LGR — Sémantika PL 2

Matěj Dostál

Poznámka (Připomenutí definice z minulé přednášky)**.** Ať $\mathcal{L}$ je jazyk predikátové logiky. Interpretace $\mathcal{I}$ jazyka $\mathcal{L}$ sestává z

1. množiny U (takzvaného *universa*)
2. přiřazení $[\![-]\!]$, které
   (a) symbolu $P \in \mathsf{Pred}$ arity $\mathsf{ar}(P) = n \geq 1$ přiřadí množinu
   $$[\![P]\!] \subseteq U^n,$$
   symbolu $P \in \mathsf{Pred}$ arity $\mathsf{ar}(P) = 0$ přiřadí pravdivostní hodnotu 0 nebo 1,
   (b) symbolu $a \in \mathsf{Kons}$ přiřadí prvek
   $$[\![a]\!] \in U,$$
   (c) symbolu $f \in \mathsf{Func}$ arity $\mathsf{ar}(f) = n$ přiřadí zobrazení
   $$[\![f]\!] : U^n \to U.$$

Příklad (Příklad z minulé přednášky)**.** Jazyk $\mathcal{L}$ vyberme volbou symbolů

1. $\mathsf{Pred} = \{S, M\}$, $\mathsf{ar}(S) = 1$, $\mathsf{ar}(M) = 2$.
2. $\mathsf{Func} = \{f\}$, $\mathsf{ar}(f) = 2$.
3. $\mathsf{Kons} = \{a\}$.

Definujme interpretaci $\mathcal{I}$ následovně:

1. Jako universum U zvolme množinu přirozených čísel $\mathbb{N}$ (včetně nuly).
2. Nechť $[\![S]\!] = \{2 \cdot k \mid k \in \mathbb{N}\}$ a $[\![M]\!] = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m < n\}$.

3. Nechť $[\![f]\!] : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je sčítání přirozených čísel:

$$[\![f]\!](m, n) = m + n.$$

4. Nechť $[\![a]\!] = 1$.

V minulé přednášce jsme již částečně zavedli sémantiku formulí predikátové logiky. Co nám ještě chybí: zavést sémantiku logických spojek. Naštěstí se logické spojky chovají stejně jako ve výrokové logice, zavedení jejich významu nebude překvapující.

Definice (Rozšíření rekursivní definice sémantiky na formule obsahující logické spojky)**.** Nechť $\mathcal{I}$ je interpretace jazyka $\mathcal{L}$ predikátové logiky a nechť ρ je kontext proměnných. Mějme dvě formule φ, ψ jazyka $\mathcal{L}$, jejichž volné proměnné jsou v definičním oboru kontextu proměnných ρ. Pak rozšiřujeme definici vztahu $\models$ následovně:

- $\mathcal{I} \models_\rho \neg\varphi$ právě tehdy, když neplatí $\mathcal{I} \models_\rho \varphi$ (to jest, když $\mathcal{I} \not\models_\rho \varphi$).
- $\mathcal{I} \models_\rho \varphi \wedge \psi$ právě tehdy, když $\mathcal{I} \models_\rho \varphi$ a $\mathcal{I} \models_\rho \psi$.
- $\mathcal{I} \not\models_\rho \varphi \vee \psi$ právě tehdy, když $\mathcal{I} \not\models_\rho \varphi$ a $\mathcal{I} \not\models_\rho \psi$.
- $\mathcal{I} \not\models_\rho \varphi \Rightarrow \psi$ právě tehdy, když $\mathcal{I} \models_\rho \varphi$ a $\mathcal{I} \not\models_\rho \psi$.
- $\mathcal{I} \models_\rho \varphi \Leftrightarrow \psi$ právě tehdy, když jsou v interpretaci $\mathcal{I}$ a kontextu ρ formule φ a ψ obě pravdivé, nebo obě nepravdivé.

Příklad. Uvažujme naši interpretaci $\mathcal{I}$ a kontext proměnných

$$\begin{aligned} \rho : \{x, y\} &\to \mathbb{N} \\ x &\mapsto 2 \\ y &\mapsto 4. \end{aligned}$$

Platí

$$\mathcal{I} \models_\rho S(y) \Rightarrow S(f(a, y))?$$

Ne, protože formule $S(y)$ se vyhodnotí jako pravdivá a formule $S(f(a, y))$ se vyhodnotí jako nepravdivá: číslo 4 je sudé ($[\![y]\!]_\rho = 4$ a $4 \in [\![S]\!]$), číslo 5 sudé není ($[\![f(a, y)]\!]_\rho = 1 + 4 = 5$ a $5 \notin [\![S]\!]$).

Příklad. Uvažujme naši interpretaci $\mathcal{I}$ a kontext proměnných

$$\begin{aligned}\tau : \{x\} &\to \mathbb{N} \\ x &\mapsto 1.\end{aligned}$$

Platí

$$\mathcal{I} \models_\tau S(x) \vee \exists x M(a, x)?$$

Ano. Přestože $\mathcal{I} \not\models_\tau S(x)$ (číslo 1 není sudé), platí $\mathcal{I} \models_\tau \exists x M(a, x)$. Uvažujme update $\tau[x := 2]$. V tomto kontextu proměnných je formule $M(a, x)$ pravdivá:

$$\mathcal{I} \models_{\tau[x:=2]} M(a, x),$$

neboť $1 < 2$. Pozor na častou chybu: mohlo by se zdát, že $\mathcal{I} \not\models_\tau \exists x M(a, x)$, neboť $1 < 1$ (kontext proměnné x je 1), ale existenční kvantifikátor v naší formuli nám umožňuje pokusit se nalézt alespoň jeden update kontextu τ v x takový, aby v něm naše formule po odstranění existenčního kvantifikátoru byla pravdivá.

Definice. Sentence φ je *splnitelná*, pokud má nějaký model; je to *tautologie*, pokude je každá interpretace jejím modelem; a je to *kontradikce*, pokud nemá model.

Příklad. Formule

$$\varphi = \forall x M(x, f(a, x))$$

je sentence splnitelná: stačí vzít naši interpretaci $\mathcal{I}$, ta je modelem sentence φ. Sentence φ ale není tautologie. (Nalezněte dvouprvkovou interpretaci, která to dokazuje!) Naopak sentence

$$\forall x(S(x) \vee \neg S(x))$$

je tautologie. (Ukažte to tak, že pro každou interpretaci našeho jazyka $\mathcal{L}$ dokážete, že je v ní tato sentence pravdivá.)

Definice. Množina sentencí S je *splnitelná*, pokud existuje interpretace $\mathcal{I}$, která je modelem všech sentencí $\varphi \in S$ (tj., jestliže *má model*). Množina S je *nesplnitelná*, jestliže nemá model.

Příklad.

1. Prázdná množina $S = \emptyset$ je splnitelná, dokonce je každá interpretace jejím modelem.

2. Množina $T = \{\exists x S(x), \exists x \neg S(x)\}$ je splnitelná. Ukažte to na vhodně zvolené dvouprvkové interpretaci.

3. Množina $K = \{\exists x \neg S(x), \forall x S(x)\}$ je nesplnitelná. (Myšlenka: buď vlastnost S všechny prvky dané interpretace mají, nebo vlastnost S nějaký prvek nemá, nelze splnit oboje zároveň.)

Definice. Sentence φ je *sémantickým důsledkem množiny sentencí* S , pokud je každý model množiny S také modelem φ.

Značení. Sémantický důsledek značíme

$$S \models \varphi.$$

Pokud $S = \{\psi\}$ (S je jednoprvková), alternativně můžeme použít značení $\psi \models \varphi$. Pokud je S prázdná, můžeme použít značení $\models \varphi$.

Příklad. Příkladem sémantického důsledku je

$$\exists y \forall x M(x, y) \models \forall x \exists y M(x, y).$$

(Pečlivě ukažte, že každý model sentence $\exists y \forall x M(x, y)$ je i modelem sentence $\forall x \exists y M(x, y)$.) V obráceném směru ale důsledek neplatí:

$$\forall x \exists y M(x, y) \not\models \exists y \forall x M(x, y).$$

Příkladem interpretace, která tento důsledek vyvrací, je naše interpretace $\mathcal{I}$.

Pozorování.

1. Je-li φ tautologie, pak $S \models \varphi$ pro každou množinu sentencí S.

2. $\models \varphi$ platí právě tehdy, když je φ tautologie.

3. Množina sentencí S je nesplnitelná právě tehdy, když $S \models \varphi$ pro všechny sentence φ.

4. $S \models \bot$ právě tehdy, když je S nesplnitelná.