forall$ a existenční kvantifikátor $\exists$
   d) symbol rovnosti: $=$
2. speciální symboly, tj. po dvou disjunktní množiny Pred, Kons a Func, kde

Syntax predikátové logiky

Jazyk predikátové logiky $\mathcal{L}$.

Symboly jazyka predikátové logiky se dělí na z

1. logické symboly, tj.:
   a) spočetnou množinu proměnných: $\mathrm{Var} = \{x, y, z, \dots, x_1, x_2, \dots\}$
   b) výrokové logické spojky: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \top, \bot$
   c) obecný kvantifikátor $\forall$ a existenční kvantifikátor $\exists$
   d) symbol rovnosti: $=$
2. speciální symboly, tj. po dvou disjunktní množiny Pred, Kons a Func, kde
   a) Pred je množina predikátových symbolů,

Syntax predikátové logiky

Jazyk predikátové logiky $\mathcal{L}$.

Symboly jazyka predikátové logiky se dělí na z

1. logické symboly, tj.:
   a) spočetnou množinu proměnných: $\mathrm{Var} = \{x, y, z, \ldots, x_1, x_2, \ldots\}$
   b) výrokové logické spojky: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \top, \bot$
   c) obecný kvantifikátor $\forall$ a existenční kvantifikátor $\exists$
   d) symbol rovnosti: $=$
2. speciální symboly, tj. po dvou disjunktní množiny Pred, Kons a Func, kde
   a) Pred je množina predikátových symbolů,
   b) Kons je množina konstantních symbolů,

Syntax predikátové logiky

Jazyk predikátové logiky $\mathcal{L}$.

Symboly jazyka predikátové logiky se dělí na z

1. logické symboly, tj.:
   a) spočetnou množinu proměnných: $\mathrm{Var} = \{x, y, z, \ldots, x_1, x_2, \ldots\}$
   b) výrokové logické spojky: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \top, \bot$
   c) obecný kvantifikátor $\forall$ a existenční kvantifikátor $\exists$
   d) symbol rovnosti: $=$
2. speciální symboly, tj. po dvou disjunktní množiny Pred, Kons a Func, kde
   a) Pred je množina predikátových symbolů,
   b) Kons je množina konstantních symbolů,
   c) Func je množina funkčních symbolů,

Syntax predikátové logiky

Jazyk predikátové logiky $\mathcal{L}$.

Symboly jazyka predikátové logiky se dělí na z

1. logické symboly, tj.:
   a) spočetnou množinu proměnných: $\mathrm{Var} = \{x, y, z, \dots, x_1, x_2, \dots\}$
   b) výrokové logické spojky: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \top, \bot$
   c) obecný kvantifikátor $\forall$ a existenční kvantifikátor $\exists$
   d) symbol rovnosti: $=$
2. speciální symboly, tj. po dvou disjunktní množiny Pred, Kons a Func, kde
   a) Pred je množina predikátových symbolů,
   b) Kons je množina konstantních symbolů,
   c) Func je množina funkčních symbolů,
3. pomocné symboly, jako jsou závorky (,) a čárka ,

Syntax predikátové logiky

Arita – četnost.

Pro každý predikátový symbol P a každý funkční symbol f je dána jeho arita (četnost) $ar(P)$, $ar(f)$ tak, že

- $ar(P)$ může být libovolné přirozené číslo,

Syntax predikátové logiky

Arita – četnost.

Pro každý predikátový symbol P a každý funkční symbol f je dána jeho arita (četnost) $ar(P)$, $ar(f)$ tak, že

- $ar(P)$ může být libovolné přirozené číslo,
- $ar(f)$ může být libovolné nenulové přirozené číslo.

Syntax predikátové logiky

Termy.

Množina termů je definována těmito pravidly:

Syntax predikátové logiky

Termy.

Množina termů je definována těmito pravidly:

1. Každá proměnná a každý konstantní symbol je term.
2. Jestliže f je funkční symbol arity n a $t_1, t_2, \ldots, t_n$ jsou termy, pak $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ je také term.
3. Nic, co nevzniklo konečným použitím pravidel 1 a 2, není term.

Syntax predikátové logiky

Termy.

Množina termů je definována těmito pravidly:

1. Každá proměnná a každý konstantní symbol je term.
2. Jestliže f je funkční symbol arity n a $t_1, t_2, \ldots, t_n$ jsou termy, pak $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ je také term.
3. Nic, co nevzniklo konečným použitím pravidel 1 a 2, není term.

Atomická formule.

Atomická formule je řetězec $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, kde $P \in \mathrm{Pred}$ má aritu n a $t_1, t_2, \ldots, t_n$ je n-tice termů, nebo řetězec $t_1 = t_2$, kde t_1, t_2 jsou termy.

Syntax predikátové logiky

Formule.

Množina formulí je definována těmito pravidly:

1. Každá atomická formule je formule. $\top$ a $\bot$ jsou formule.
2. Jsou-li φ a ψ dvě formule, pak $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \Rightarrow \psi)$, $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$ jsou opět formule.
3. Je-li φ formule a x proměnná, pak $(\forall x\ \varphi)$ a $(\exists x\ \varphi)$ jsou opět formule.
4. Nic, co nevzniklo pomocí konečně mnoha použití pravidel 1 až 3, není formule.

Syntax predikátové logiky

Konvence.

1. Úplně vnější závorky formule nepíšeme.
2. Negace váže silněji než ostatní logické spojky.
3. Kvantifikace váže silněji než ostatní spojky.

Syntax predikátové logiky

Konvence.

1. Úplně vnější závorky formule nepíšeme.
2. Negace váže silněji než ostatní logické spojky.
3. Kvantifikace váže silněji než ostatní spojky.

Syntaktický strom formule.

Syntax predikátové logiky

Konvence.

1. Úplně vnější závorky formule nepíšeme.
2. Negace váže silněji než ostatní logické spojky.
3. Kvantifikace váže silněji než ostatní spojky.

Syntaktický strom formule.

Podformule.

Syntax predikátové logiky

Volný a vázaný výskyt proměnné.

Máme formuli φ a její syntaktický strom. List syntaktického stromu obsazený proměnnou x je výskyt proměnné x ve formuli φ.

Syntax predikátové logiky

Volný a vázaný výskyt proměnné.

Máme formuli φ a její syntaktický strom. List syntaktického stromu obsazený proměnnou x je výskyt proměnné x ve formuli φ.

Výskyt proměnné x je vázaný ve formuli φ, jestliže při postupu od listu ohodnoceného tímto x ve směru ke kořeni syntaktického stromu narazíme na kvantifikátor s touto proměnnou.

Syntax predikátové logiky

Volný a vázaný výskyt proměnné.

Máme formuli φ a její syntaktický strom. List syntaktického stromu obsazený proměnnou x je výskyt proměnné x ve formuli φ.

Výskyt proměnné x je vázaný ve formuli φ, jestliže při postupu od listu ohodnoceného tímto x ve směru ke kořeni syntaktického stromu narazíme na kvantifikátor s touto proměnnou.

V opačném případě mluvíme o volném výskytu proměnné x.

Syntax predikátové logiky

Sentence, otevřená formule.

- Sentence, též *uzavřená formule*, je formule, která má pouze vázané výskyty proměnné.

Syntax predikátové logiky

Sentence, otevřená formule.

- Sentence, též *uzavřená formule*, je formule, která má pouze vázané výskyty proměnné.
- Otevřená formule je formule, která má pouze volné výskyty proměnné.