ALG 10

Dynamické programování

zkratka: DP

Zdroje, přehledy, ukázky viz

https://cw.fel.cvut.cz/wiki/courses/a4b33alg/literatura_odkazy

Dynamické programování

Příklady aplikací:

- Optimální rozvrhování navazujících procesů
- Přibližné vyhledávání v textu daných vzorků (bioinformatika)
- Optimální plnění ruksaku (kontejneru, nádob...)
- Hledání optimálních cest/spojení v grafech, sítích...
- Nejdelší podposloupnosti s předepsanými vlastnostmi
- Nejdelší společná podposloupnost
- Optimální pořadí násobení matic
- Optimální vyhledávací strom
- Optimální vrcholové pokrytí hran stromu
- Množství dalších....

Dynamické programování

Charakteristika

Neřeší jeden konkrétní typ úlohy, je to všeobecná strategie (podobně jako Rozděl a panuj) pro řešení převážně optimalizačních úloh z různých oblastí tvorby algoritmů.

Významné vlastnosti

1. Hledané optimální řešení lze sestavit z vhodně volených optimalních řešení téže úlohy nad redukovanými daty.

2. V rekurzivně formulovaném postupu řešení se opakovaně objevují stejné menší podproblémy.
DP umožňuje obejít opakovaný výpočet většinou jednoduchou tabelací výsledků menších podproblémů, tedy volně řečeno, předpočítáním menších výsledků.

Dynamické programování

Seznam DP algoritmů na en.wikipedia.org/wiki/Dynamic_programming

- Recurrent solutions to lattice models for protein-DNA binding
- Backward induction as a solution method for finite-horizon discrete-time dynamic optimization problems
- Method of undetermined coefficients can be used to solve the Bellman equation in infinite-horizon, discrete-time, discounted, time-invariant dynamic optimization problems
- Many string algorithms including longest common subsequence, longest increasing subsequence, longest common substring, Levenshtein distance (edit distance)
- Many algorithmic problems on graphs can be solved efficiently for graphs of bounded treewidth or bounded clique-width by using dynamic programming on a tree decomposition of the graph.
- The Cocke–Younger–Kasami (CYK) algorithm which determines whether and how a given string can be generated by a given context-free grammar
- Knuth's word wrapping algorithm that minimizes raggedness when word wrapping text
- The use of transposition tables and refutation tables in computer chess
- The Viterbi algorithm (used for hidden Markov models)
- The Earley algorithm (a type of chart parser)
- The Needleman–Wunsch and other algorithms used in bioinformatics, including sequence alignment, structural alignment, RNA structure prediction
- Floyd's all-pairs shortest path algorithm
- Optimizing the order for chain matrix multiplication
- Pseudo-polynomial time algorithms for the subset sum and knapsack and partition problems
- The dynamic time warping algorithm for computing the global distance between two time series
- The Selinger (a.k.a. System R) algorithm for relational database query optimization
- De Boor algorithm for evaluating B-spline curves
- Duckworth–Lewis method for resolving the problem when games of cricket are interrupted
- The value iteration method for solving Markov decision processes
- Some graphic image edge following selection methods such as the "magnet" selection tool in Photoshop
- Some methods for solving interval scheduling problems
- Some methods for solving word wrap problems
- Some methods for solving the travelling salesman problem, either exactly (in exponential time) or approximately (e.g. via the bitonic tour)
- Recursive least squares method
- Beat tracking in music information retrieval
- Adaptive-critic training strategy for artificial neural networks
- Stereo algorithms for solving the correspondence problem used in stereo vision
- Seam carving (content aware image resizing)
- The Bellman–Ford algorithm for finding the shortest distance in a graph
- Some approximate solution methods for the linear search problem
- Kadane's algorithm for the maximum subarray problem

Ilustrační otisk obrazovky

Tabelace v DP - příklad

Definice funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & (x = 0) \;||\; (y = 0) \\ 2 \cdot f(x, y-1) + f(x-1,y) & (x > 0) \;\&\&\; (y > 0) \end{cases}$$

Otázka

f(10,10) = ?

Program

```
int f( int x, int y ) {
  if ( (x == 0) || (y == 0) )
    return 1;
  return ( 2* f(x, y-1) + f(x-1,y) );
}
```

```
print( f(10,10) );
```

Odpověď

f(10,10) = 127 574 017 

Tabelace v DP - příklad

Jednoduchá analýza

```
int count = 0;

int f( int x, int y ){
  count++;
  if ( (x == 0) || (y == 0) )
    return 1;
  return ( 2* f(x, y-1) + f(x-1,y) );
}
```

```
xyz = f( 10,10 );
print( count );
```

Výsledek analýzy

count = 369 511 

Kvíz 1

```
int f( int x, int y ) {
  if ( (x == 0) || (y == 0) )
    return 1;
  return ( 2* f(x, y-1) + f(x-1,y) );
}

print( f( ___, ___ ) );
```

Výpočet proběhne za MINUTU nebo méně pro volání

a) f(10, 10) Ano / Ne
b) f(20, 20) Ano / Ne
c) f(100, 100) Ano / Ne
d) f(1000, 1000) Ano / Ne
e) f(10000, 10000) Ano / Ne

Kvíz 1 - odpověď

Počet rekurzivních volání f při výpočtu f(x,y)		Upočítáme za minutu
a) f(10, 10)	369511	Ano
b) f(20, 20)	275693057639	Ano, na super HW
c) f(100, 100)		Ne

18109702931220656233080835415496832774900917935082667368263 9

d) f(1000, 1000) — Ne

40963032539789794286703250059616500887928497759627940676407652753434963724041675116578659883652204124029295326399604738483096359600904958403609509953852315712602579326864129429702304790503302455537177223079092512295814757336928308889067235227540147711347629179260142613020911919028959777492412737437029103657102346332552507327546169365864510778099487718962863510061567592888741620170327449654925582834033239767529681687082861635571894075493130376951029361499389349847606066203637446596019337134917120505099820236227050706931777588393330734980902261222019262381254068500458631182221795346792798229823 9

e) f(10000, 10000) — Asi Ne...

Na dalším slidu

Kvíz 1 - odpověď, počet volání f při f(10000,100000)

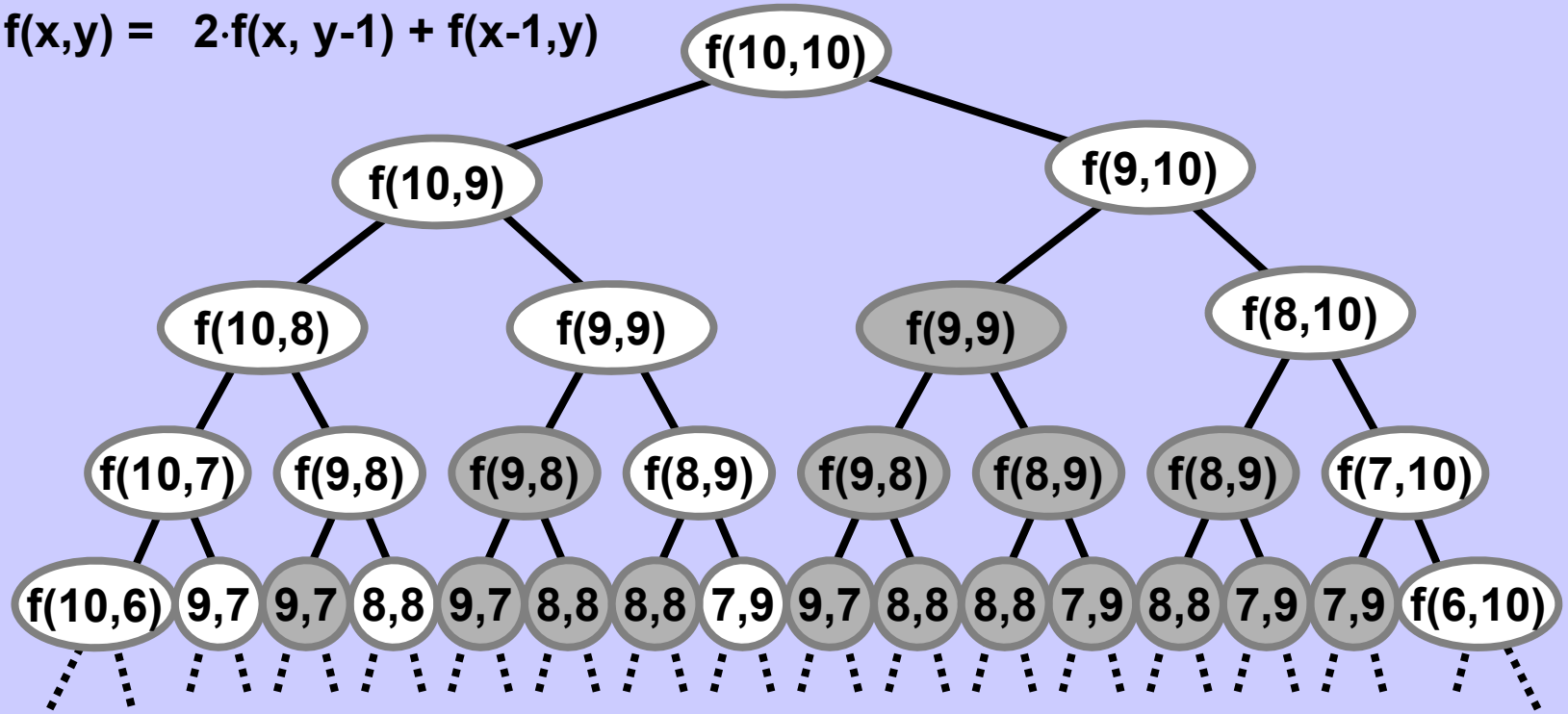
4491205325492691083103138872315726295179473931559756487241420864144760440647188090888944050587724632844618527686779393202388845184672075961684978215062
7789036613445612248673150600809080353581471518044743847296221417135506611964629212882344387362375266503655493728650501604261803202313478393797242159620
8470970334193363789735312966028100220637572758941332893162321408026220336798411290281108618831193762384090514389901511520093434982465614570091145993944
03835614029053777085152072236940756552111051657196684855764725253414732069109324391863039981273014997136463339397701054592971176404540861665137078419476
4207527278241366960930551874253531962285501154508961495259887794334284560299454359813313110854396377314866789083672300616716606102792330369853902372042
9363172133044761726635253714345318656797764921485071118596871373779373972516100103071569201994919639664257765115885331728181482600593568295213432095658
0405966629026326926076561320815054365647741921676103711987625014102983817336038796025824738912731524631332339109988382670853289384866906726374474381204
2656579233018413171306030010183862397691417485174744949716584327712366849728956898944263924760602690499661095409481071700475879577851547750529158378931
7653785981565736465239326739831246916363282780974497745701585170962690035381730312970544313877754113986057449783184584882309052750962428657495608442888
9242130962812958796161242637688059090908057170352026978602227647420362971241748764636563714773675839841403781789250217607866353444138672923563367082844
2421739832941753042945696446353271414862975295480672967946549360431898853582517693899379386644096574628835084980428586993131970712189421042172296033716
5853997940166551100297804025742131202801367243239597551288909926607936121547262481242517635179613900122326589389559905833938514916517950103726567878950
5961548450187448054990759618968069954400643807193688925231468658135216865098827415881742639780938787689927142814914754669754433544908066778168285352571
6138052755949775267069469321336456184211682024704519979078958778307555380439653097671164139979265443291932015509779433607747350762446891148276372433248
1299249421998360906359020103559433412799375728536665595852844713539978333123142722201905259892425359397041449157743331130085243715873339865915971702276
3309005244605825165765369584132029925884480789194697290541565019437665902932867782181957082672508287170925000526923368085679015579175622408559420509987
8840517858912033903412897751265830307365487481270416701376642623343749496856571594398758187822242343900837142177144791253834534534052860150140787252107
8907127419465542752844483097124068276308153446633528826565358385204840608133465884306148038735510294930998603490156529666688818044534917126196601637330
5849315257669289669795274200415655735750840621674141501147631062941061048360069463448664202063345780691207257118570039972275682082233419305609606278853
2567545992308604320547990380520893587001357724349345270491820300410638140969264161269770566253718261454915896730913247607716682816299987569804880495619
9067762405146070491105935354071731909530049960856780002367673729301863486316190231475381094925812654233966789741578762607856563323381535610498708940780
0430570770116915354615198040167913311821408793484751548630855164042626913116821127586882466114116050288822059515224407139421344161558331337656337042579
1935235747946513632513213063859557773404925238224327984873244114787415400927447087484418727277949157975608112488878496297780226761815382341034754935099
7146899511555732662538673035977228845190234774225616968808089960700098385866546950873663660486042899443595138586259798051664760924151406983680912073232
7681682144882000641351029670158495760128095738031260760315219629028081864440806875436674977755781556476988028783380851203728062647914270240055110164954
1263009198614033015605707689067766721547542421106772567542939622757783976846817392654841078120575411146821206737573076016299492310939373247245465819789
5386851860553443345919225297607992879235228383822644653500211238307249750763673346273462481338580687523527786453516392586171433069192627362146839642787
3336176713483106439387762325354460849569995722487550423350867159708064661673777502746655764504824413115982163773249797756719997502386102803033929366358
4878721357845243776508026541446174324047258225135775986597152553965555413742988520036433277514533893224894952634421048201708617808198574812446681784355
1308579134252450624787352760223014977802696250949016383039556988702583135555888992621169889351132843101279167378954493982017247537421084349195475384114
1543253467009198447085933682472494204741068073638177760436616418048100623073311587316675997581525213428311736573624377678236945232599605131854991491880
5690564805087729998790479990411925542644243721901408231402130765197115389419653134149224211251429806538524212416076682977569659441792022663271420278942
2416791105996250775947593233060736758068233112004929247304794510714968055764336214995955265882241162163933171037847941586392521054145590194885339611725
4488801030132556793805168325489137472210414824271312021379532080565145879360344298514088681409659439759443375216516299930924504490160885862533714042554
4742620482792959272677709865201937593707882567199262328570391673293898691531389506513996429316847733825093950641955437479759560950088276763174961379377
8443172596735234708054774906972400261550420107317737658565741170351489589942953883438082538942859548808878420883351517146450866031205386562723500483313
0485306939573880652515236897540119979050336971525311249843796092876509161718683502014425173655263286657895319422292809893005806001379272570389750396641
1593969832730983444658512821198470094834253438206358968647444925213802666708549952133617554645472797927562872527906528281722901901994467757848145257799
070860254287396434682015695333136197338002754198997208222612542532052982058327877996462899886944299177837285977045967600118357158575254453229820847359
9009878688975373438054943998371741392336473604942722093778027451411978906101750569525099094988174378719001682836853318972907833279

Na doma: Ověřte správnost tohoto výsledku! (*např. 5 řádků v Pythonu...* **)**

Tabelace v DP - příklad

Detailnější analýza – strom rekurzivního volání

$f(x,y) = 2 \cdot f(x, y-1) + f(x-1,y)$

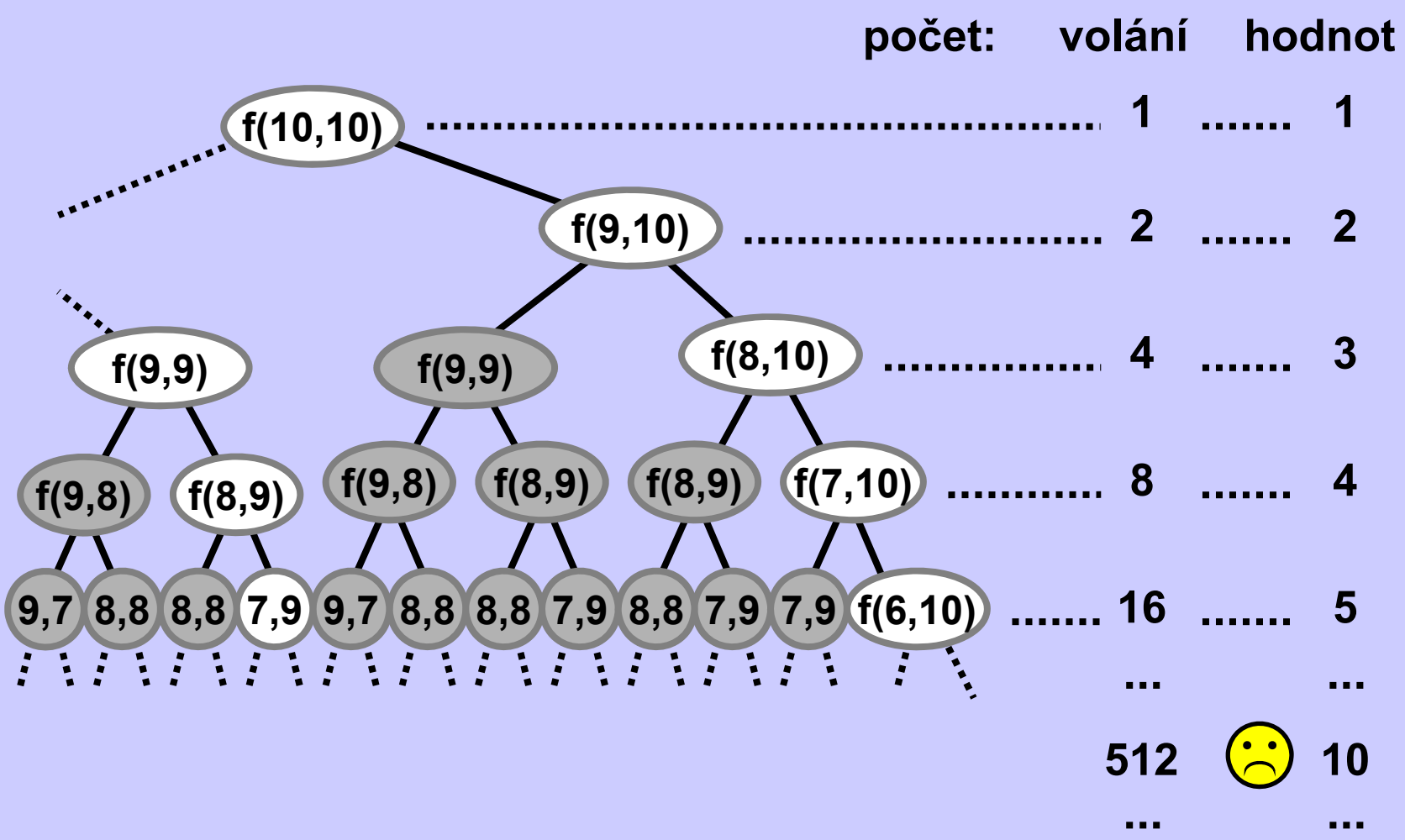


f(x,y) ... Opakující se výpočty, velké množství!

8,8 9,7 zobrazeny jen parametry pro nedostatek místa

Tabelace v DP - příklad

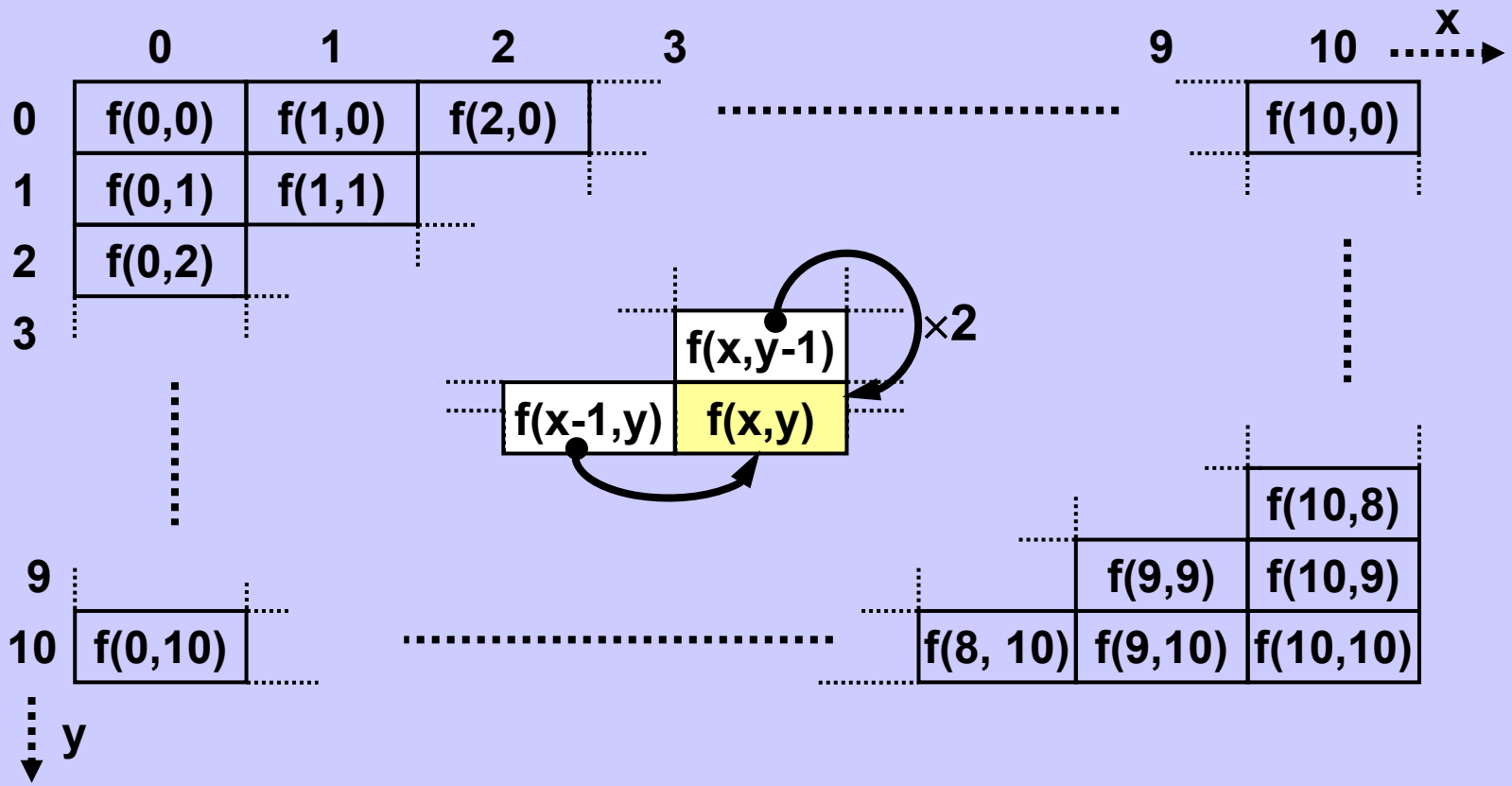
Detailnější analýza pokračuje – efektivita rekurzivního volání



Tabelace v DP - příklad

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & (x = 0) \;||\; (y = 0) \\ 2 \cdot f(x, y-1) + f(x-1,y) & (x > 0) \;\&\&\; (y > 0) \end{cases}$$

Tabulka všeobecně

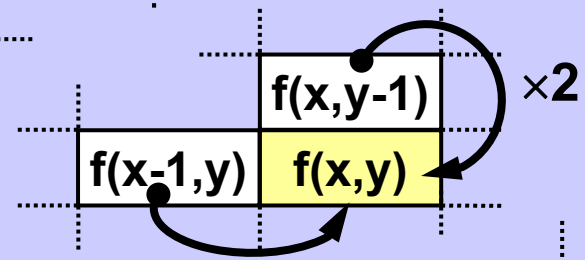


Tabelace v DP - příklad

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & (x = 0) \;||\; (y = 0) \\ 2 \cdot f(x, y-1) + f(x-1,y) & (x > 0) \;\&\&\; (y > 0) \end{cases}$$

Tabulka numericky

y \ x	0	1	2	3	4	…	9	10
0	1	1	1	1	1	…		1
1	1	3	5	7	9			
2	1	7	17	31				
3	1	15	49					
4	1	31						
⋮								
9							16807935	32978945
10	1	…					28000257	61616127	127574017



Tabelace v DP - příklad

PV(x,y) --- počet rekurzivních volání f po příkazu f(x, y)

$$PV(x,y) = \begin{cases} 1 & (x = 0) \;||\; (y = 0) \\ 1 + PV(x, y-1) + PV(x-1,y) & (x > 0) \;\&\&\; (y > 0) \end{cases}$$

y/x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
2	1	5	11	19	29	41	55	71	89	109	131
3	1	7	19	39	69	111	167	239	329	439	571
4	1	9	29	69	139	251	419	659	989	1429	2001
5	1	11	41	111	251	503	923	1583	2573	4003	6005
6	1	13	55	167	419	923	1847	3431	6005	10009	16015
7	1	15	71	239	659	1583	3431	6863	12869	22879	38895
8	1	17	89	329	989	2573	6005	12869	25739	48619	87515
9	1	19	109	439	1429	4003	10009	22879	48619	97239	184755
10	1	21	131	571	2001	6005	16015	38895	87515	184755	369511

Tabelace v DP - příklad

Všechny hodnoty se předpočítají

```
int dynArr [N+1][N+1];

void fillDynArr(){

  for( int xy = 0; xy <= N; xy++ )
      dynArr[0][xy] = dynArr[xy][0] = 1;

  for( int y = 1; y <= N; y++ )
    for( int x = 1; x <= N; x++ )
       dynArr[y][x] = 2*dynArr[y-1][x] + dynArr[y][x-1];
}
```

Volání funkce

```
int f( int x, int y ){
  return dynArr[y][x];
}
```

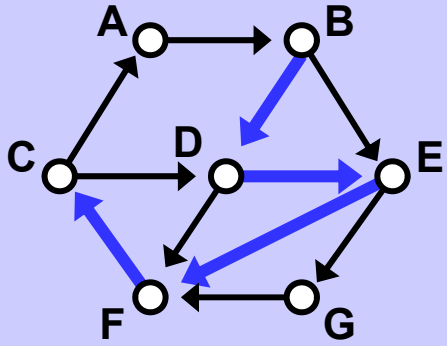
Hledání optimálních cest v grafu

Značení
Graf G = (V, E), množina uzlů resp. hran: V(G) resp. E(G),
N = |V(G)|, M = |E(G)|, případně n = |V|, m = |E(G)| apod.

Cesta v grafu
= posloupnost na sebe navazujících hran,
která prochází každým uzlem nejvýše jednou.

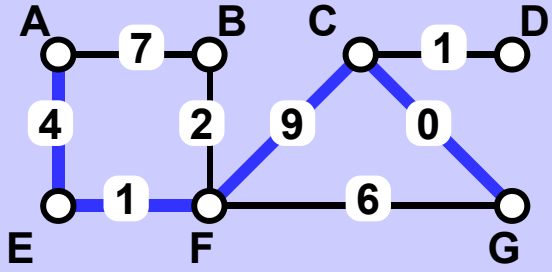
Délka cesty v neváženém grafu
= počet hran na cestě.

Př. Délka (B D E F C) = 4.



Délka cesty ve váženém grafu
= součet vah hran na cestě.

Př. Délka (A E F C G) = 14.



Hledání optimálních cest v grafu

Nejkratší cesty

Úloha nalezení nejkratší cesty mezi dvěma danými uzly,
případně mezi některými dvojicemi uzlů nebo
mezi všemi dvojicemi uzlů.
(Například minimalizace nákladů na přesun z X do Y.)

Postupy

Je vyřešena úspěšně pro všechny praktické případy.
V neváženém obecném grafu známe BFS,
pro jiné případy, zejména vážených grafů, existují specializované algoritmy -- Dijkstra, Floyd-Warshall, Johnson, Bellman-Ford, atd.

Složitost

Asymptotická složitost je vždy polynomiální v počtu uzlů a hran,
typicky nalezení jedné cesty má složitost nanejvýš $O(N^2)$,
kde N je počet uzlů grafu.

Hledání optimálních cest v grafu

Nejdelší cesty

Úloha nalezení nejdelší cesty v grafu mezi dvěma danými uzly, nebo v celém grafu vůbec.
(Například maximalizace zisků při provádění navzájem závislých činností.)
Není dosud uspokojivě vyřešena v plné obecnosti.

Exponenciální složitost

NP - těžký problém

Možné strategie

1. Brute force -- exponenciální složitost, pro N > cca 30 bezcenná.

2. Algoritmy přibližného řešení s polynomiální složitostí
   -- buď najdou optimum jen s určitou pravděpodobností
   -- nebo zaručí jen nalezení suboptimálního řešení
   -- typicky jsou netriviální a náročné na správnou implementaci.

Hledání nejdelších cest v grafu

Možné strategie

3. Specifické typy grafů dovolují použít efektivní specifický algoritmus.

Nejjednodušší případ

3A.
Graf je strom (vážený ano i ne, orientovaný ano i ne).
Nejdelší cestu lze najít, např. s pomocí průchodu postorder, vždy v čase $\Theta(N)$.

Příležitost pro DP

3B.
Graf je orientovaný, acyklický, vážený ano i ne.
Standardní označení: DAG (Directed Acyclic Graph)

Topologické uspořádání DAG

Topologické uspořádání uzlů DAG je takové pořadí jeho uzlů, ve kterém každá hrana vede z uzlu s nižším pořadím do uzlu s vyšším pořadím.

Každý DAG lze topologicky uspořádat, většinou více způsoby.

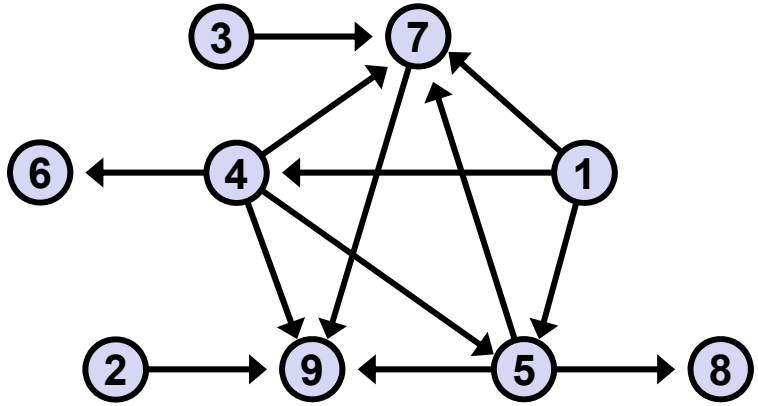
Orientovaný graf s alespoň jedním cyklem nelze topologicky uspořádat.

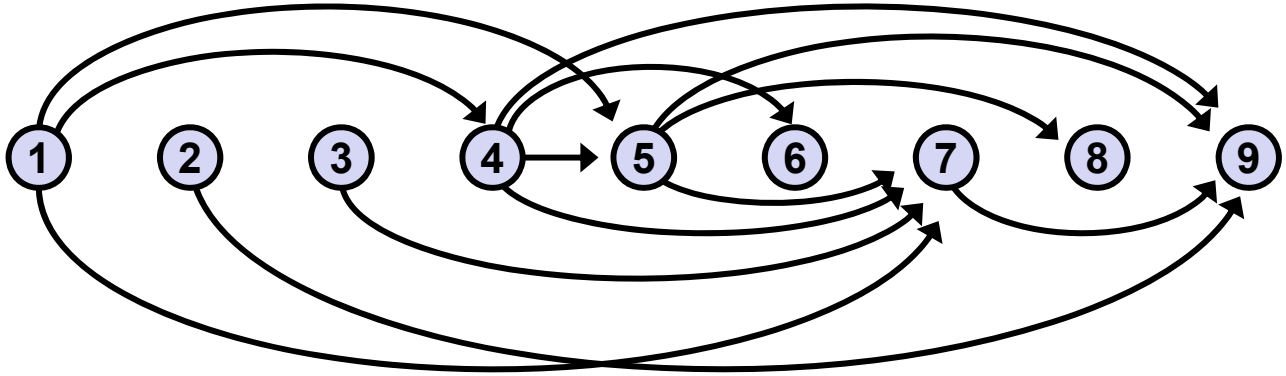
Mnoho úloh DP obsahuje DAG na vstupu již topologicky uspořádaný.

Topologické uspořádání DAG (alespoň jedno) lze sestavit v čase $\Theta(M)$, tj. v čase úměrném počtu hran DAG.

DAG a jeho topologické uspořádání

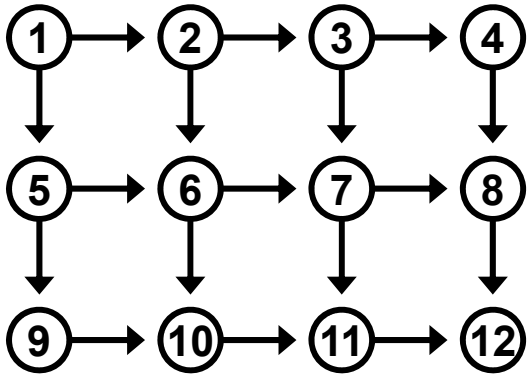
Příklad 1

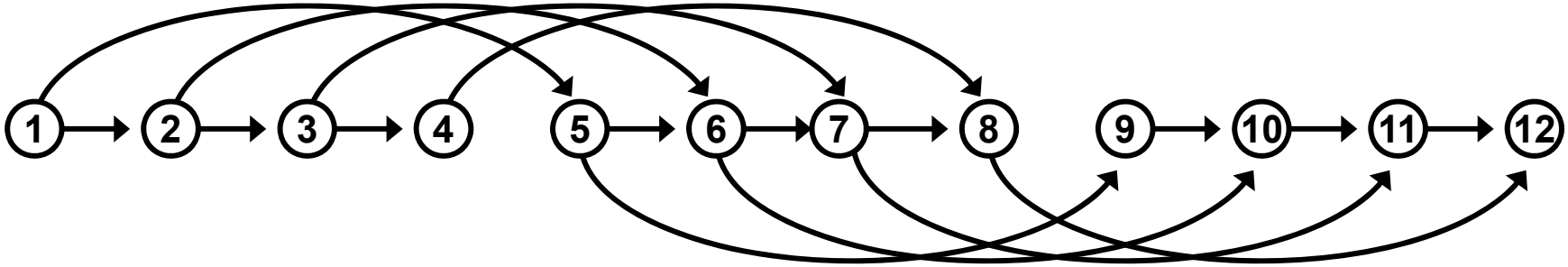




DAG a jeho různá topologická uspořádání

Příklad 2a

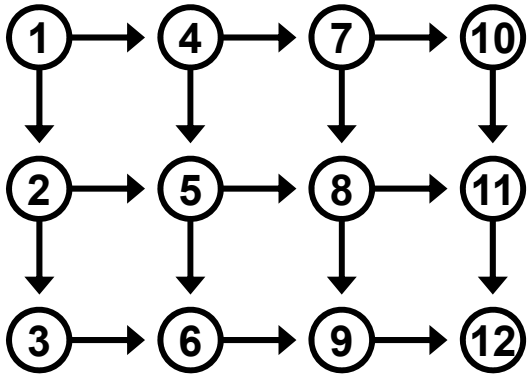


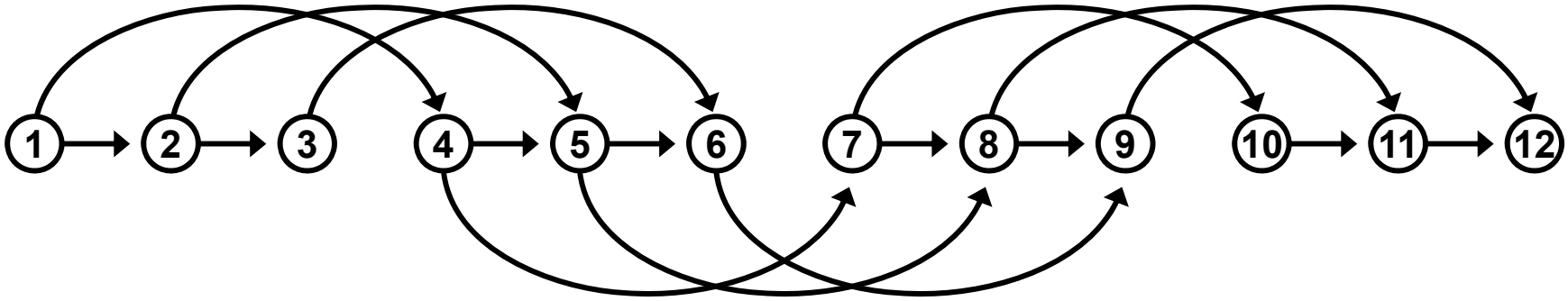


V uzlu je zapsáno jeho pořadí v topologickém uspořádání

DAG a jeho různá topologická uspořádání

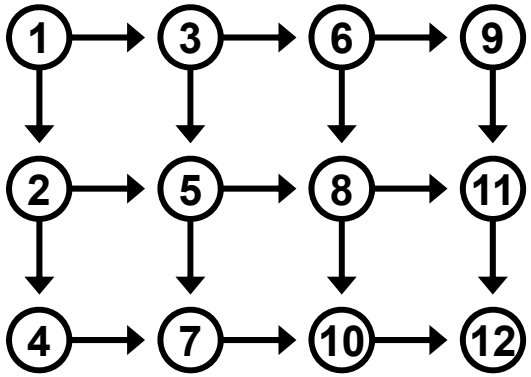
Příklad 2b

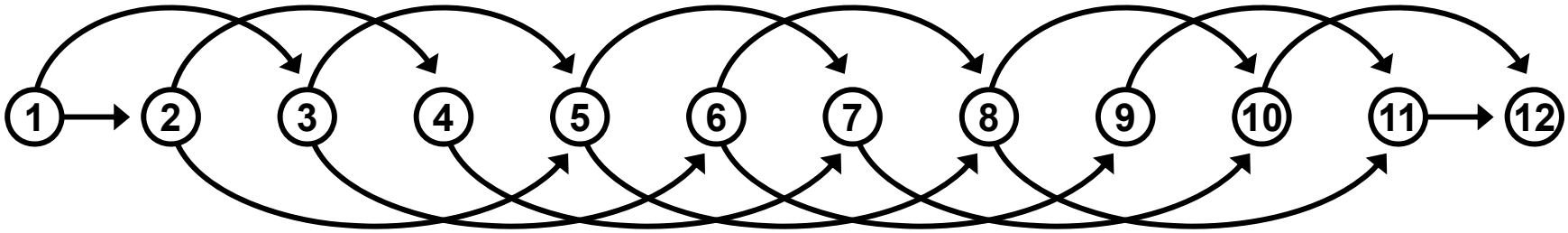




DAG a jeho různá topologická uspořádání

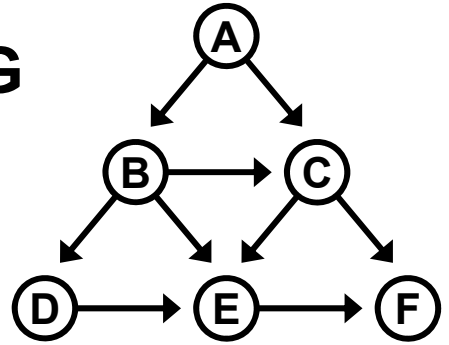
Příklad 2c





Kvíz 2

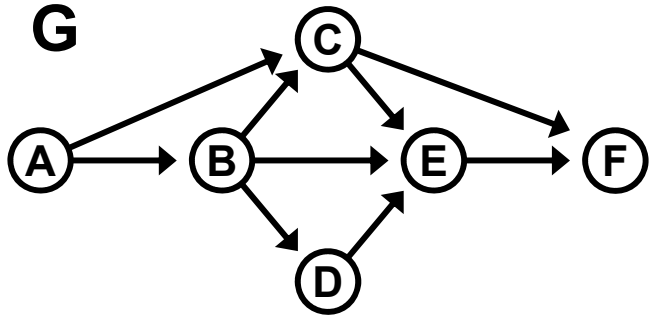
G

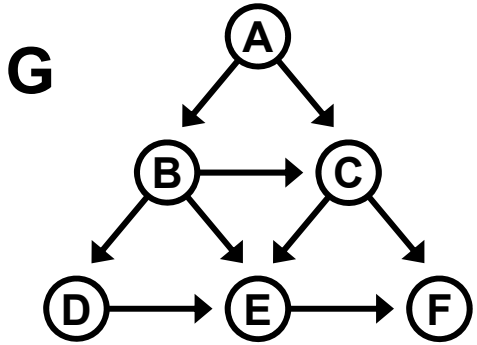


Graf G
a) Nelze topolgicky uspořádat,
b) lze topologicky uspořádat jen jedním způsobem,
c) lze topologicky uspořádat dvěma způsoby,
d) lze topologicky uspořádat třemi způsoby,
e) lze topologicky uspořádat 6! způsoby.

Kvíz 2, odpověď

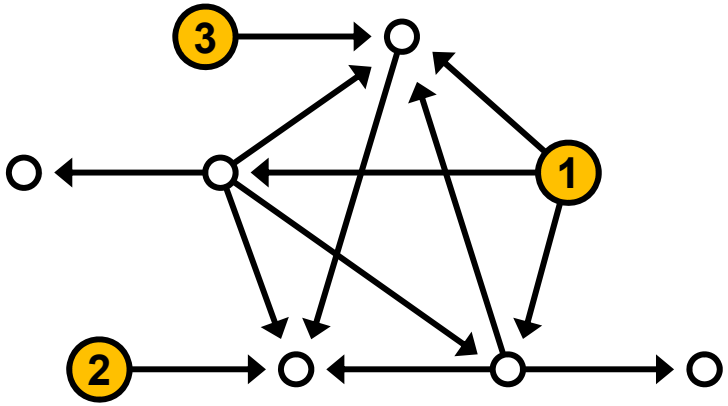
Graf G
...
c) lze topologicky uspořádat dvěma způsoby,
....



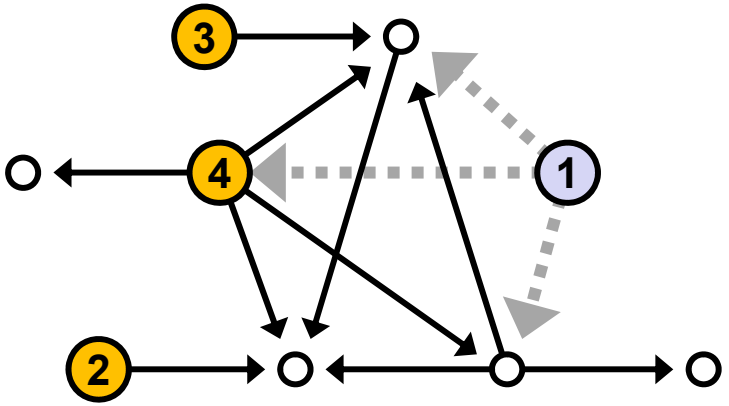


Pořadí A B E F nelze měnit (orientovaná cesta),
C a D musí být v topologickém uspořádání mezi B a E,
buď v pořadí C D nebo v pořadí D C.

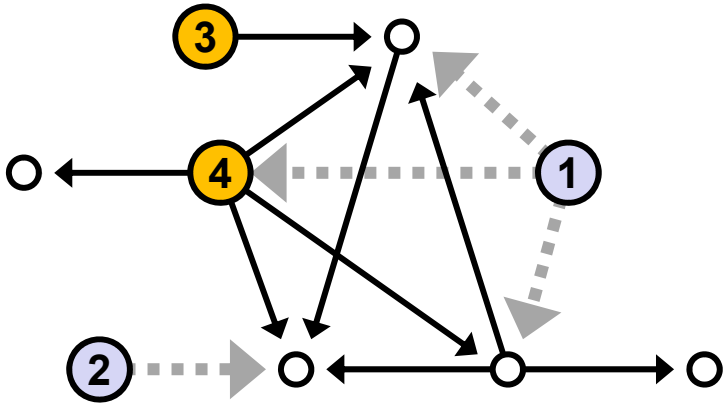
Topologické uspořádání DAG - příklad



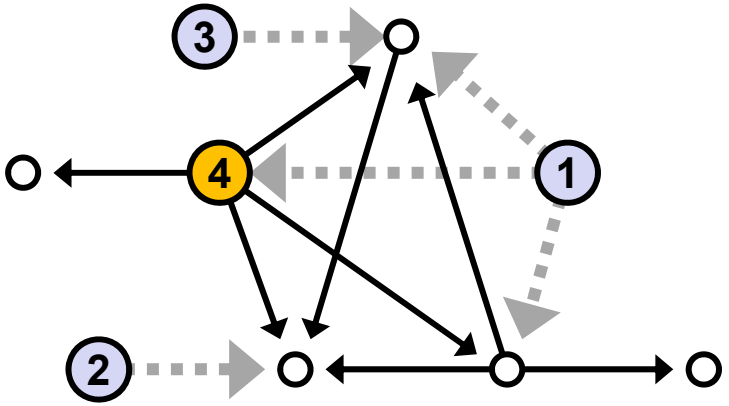
Queue: 1, 2, 3.



Queue: 2, 3, 4.

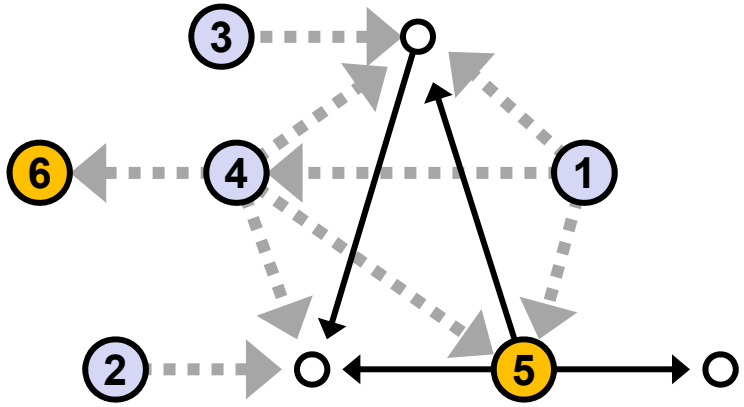


Queue: 3, 4.

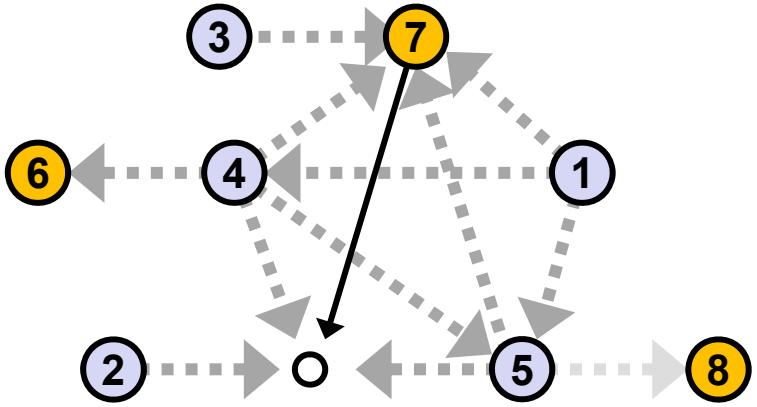


Queue: 4.

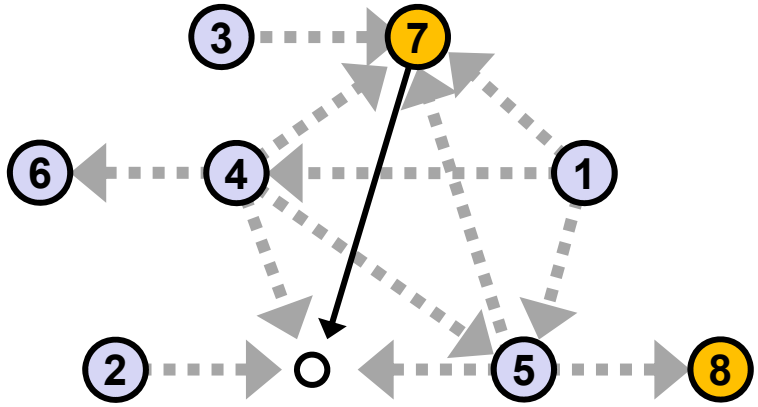
Topologické uspořádání DAG - příklad



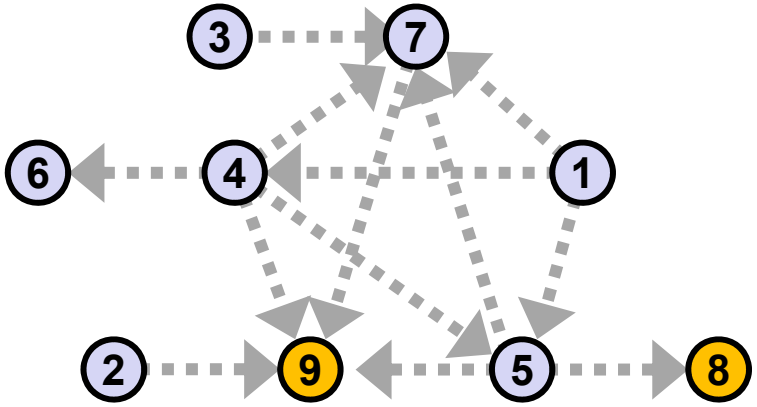
Queue: 5, 6.



Queue: 6, 7, 8.

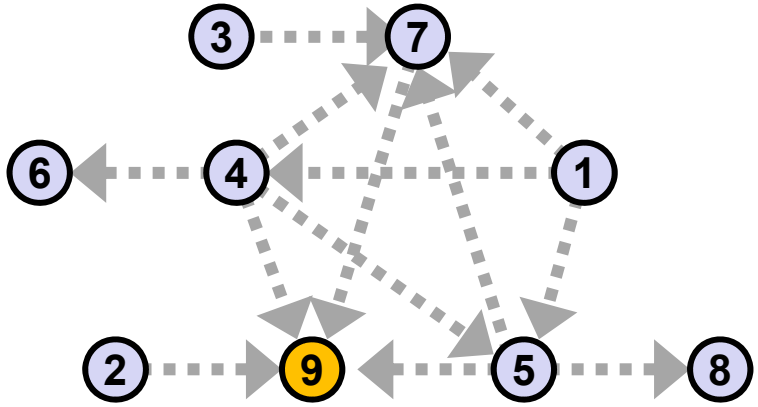


Queue: 7, 8.

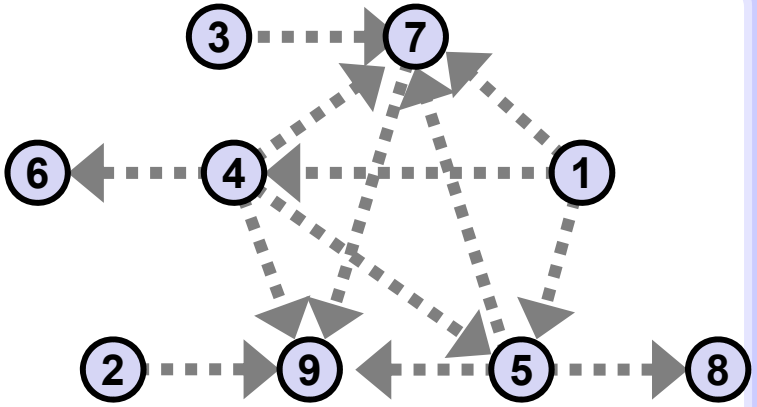


Queue: 8, 9.

Topologické uspořádání DAG - příklad

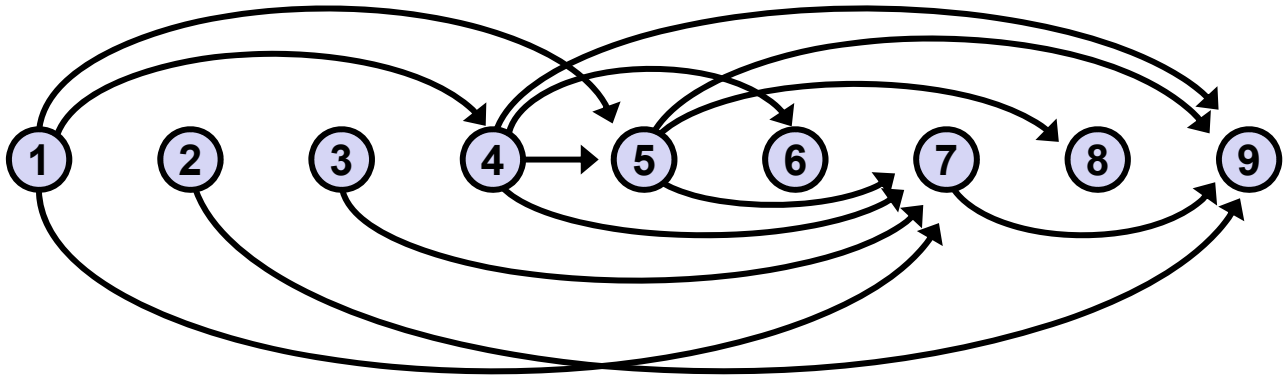


Queue: 9.



Queue: Empty.

Topologické uspořádání



Topologické uspořádání DAG

Algoritmus

```
0. new queue Q of Node
   counter = 0

1. for each x in V(G)
      if (x.indegree == 0)     // x is a root
         Q.insert(x)
          x.toporder = counter++

2. while (!Q.empty()) {
   Node v = Q.pop()
   for each edge (v, w) ∈ E(G) {
      G.removeEdge((v, w))
      if (w.indegree == 0)    // w is a root
         Q.insert(w)
         w.toporder = counter++
   }
}
```

Složitost

Předpokládáme, že operace
G.removeEdge((v, w))
má konstantní složitost *).

0. Složitost O(N)
1. Složitost Θ(N)
2. Složitost Θ(M),
   každá hrana je navštívena
   právě jednou
   a zpracována v konstantním čase.

Složitost: Θ(N+M)

**) Hranu fyzicky neodstraňujeme, jen ji vhodně označíme a změníme charakteristiky obou krajních uzlů.*

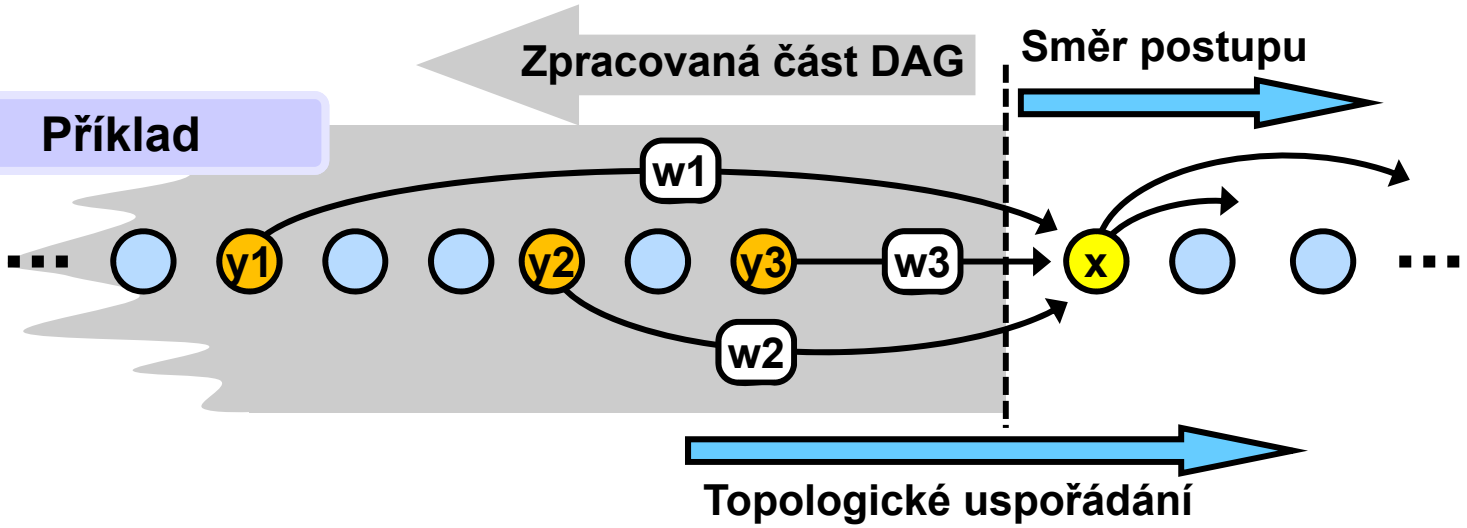
Pořadí, ve kterém se uzly vkládají do fronty, určuje topogické uspořádání DAG.

Nejdelší cesta v DAG

Předpokládáme topologické uspořádání a v jeho směru procházíme DAG.
Označme d[x] délku té cesty v DAG, která končí v x a je nejdelší možná.

Charakteristický pohled "odzadu dopředu":
-- d[x] určujeme až v okamžiku, kdy jsou známy hodnoty d pro všechny předchozí (= již zpracované) uzly v topologickém uspořádání.
-- d[x] určíme jako maximum z hodnot
{ d[y1] + w1, d[y2] + w2, ..., d[yk] + wk },
kde (y1, x), (y2, x) , ..., (yk, x) jsou všechny hrany končící v x
a w1, w2, ..., wk jsou jejich odpovídající váhy.

Příklad



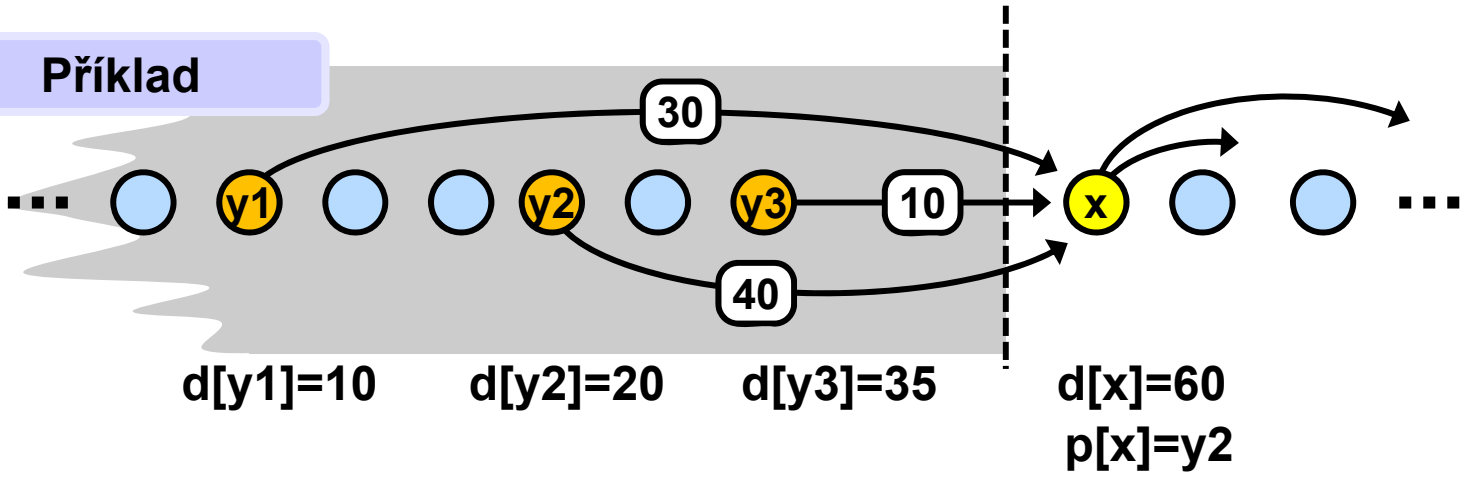
Nejdelší cesta v DAG

-- d[x] určíme jako maximum z hodnot
{ d[y1] + w1, d[y2] + w2, ..., d[yk] + wk },
kde (y1, x), (y2, x) , ..., (yk, x) jsou všechny hrany končící v x
a w1, w2, ..., wk jsou jejich odpovídající váhy.

-- Uzel yj, pro který je hodnota d[yj] + wj maximální a nezáporná, ustavíme předchůdcem x na hledané nejdelší cestě.

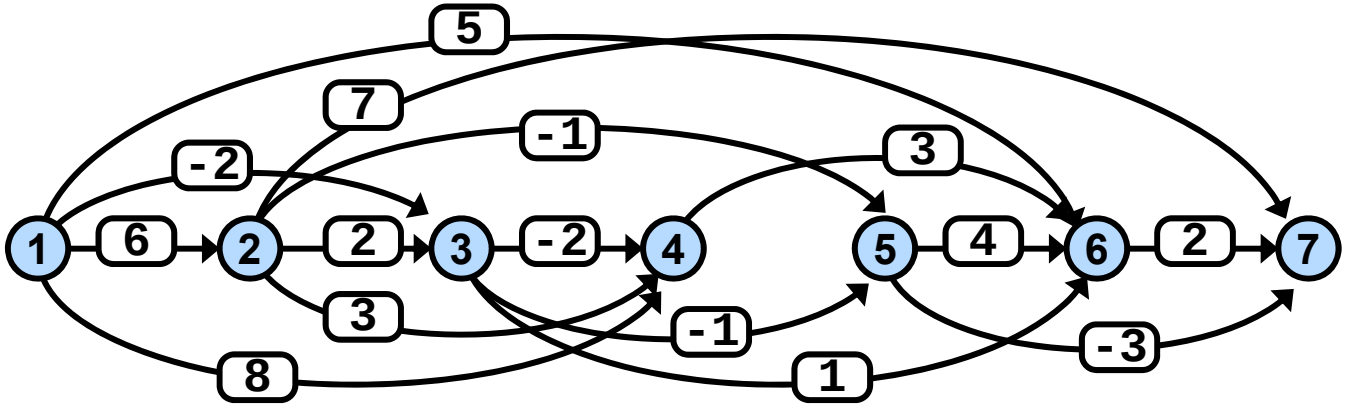
-- Pokud jsou všechny hodnoty {d[y1] + w1, d[y2] + w2, ..., d[yk] + wk} záporné, nepřispívají do nejdelší cesty, pak položíme d[x] = 0, předchůdce x = null.

Příklad



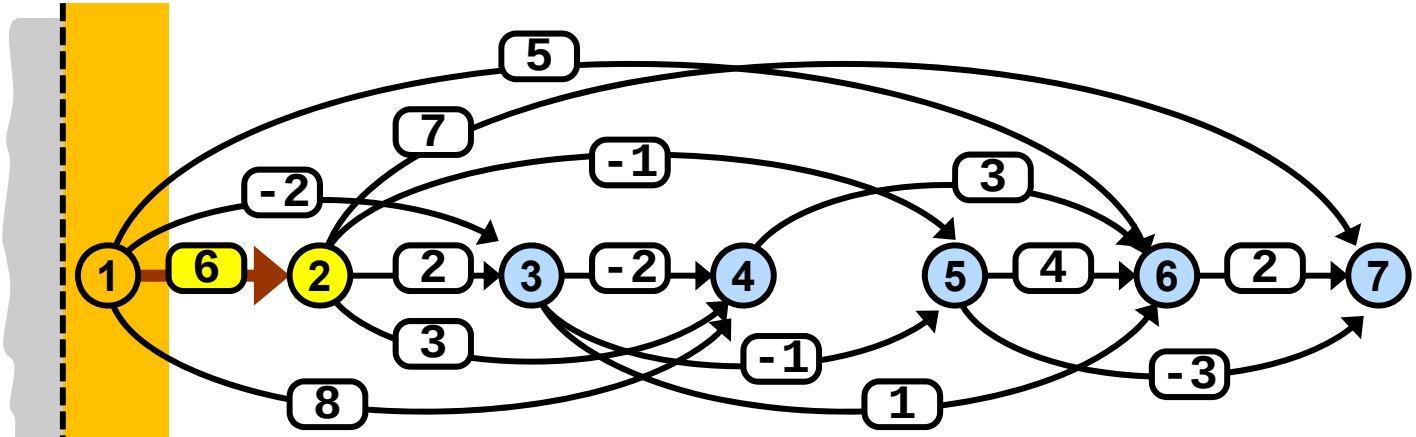
Nejdelší cesta v DAG

Příklad



Určete nejdelší cestu a její délku.

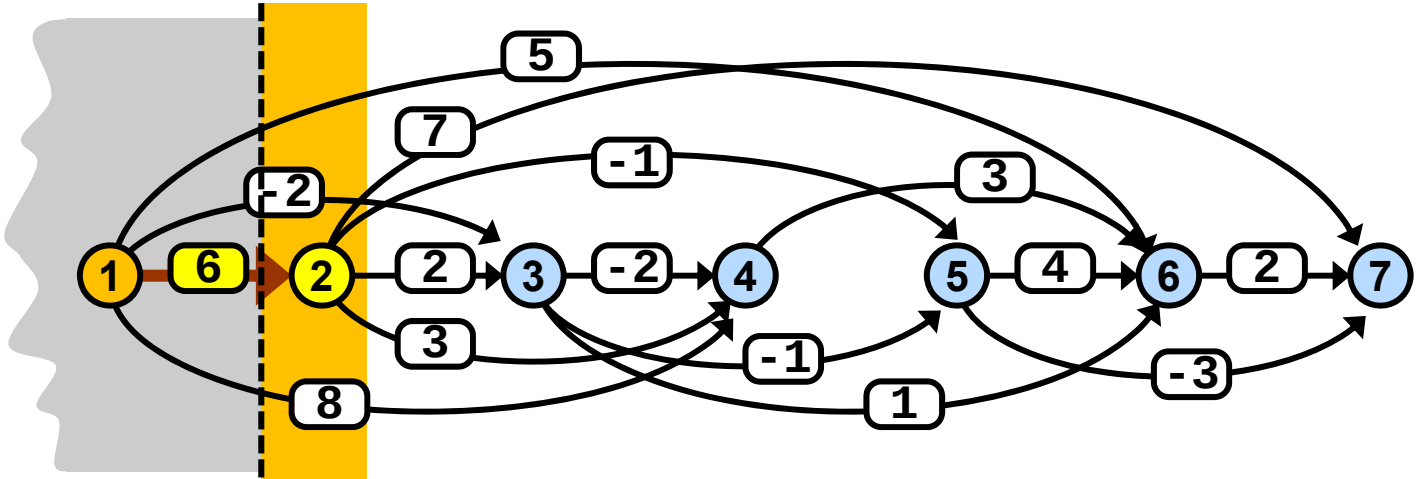
Nejdelší cesta v DAG



d=0

p=nil

Nejdelší cesta v DAG



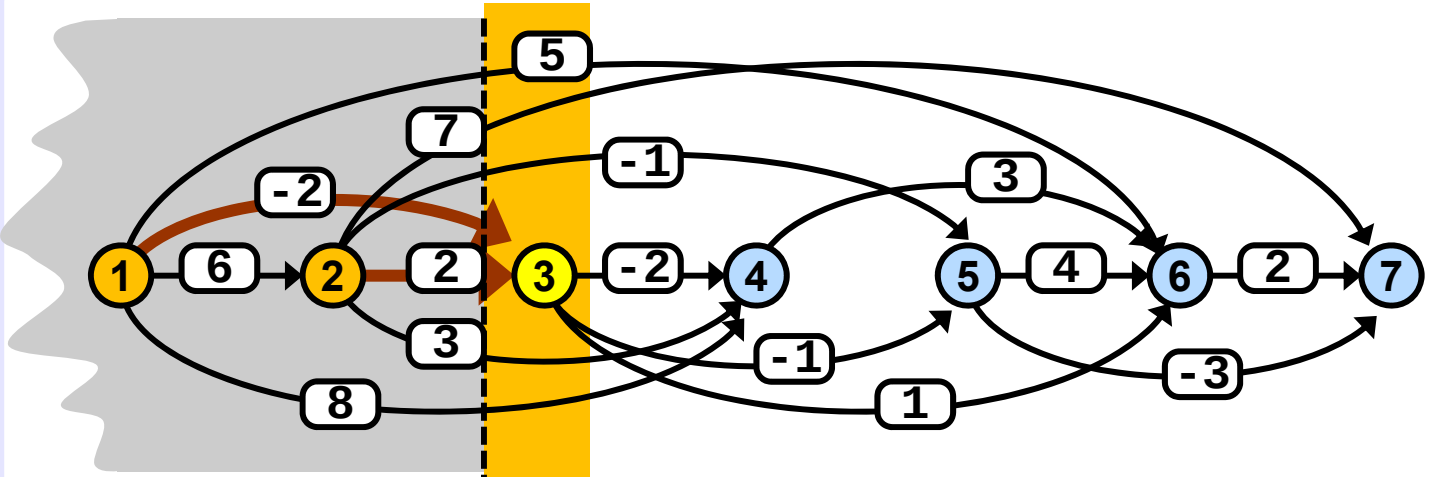
d=0

p=nil

d = max {0+6}
= 6

p=1

Nejdelší cesta v DAG



d=0 d=6

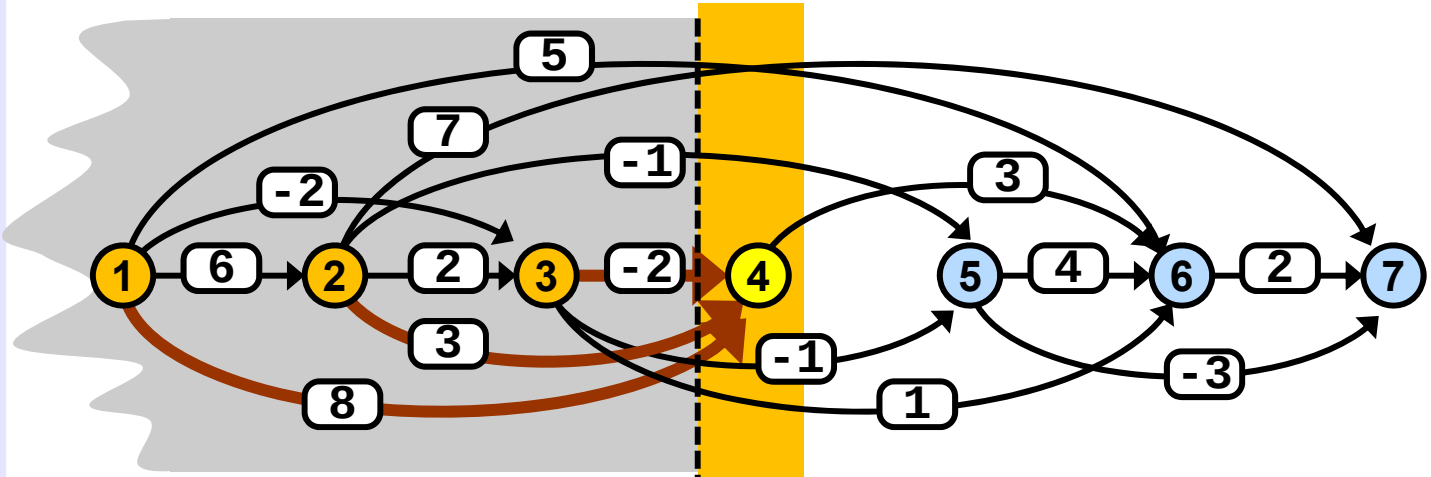
p=nil p=1

d = max {0+-2, 6+2}

= 8

p = 2

Nejdelší cesta v DAG



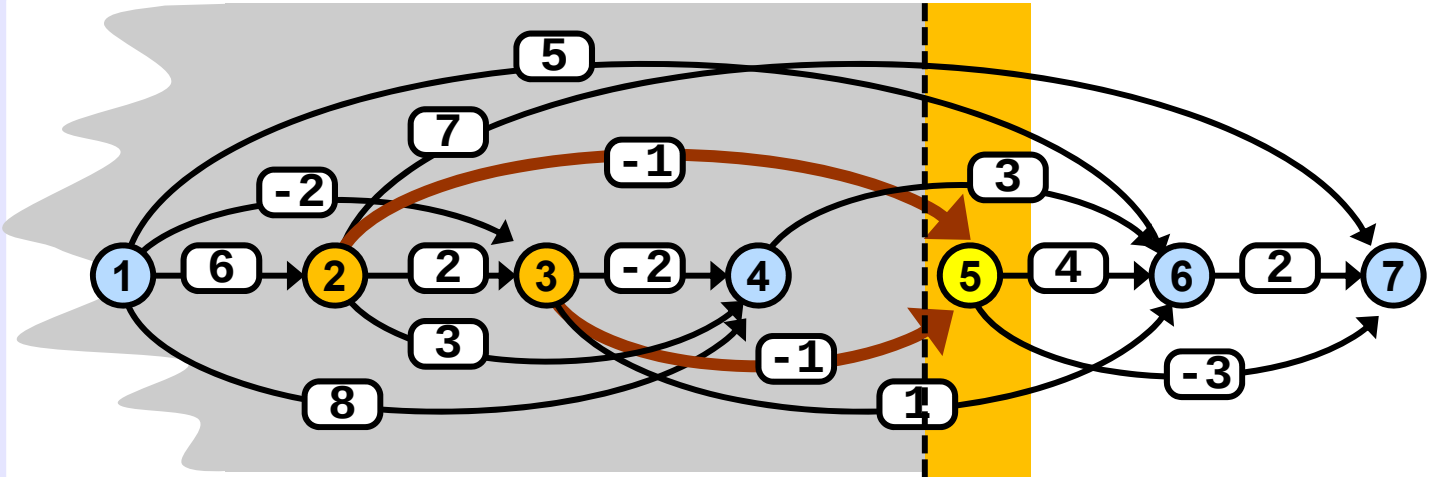
d=0 d=6 d=8

p=nil p=1 p=2

d = max {0+8,
6+3,
8+-2}
= 9

p = 2

Nejdelší cesta v DAG



d=0 p=nil

d=6 p=1

d=8 p=2

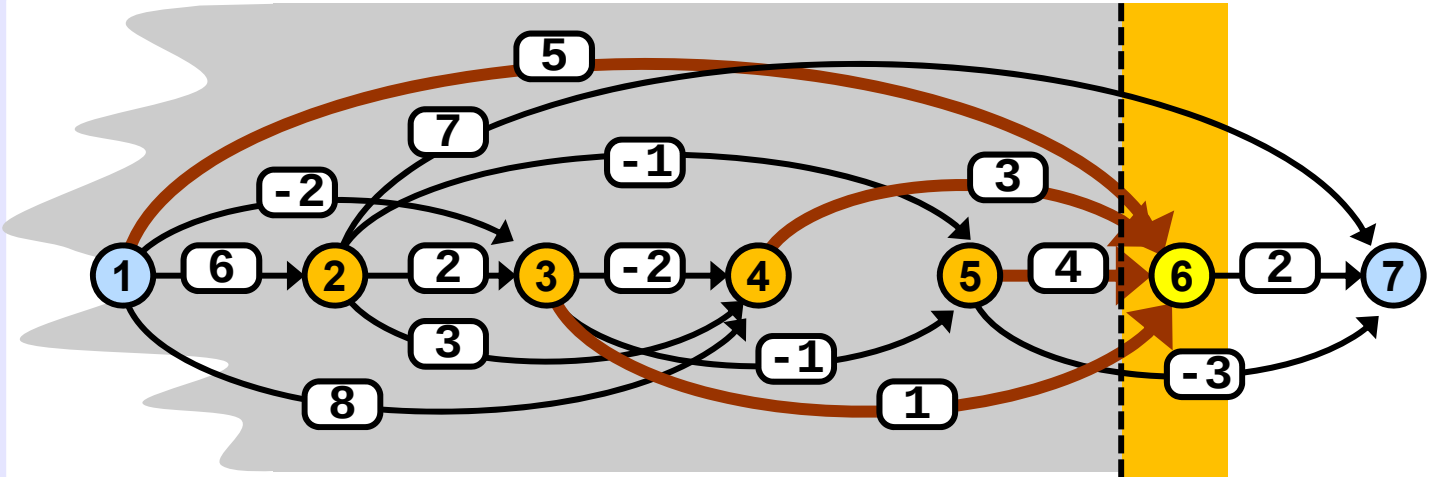
d=9 p=2

d = max {6+-1, 8+-1}

= 7

p = 3

Nejdelší cesta v DAG

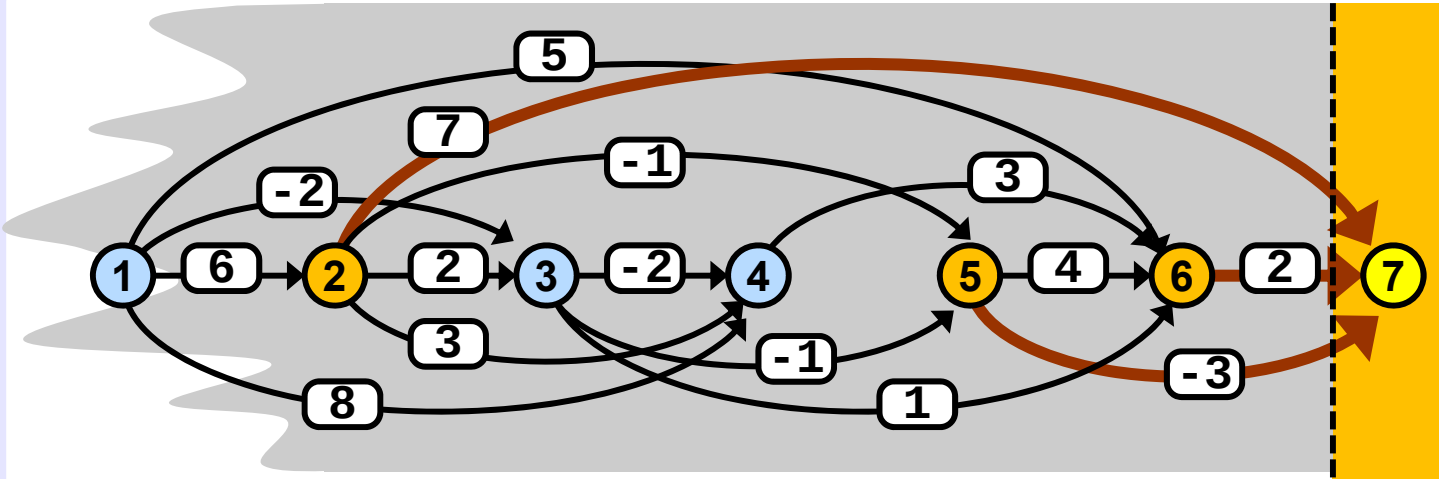


d=0	d=6	d=8	d=9	d=7
p=nil	p=1	p=2	p=2	p=3

d = max {0+5,
8+1,
9+3,
7+4}
= 12

p = 4

Nejdelší cesta v DAG

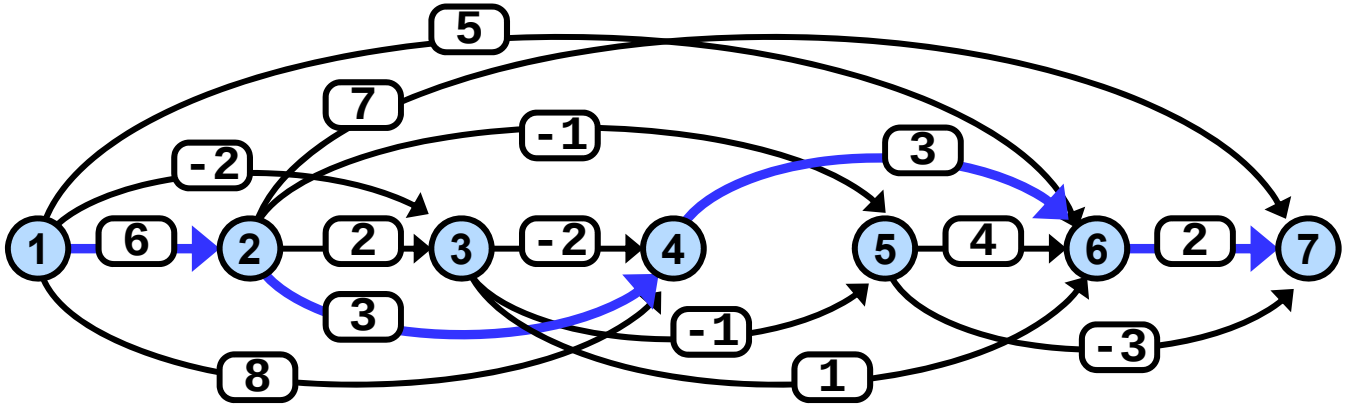


d=0	d=6	d=8	d=9	d=7	d=12
p=nil	p=1	p=2	p=2	p=3	p=4

d = max {6+7,
7+-3,
12+2}
= 14

p = 6

Nejdelší cesta v DAG



d=0	d=6	d=8	d=9	d=7	d=12	d=14
p=nil	p=1	p=2	p=2	p=3	p=4	p=6

Délka nejdelší cesty: 14
Nejdelší cesta: 1 -- 2 -- 4 -- 6 -- 7

Nejdelší cesta v DAG

```
0. allocate memory for distance and predecessor of each node

1. for each node x in V(G) {
       x.dist = 0        // avoids negative path lengths
       x.pred = null
   }

// supposing nodes are processed
// in ascending topological order
2. for each node x in V(G) {
     for each edge e = (y, x)
       if (x. dist < y.dist + e.weight) {
          x. dist = y.dist + e.weight
          x.pred = y;
   }
}
```

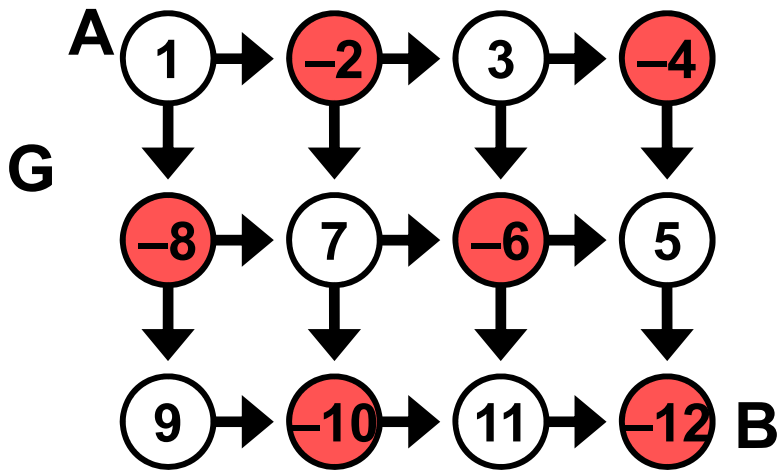
0. Složitost $\Theta(N)$
1. Složitost $\Theta(N)$
2. Složitost $\Theta(M)$, každá hrana je navštívena právě jednou a zpracována v konstantním čase.

Složitost: $\Theta(N+M)$

Kvíz 3

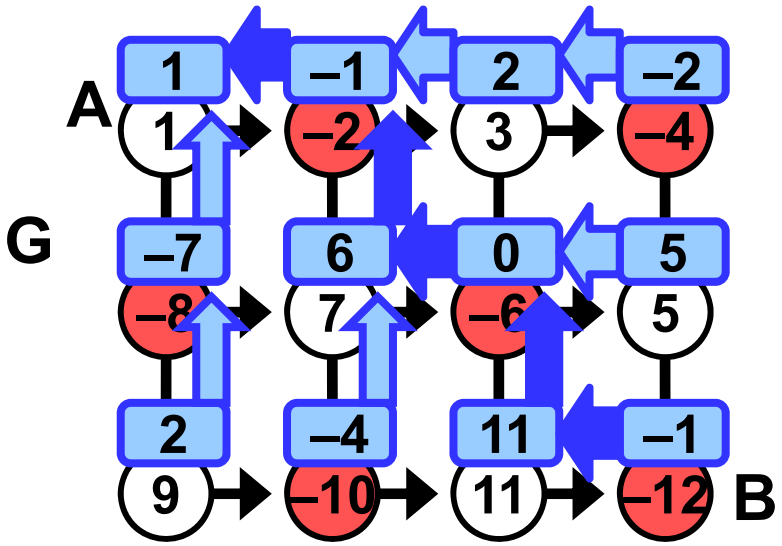
Při průchodu grafem G z A do B

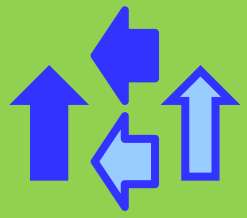
a) lze vydělat nejvýše –2
b) lze vydělat nejvýše –1
c) lze vydělat nejvýše 0
d) lze vydělat nejvýše 1
e) lze vydělat alespoň 2



Kvíz 3, odpověď

Při průchodu grafem G z A do B
...
b) lze vydělat nejvýše –1





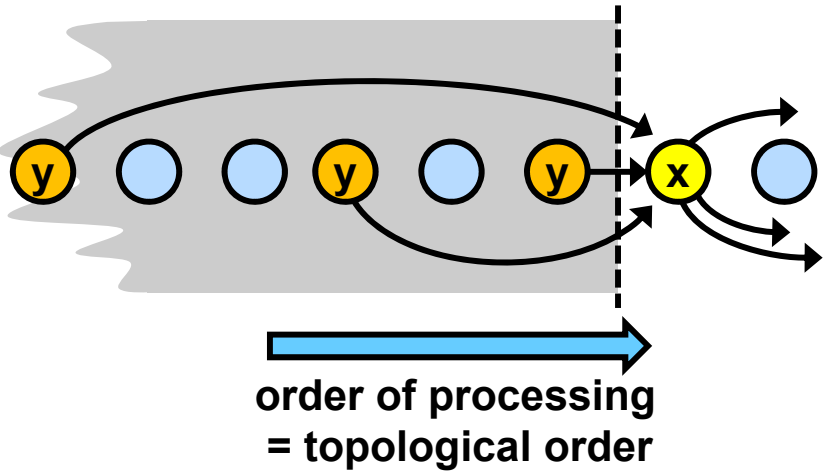
Výběr lepšího předchůdce uzlu

Optimální cesta

Nejdelší cesta v DAG

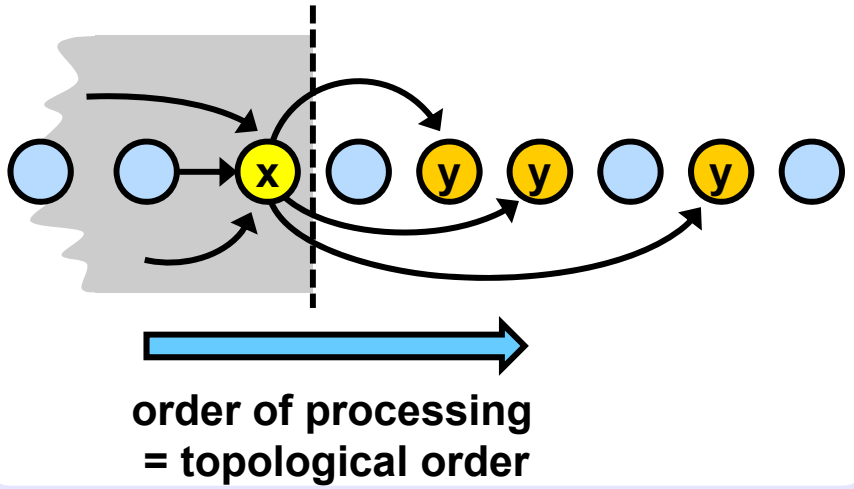
Varianta I

```
2. for each node (x) in V(G) {
     for each edge e = (y, x) in E(G)
       if (x. dist < y.dist + e.weight) {
         x. dist = y.dist + e.weight
         x.pred = y;
     }
   }
```



Varianta II

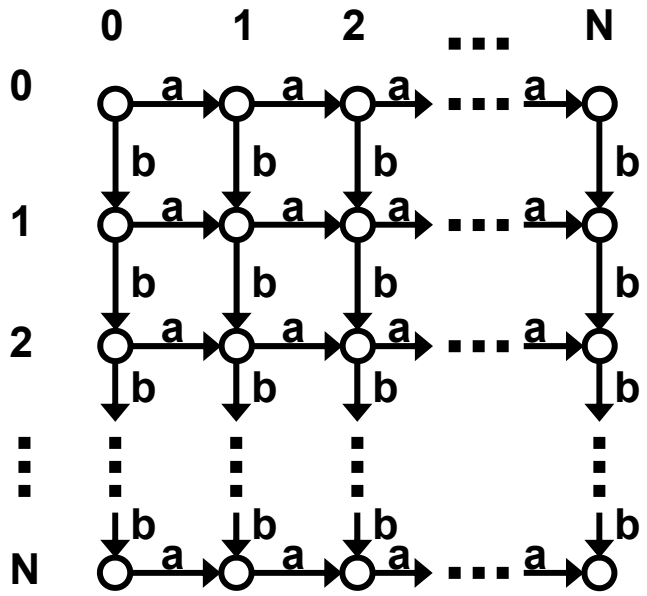
```
2. for each node (x) in V(G) {
     for each edge e = (x, y) in E(G)
       if (y. dist < x.dist + e.weight) {
         y. dist = x.dist + e.weight
         y.pred = x;
     }
   }
```



Nejdelší cesty v DAG

Problém rekonstrukce *všech* optimálních cest
-- může jich být příliš mnoho.

Ukázka



Každá cesta z kořene do listu je optimální, má cenu $N \cdot (a+b)$.

Počet všech těchto cest je $\binom{2N}{N}$,

přičemž $2^N < \binom{2N}{N} < 4^N$.

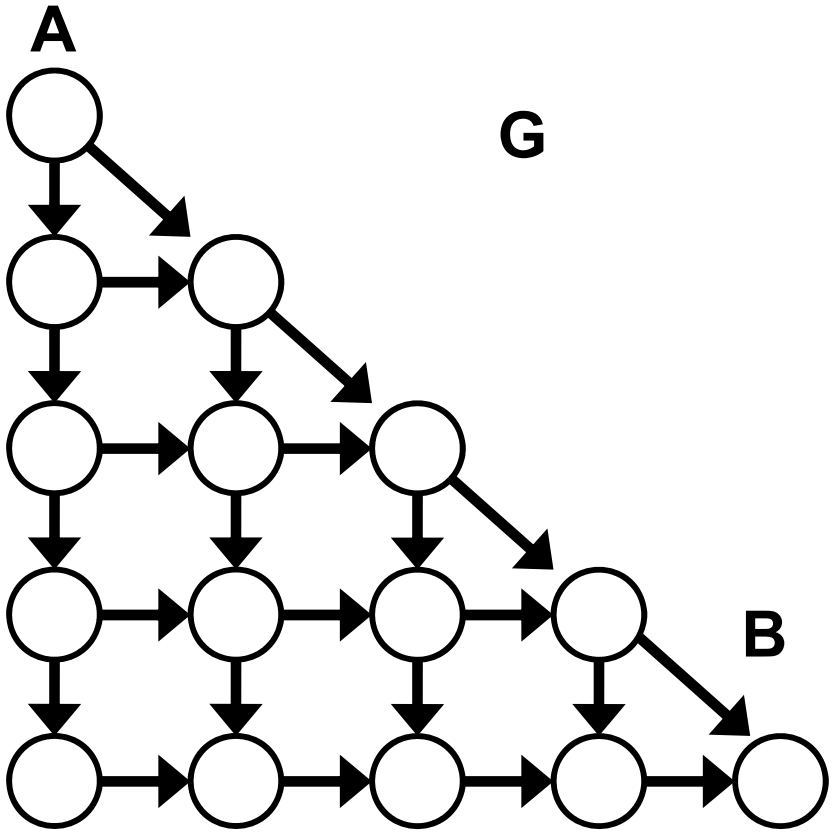
Počet optimálních řešení tedy roste exponenciálně vůči hodnotě N. Např.

N	Počet optimálních řešení
1	2
10	184756
20	137846528820
30	118264581564861424
40	107507208733336176461620

Kvíz 4

Kolik různých cest vede v G z A do B?

a) Méně než 10
b) od 10 do 20
c) od 21 do 41
d) 42 ??
e) 43 nebo více

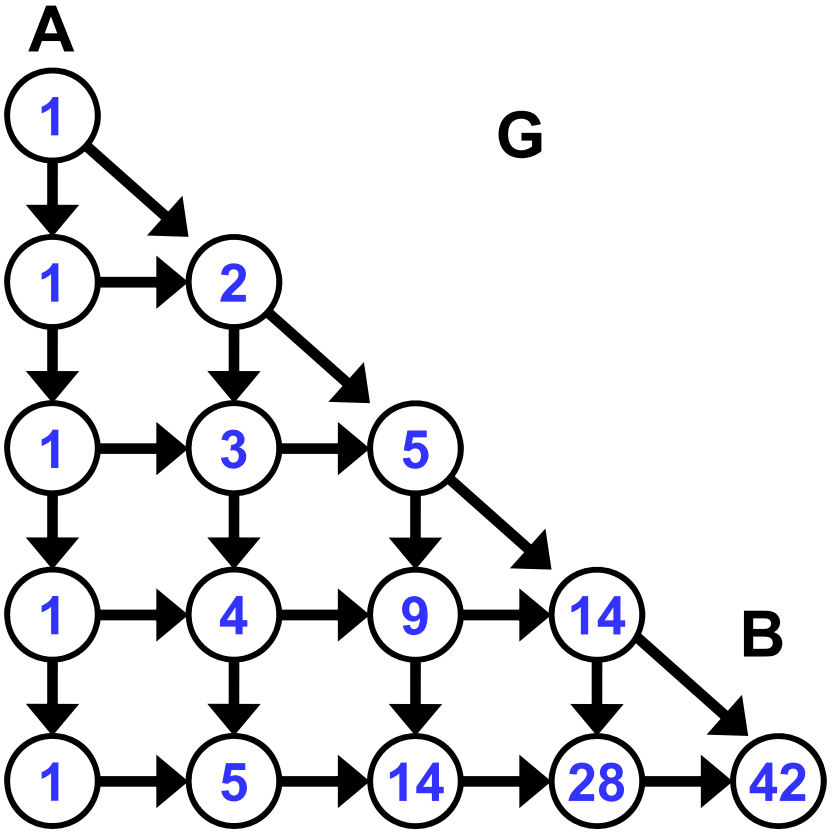


Kvíz 4, odpověď

Kolik různých cest vede v G z A do B?

...

d) 42



Na diagonále jsou tzv. Catalanova čísla, OEIS A000108.

Každé číslo v uzlu je součtem čísel na začátcích hran vedoucích do uzlu, kromě A, kde se začíná.

Komentáře k domácím úlohám

Za týden...