Algoritmizace

Marko Genyk-Berezovskyj, Daniel Průša

2010 – 2022

Přehled

- Selection, Insertion a Bubble sort
- Quicksort
- stabilita řazení

Z minula

Operace	B-strom řádu k s n uzly
Find	$\Theta(k \cdot \log_k n)$
Insert	$\Theta(k \cdot \log_k n)$
Delete	$\Theta(k \cdot \log_k n)$

? Jakou má Find asymptotickou složitost při použití binárního vyhledávání v uzlech?

$$(\log_2 k) \cdot (\log_k n) = (\log_2 k) \cdot \frac{\log_2 n}{\log_2 k} = \log_2 n$$

Z minula

Join at
slido.com
#543 701

Active poll 11

Jakou má v B-stromě operace Find asymptotickou složitost při použití binárního vyhledávání v uzlech?

- O(log n)
- O(logn / k)
- O(log2k * logkn)
- O(logn)
- O(log(2, k) * log(k, n))
- Θ
- n*(k*logk(n))
- O(log2 k * logk n)
- O(log_2(k) * log_k(n))
- Log2(2k)*logk(n)
- Θ(log n)
- logk(n)

slido

Join at slido.com
#403516

ⓘ Start presenting to display the joining instructions on this slide.

slido

Audience Q&A Session

ⓘ Start presenting to display the audience questions on this slide.

slido

Které z uvedených řadících algoritmů byste zpaměti naprogramovali?

ⓘ Start presenting to display the poll results on this slide.

Selection sort (řazení výběrem)

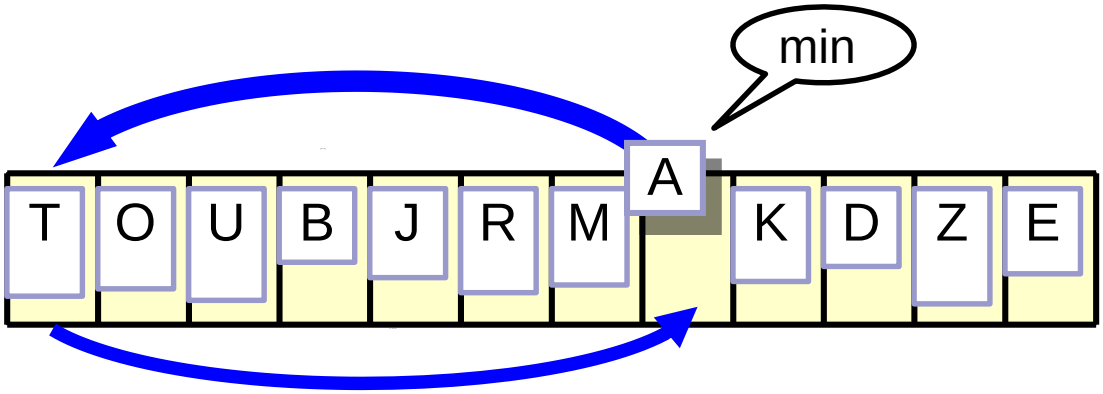
Neseřazeno

Seřazeno

Start

T	O	U	B	J	R	M	A	K	D	Z	E

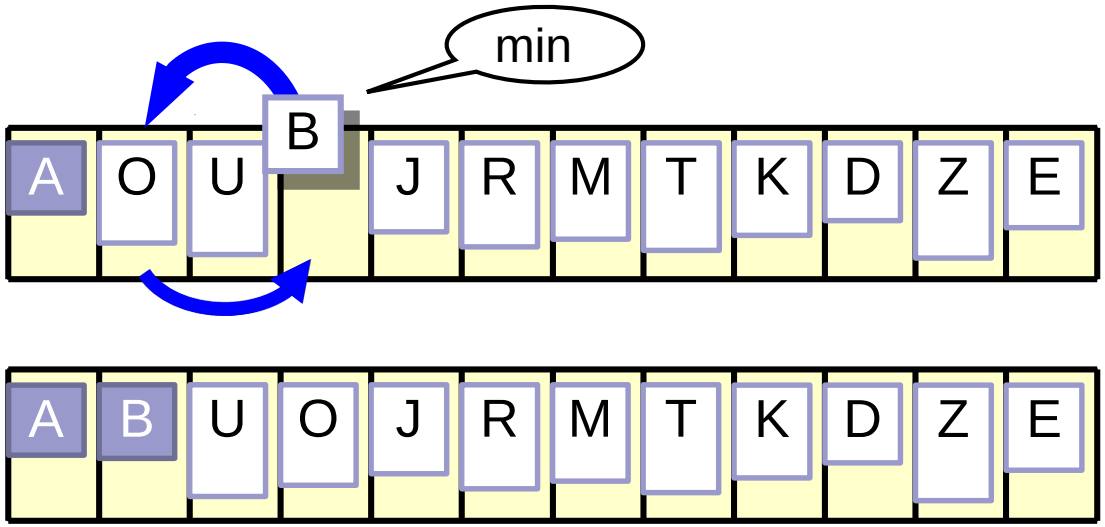
Krok1



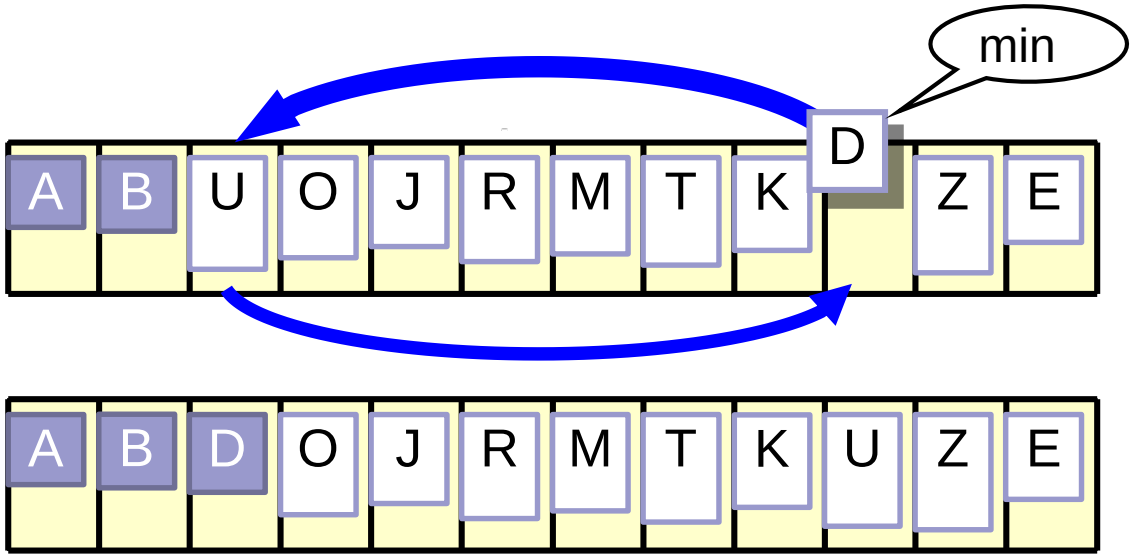
A	O	U	B	J	R	M	T	K	D	Z	E

Selection sort

Krok 2



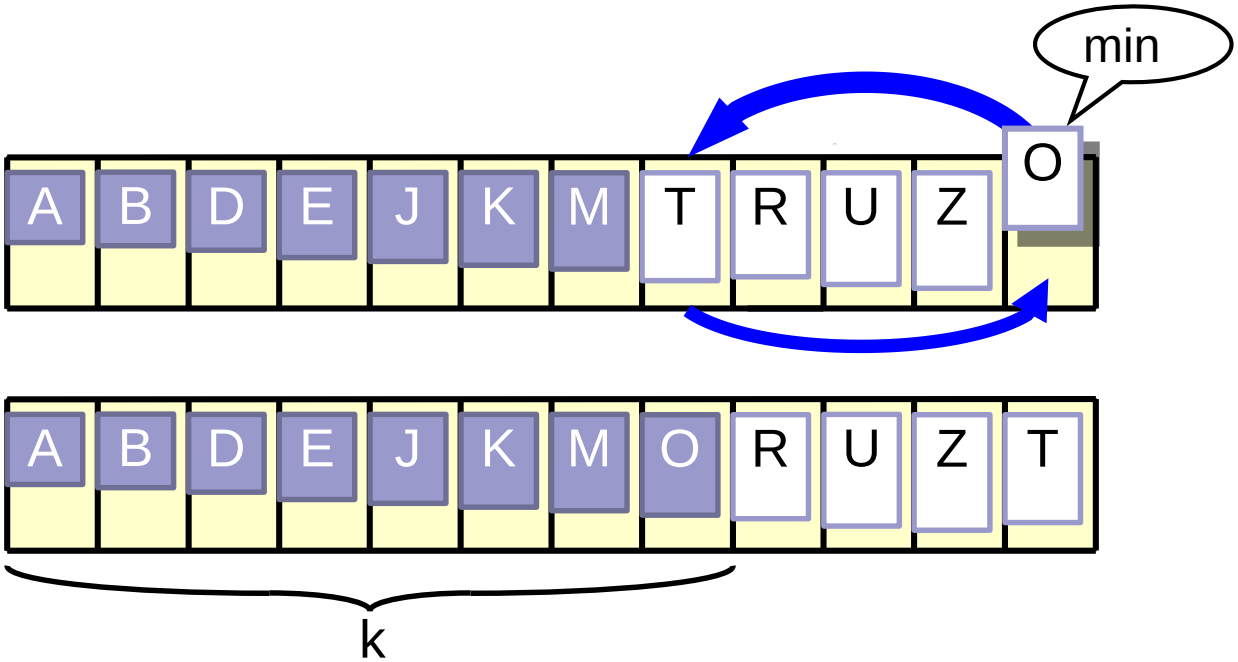
Krok 3



Selection sort

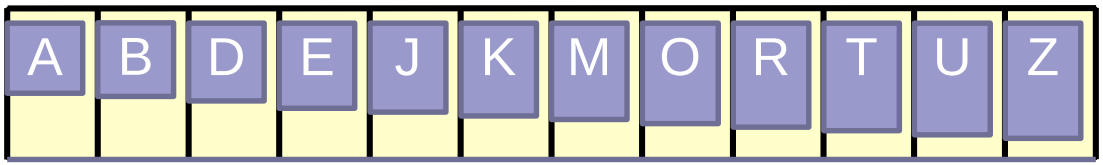
. . .

Krok k



. . .

Seřazeno

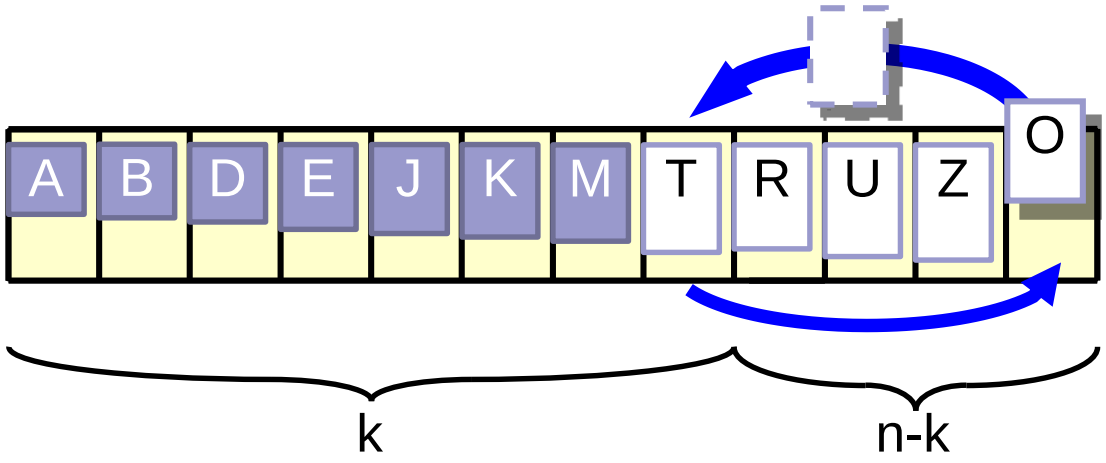


Selection sort

```
for (i = 0; i < n-1; i++) {
                                    // select min
   jmin = i;
   for (j = i+1; j < n; j++)
      if (a[j] < a[jmin])
         jmin = j;
                                    // put min
   min = a[jmin];
   a[jmin] = a[i];
   a[i] = min;
}
```

Selection sort

Krok k



přesuny … 3, počet testů (porovnání) … n-k

Celkem přesunů

$$\sum_{k=1}^{n-1} 3 = 3(n-1)$$

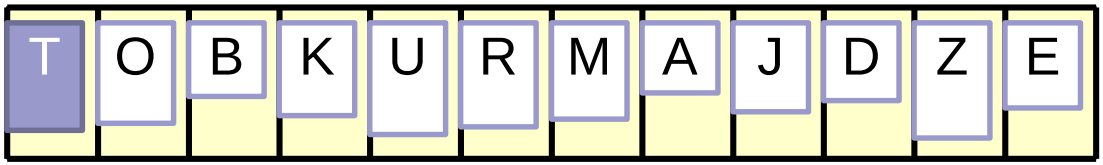
Celkem testů

$$\sum_{k=1}^{n-1} (n-k) = \frac{1}{2}(n^2 - n)$$

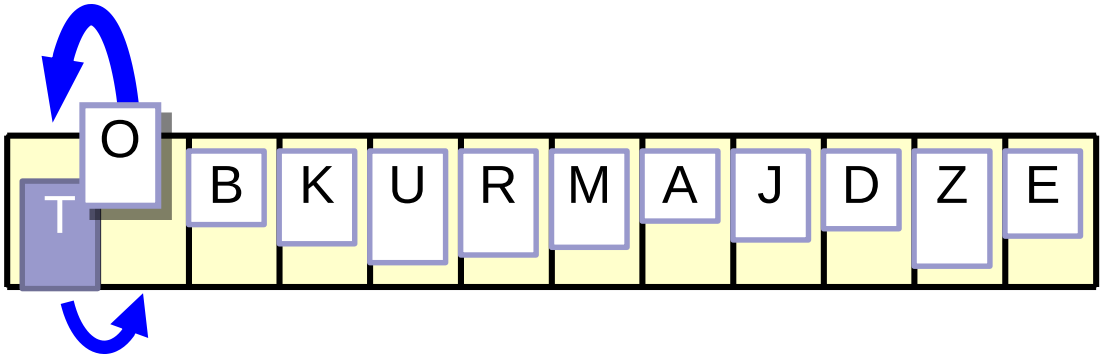
Asymptotická složitost Selection sortu je $\Theta(n^2)$.

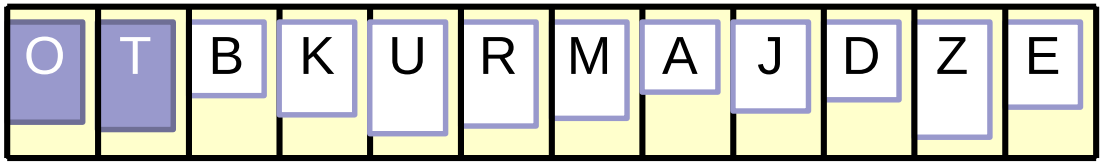
Insertion sort (řazení vkládáním)

Start



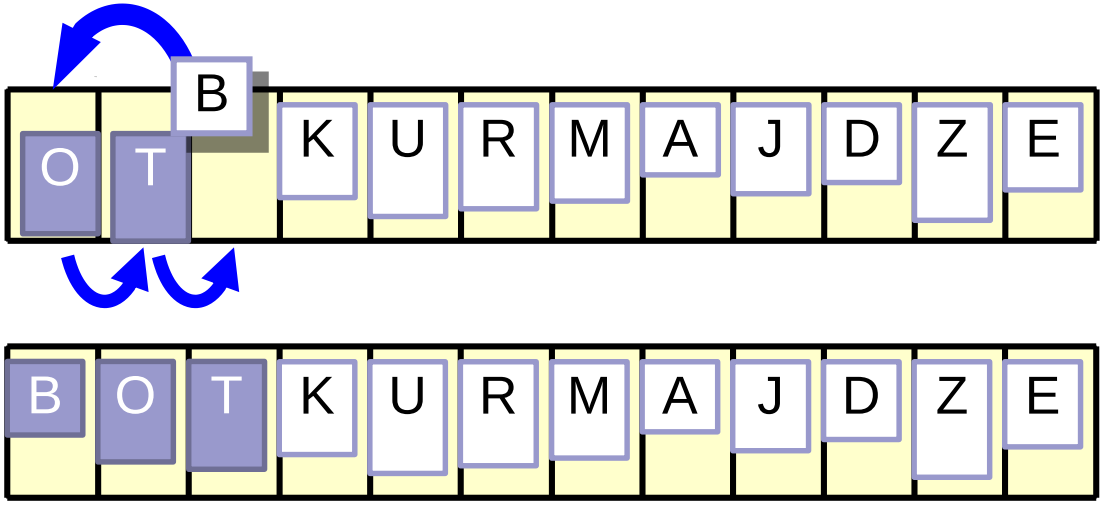
Krok1



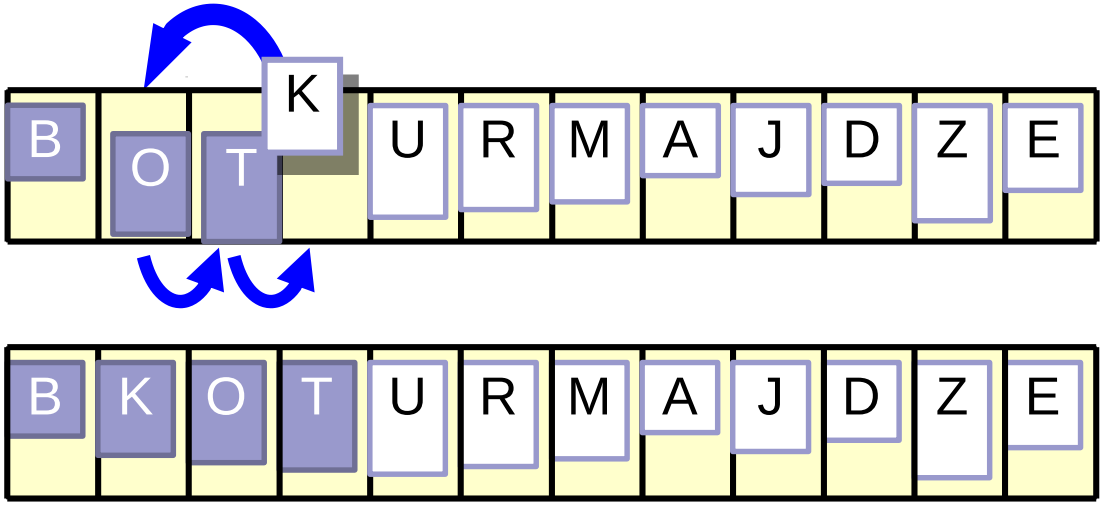


Insertion sort

Krok 2



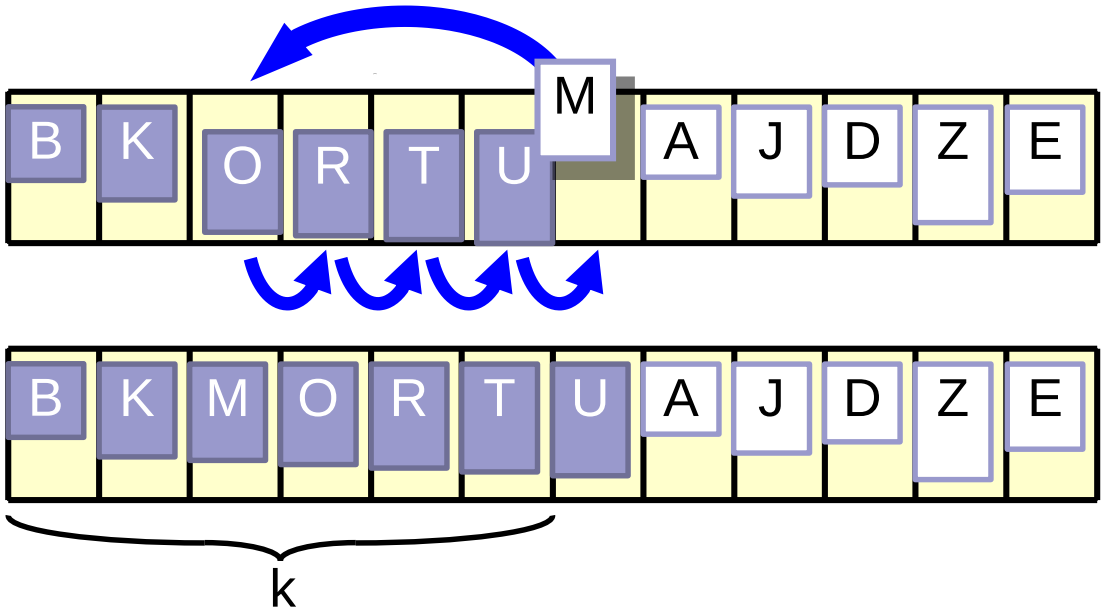
Krok 3



Insertion sort

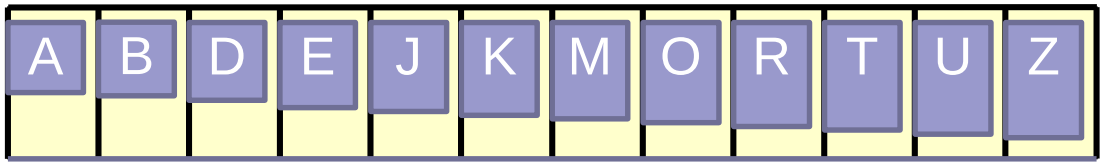
. . .

Krok k



. . .

Seřazeno

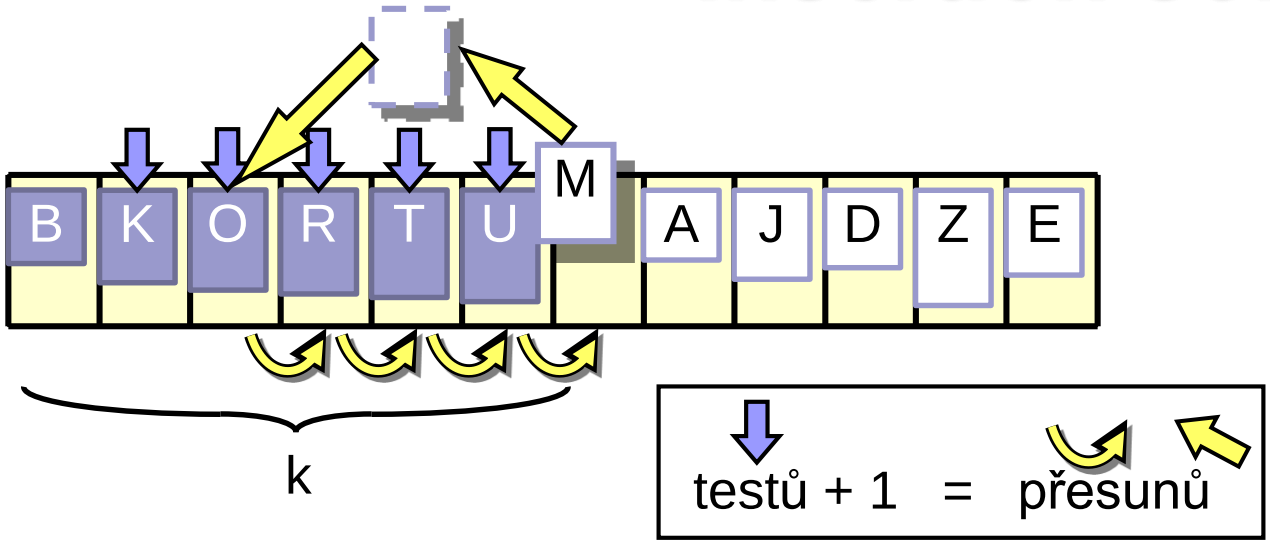


Insertion sort

```
for (i = 1; i < n; i++) {
                                // find & make
                                // place for a[i]
   insVal = a[i];
   j = i-1;
   while ((j >= 0) && (a[j] > insVal)) {
      a[j+1] = a[j];
      j--;
   }
                                // insert a[i]
   a[j+1] = insVal;
}
```

Insertion sort

Krok k



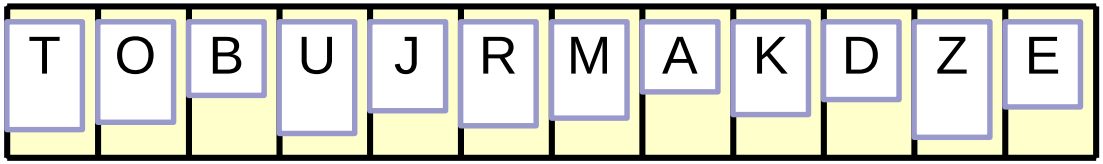
testů … 1 (nejlepší případ) až k (nejhorší případ), v průměru (k+1)/2
přesunů … 2 (nejlepší případ) až k+1 (nejhorší případ), v průměru (k+3)/2

	Celkem testů	**Celkem přesunů**
nejlepší případ:	$n-1 \in \Theta(n)$	$2n-2 \in \Theta(n)$
nejhorší případ:	$(n^2-n)/2 \in \Theta(n^2)$	$(n^2+n-2)/2 \in \Theta(n^2)$

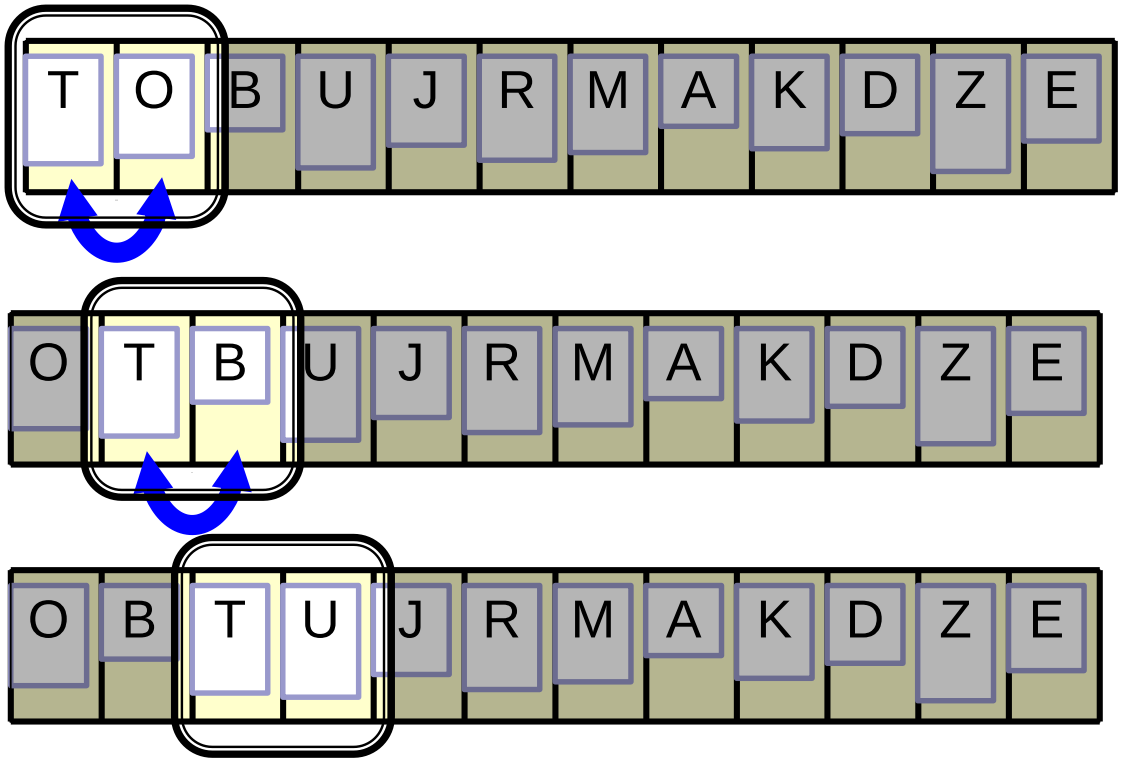
Asymptotická složitost Insertion Sortu je $O(n^2)$.

Bubble sort (řazení záměnou)

Start

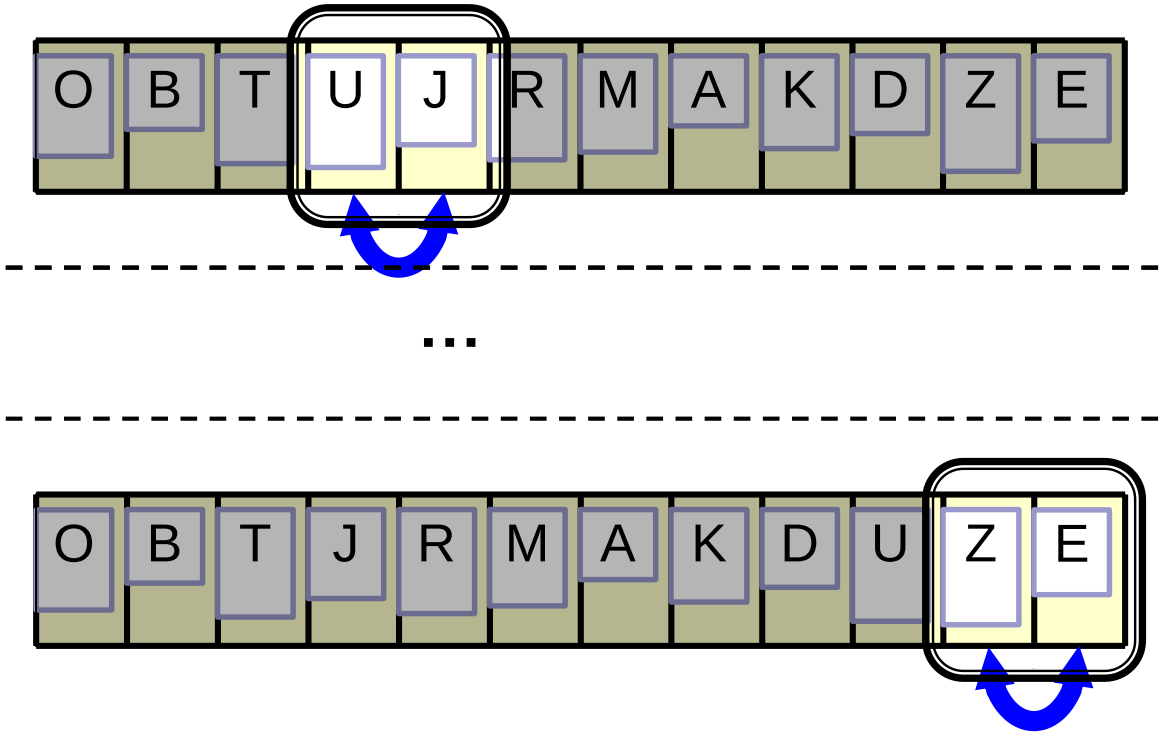


Fáze 1

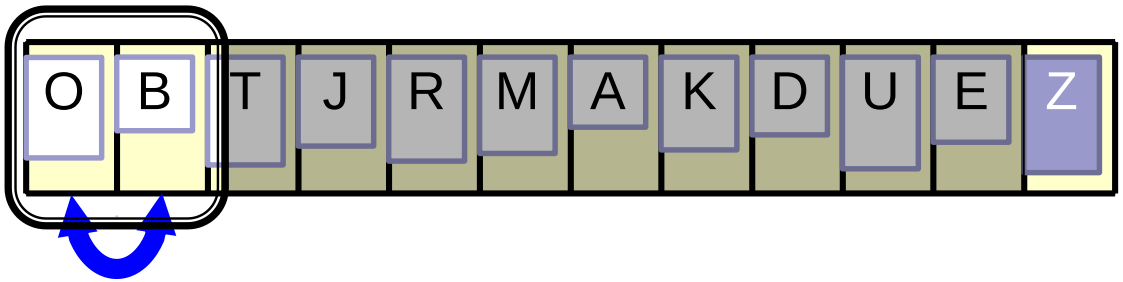


Bubble sort

Fáze 1

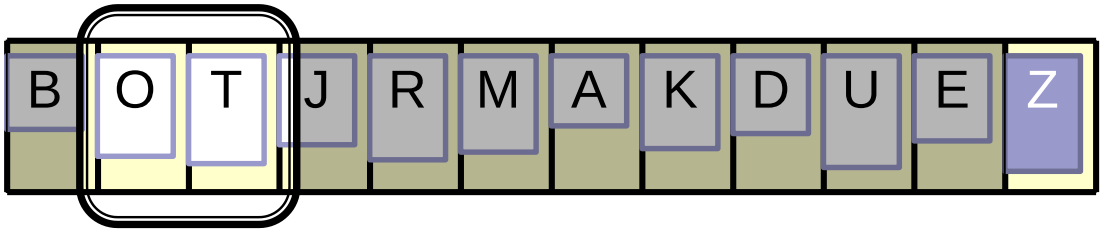


Fáze 2

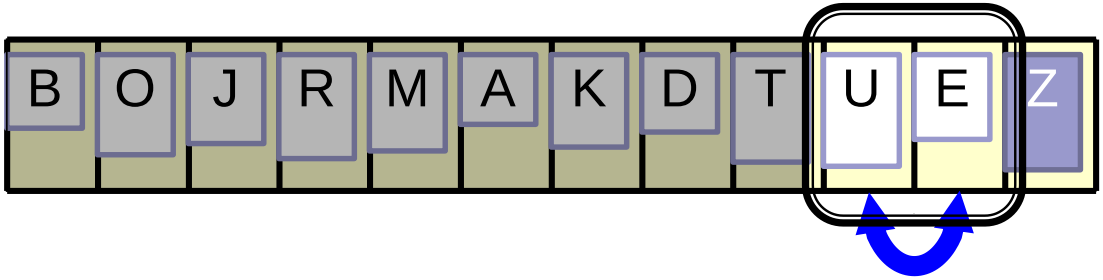


Bubble sort

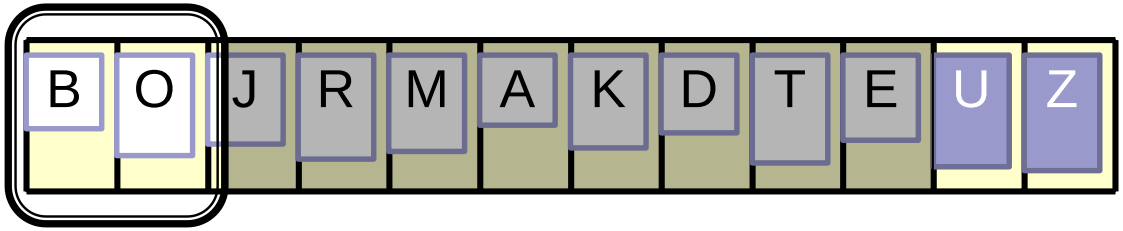
Fáze 2



...



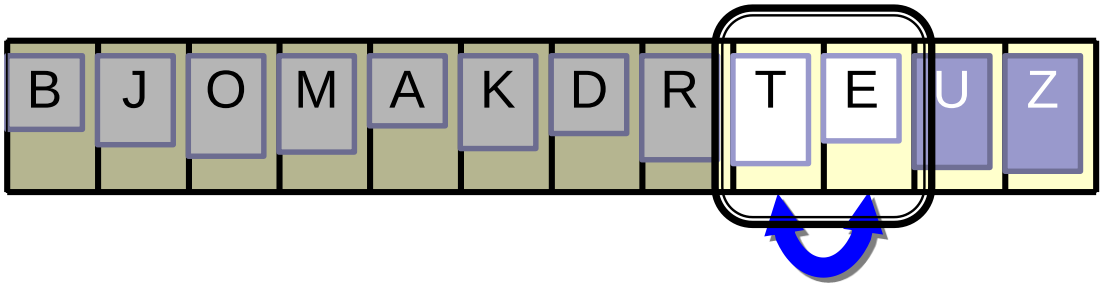
Fáze 3



Bubble sort

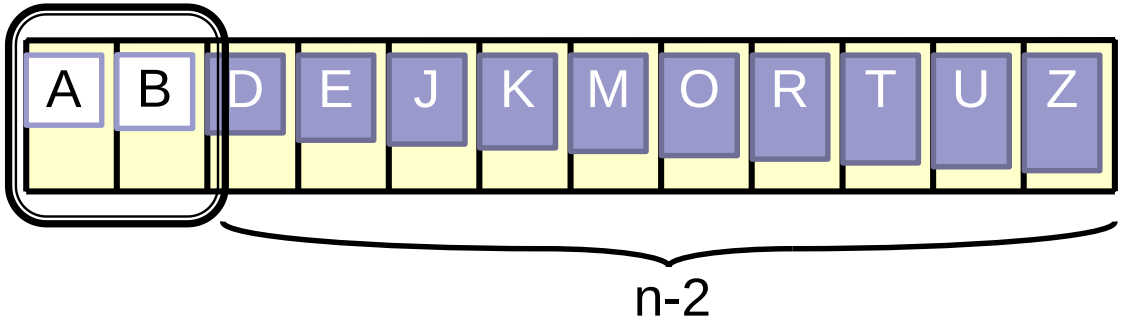
Fáze 3

...

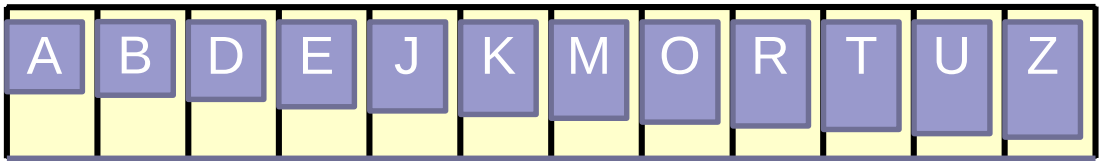


. . .

Fáze n-1



Seřazeno



Bubble sort

```
for (lastPos = n-1; lastPos > 0; lastPos--)
  for (j = 0; j < lastPos; j++)
    if (a[j] > a[j+1]) swap(a, j, j+1);
```

Celkem testů

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k) = \frac{1}{2}(n^2 - n) \in \Theta(n^2)$$

Celkem přesunů

$0 \in \Theta(1)$	nejlepší případ
$\frac{1}{4}(n^2 - n) \in \Theta(n^2)$	průměrný případ
$\frac{1}{2}(n^2 - n) \in \Theta(n^2)$	nejhorší případ

Asymptotická složitost Bubble sortu je $\Theta(n^2)$.

Kontrolní otázka

Na low-level hardware chceme vzestupně seřadit 25 náhodně vygenerovaných čísel uložených v paměti. Všechny základní operace v registrech (porovnání, inkrementace, čtení čísla z paměti) se vykonají za 1 μs, s výjimkou zápisu čísla do paměti, které se vykoná za 500 μs.

Který z níže uvedených algoritmů je pro tuto úlohu nejvýhodnější?

A. Selection sort

B. Insertion sort

C. Bubble sort

D. vyjde to zhruba nastejno

slido

Na low-level hardware chceme vzestupně seřadit 25 náhodně vygenerovaných čísel uložených v paměti. Všechny základní operace v registrech se vykonají za 1 us, s výjimkou zápisu

Start presenting to display the poll results on this slide.

Porovnání algoritmů

Selection sort

- Lineární počet přesunů (zápisů do paměti).

Insertion sort

- Velmi rychlý pro téměř uspořádané vstupy.

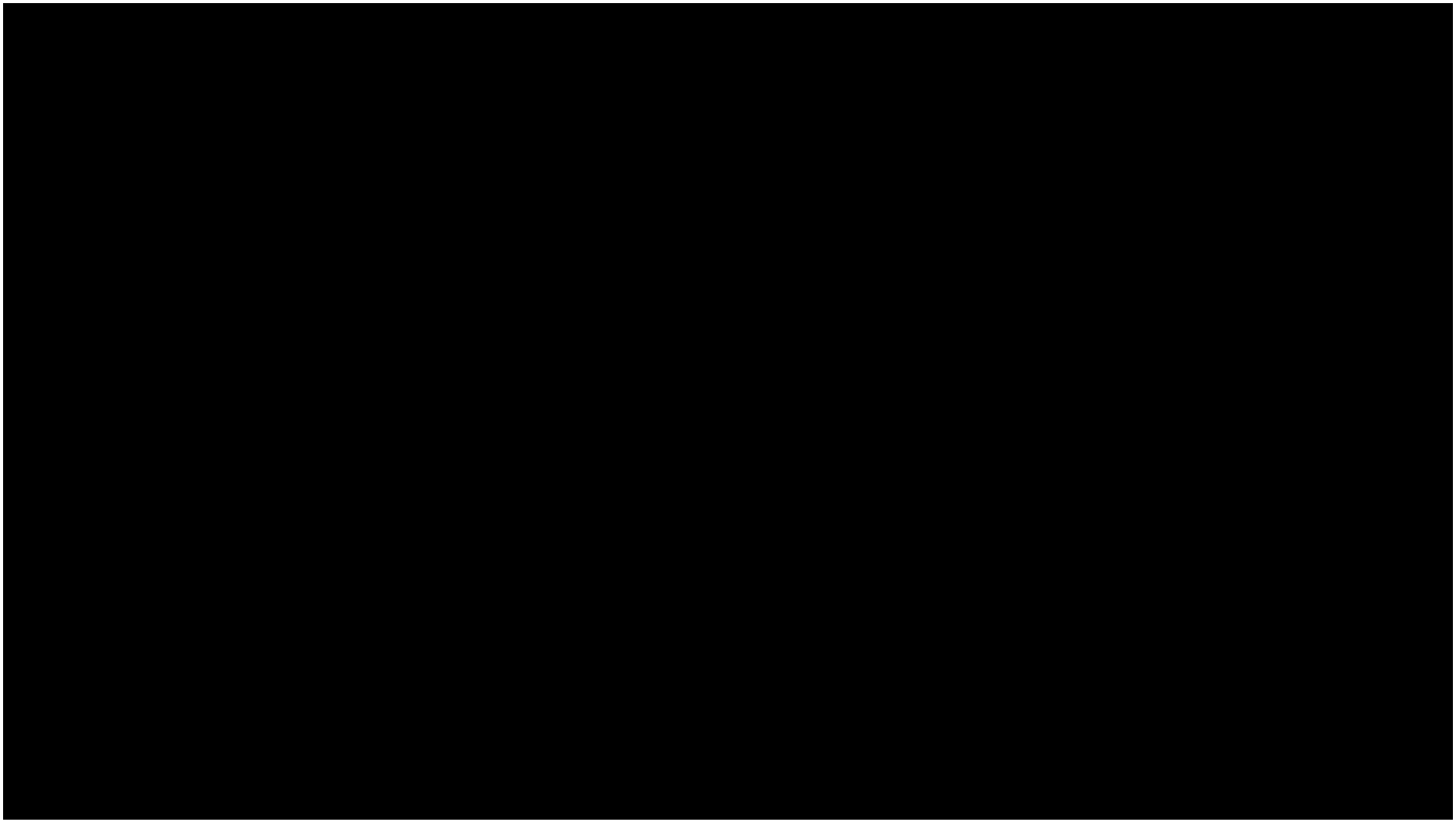
Bubble sort

- Nejkratší kód.

Obecně se tyto algoritmy snadno implementují a lze je použít pro „malá“ data.

Jejich časová složitost je však v průměrném případě kvadratická.

Insertion sort vs. Bubble sort



https://youtu.be/TZRWRjq2CAg

slido

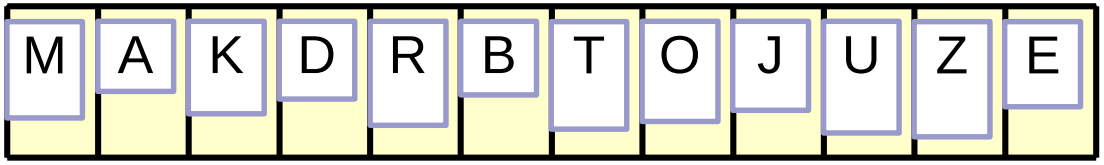
Audience Q&A Session

ⓘ Start presenting to display the audience questions on this slide.

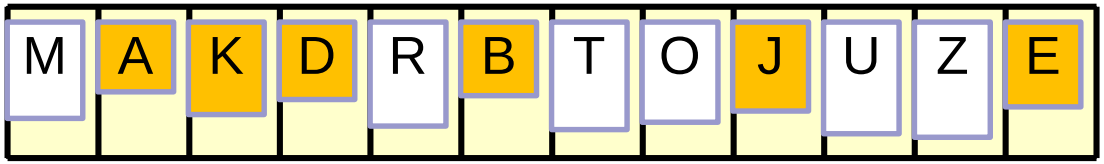
Quicksort

- Hoare (1962), technika rozděl a panuj

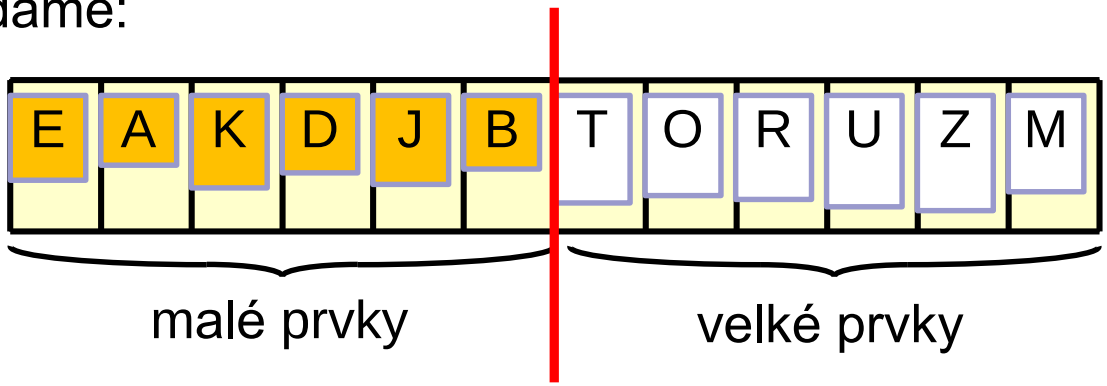
Start



Vstupní pole rozdělíme na „malé“ a „velké“ prvky



a přeuspořádáme:



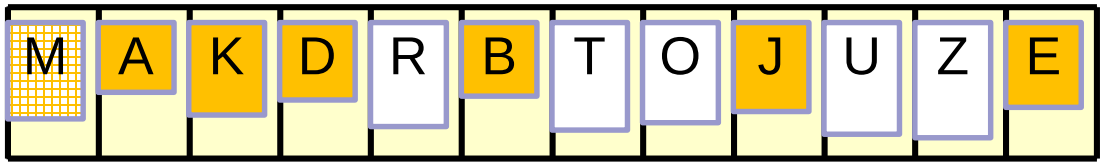
Úlohu tak rozdělíme na 2 části, které řešíme rekurzivně.

Quicksort

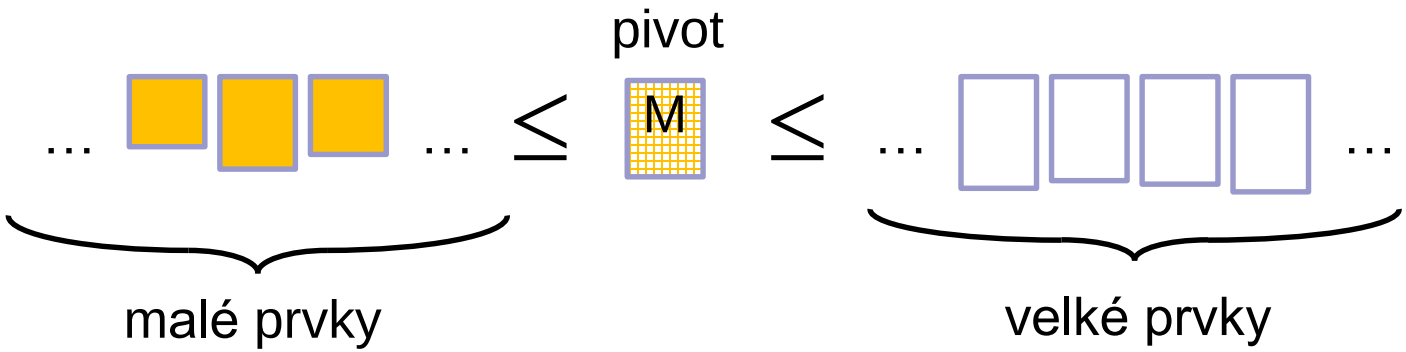
- Podle čeho určíme malé a velké hodnoty?

  ⇒ Podle libovolně zvoleného prvku (tzv. pivot).

Nechť je pivot například první prvek v poli.



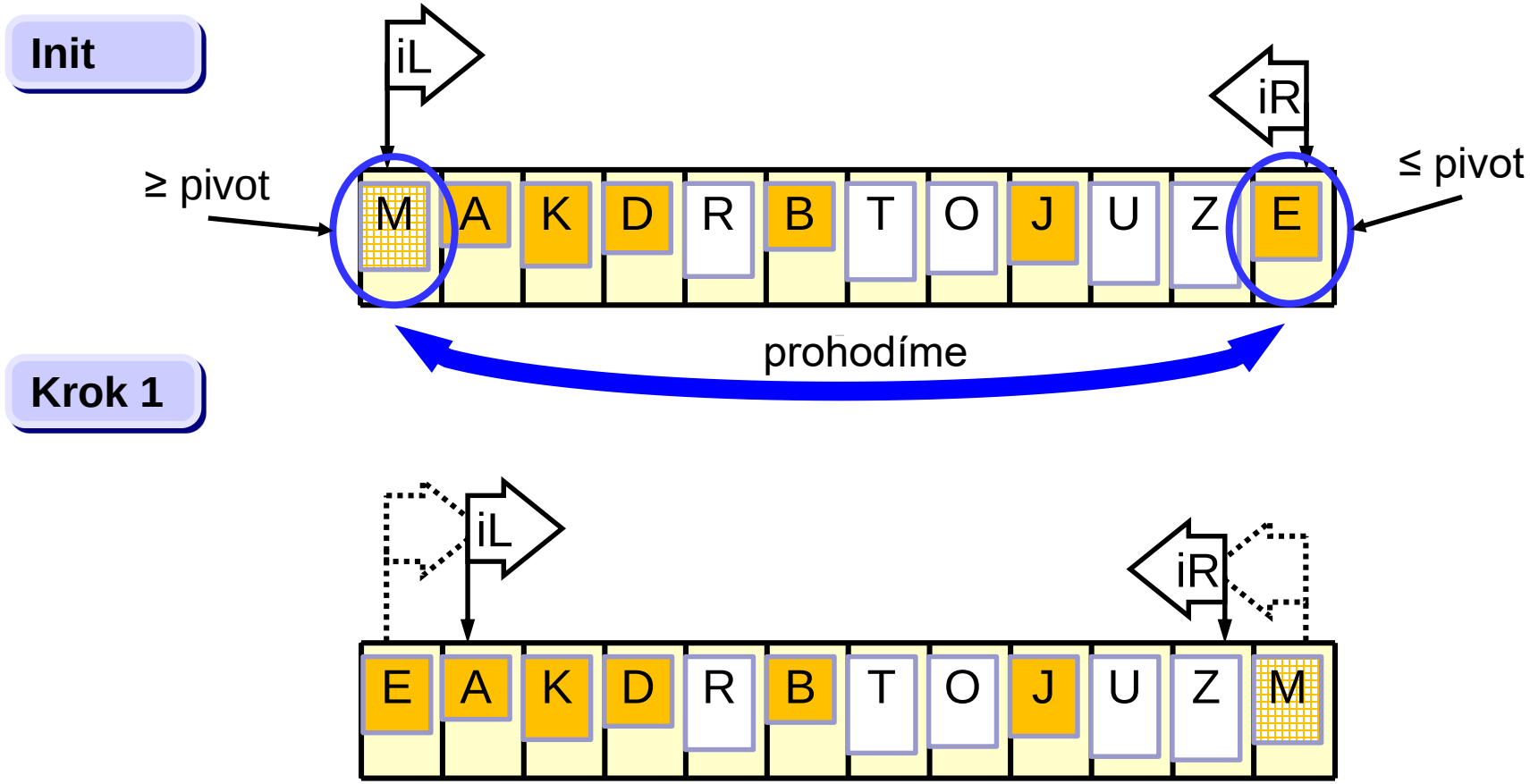
Cíl dělení



- Další možné strategie pro volbu pivota:
  - Náhodný prvek
  - Medián ze tří prvků

Quicksort

- Jak prvky efektivně přeuspořádáme podle pivotu?

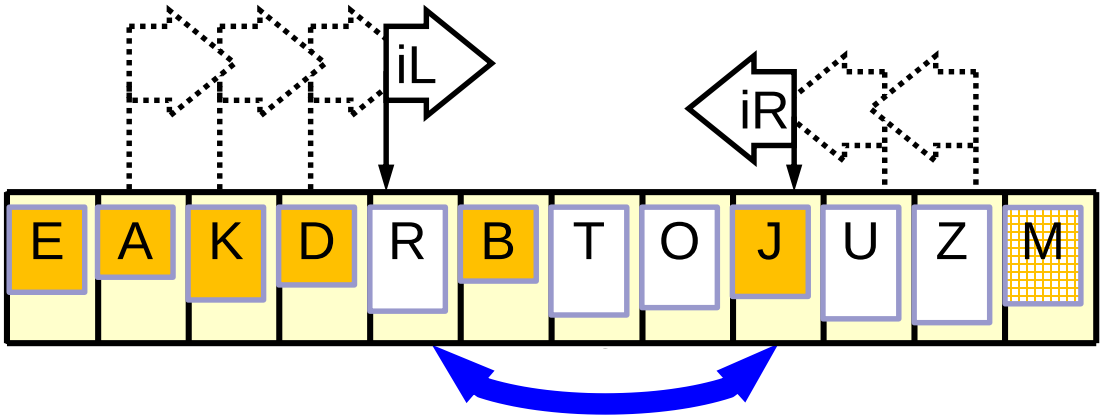


Po prohození prvků ukazatele posuneme směrem k sobě.

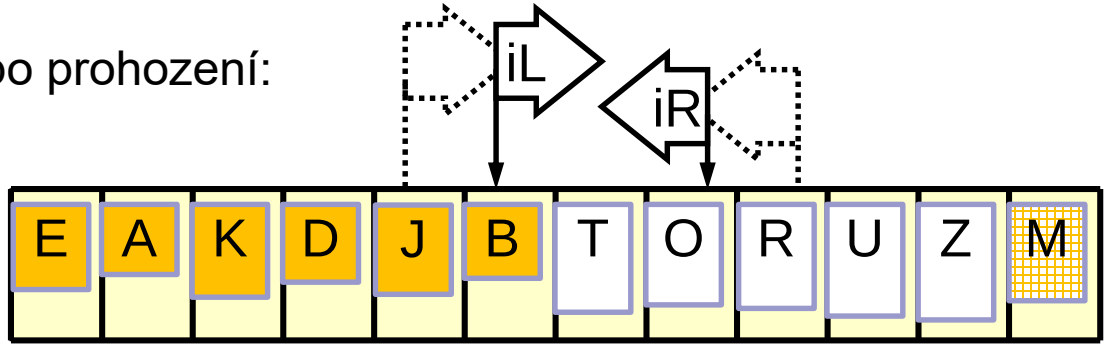
Quicksort

Krok 2

Hledáme další dvojici prvků k prohození.

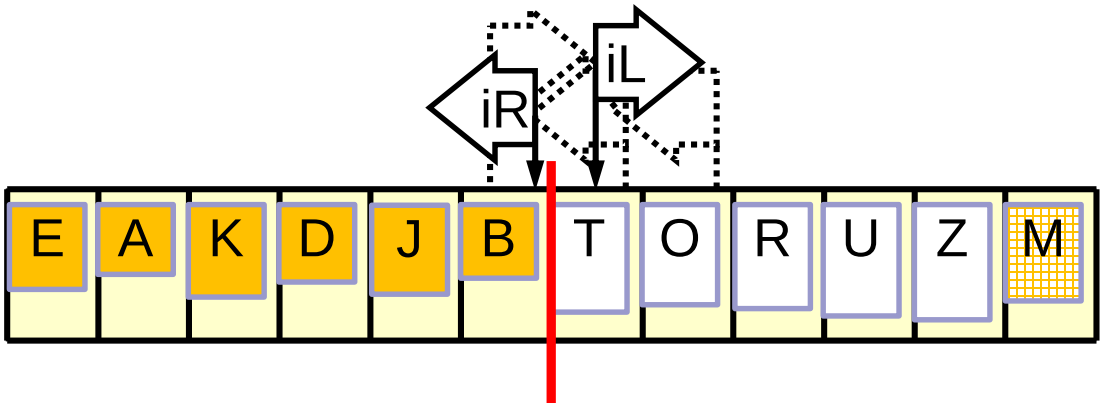


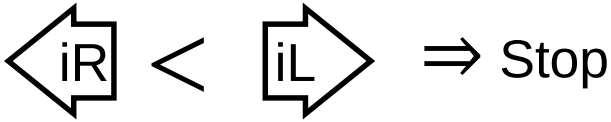
Posun ukazatelů po prohození:



Quicksort

Krok 3

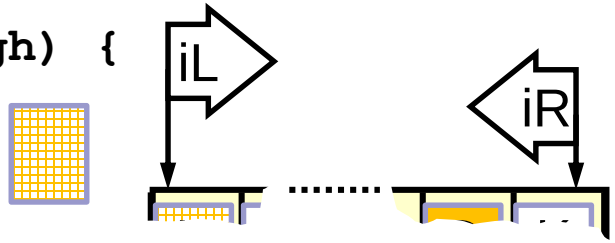


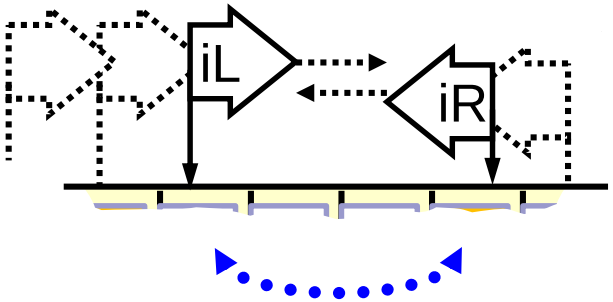


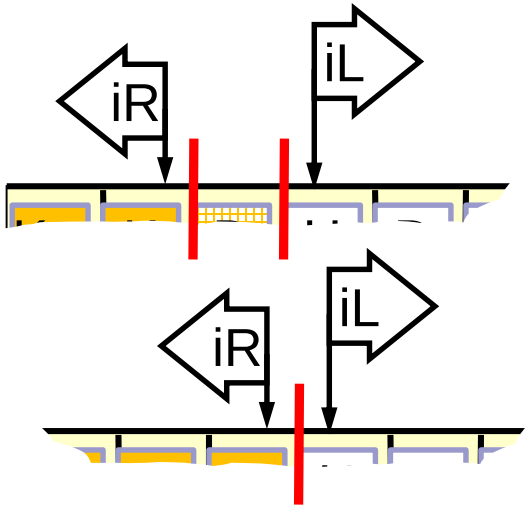
Přeuspořádáno v lineárním čase.

Quicksort

```
void qSort(Item a[], int low, int high) {
  int iL = low, iR = high;
  Item pivot = a[low];

  do {
    while (a[iL] < pivot) iL++;
    while (a[iR] > pivot) iR--;
    if (iL < iR) {
      swap(a,iL, iR);
      iL++; iR--;
    }
    else
      if (iL == iR) { iL++; iR--;}

  } while (iL <= iR);

  if (low < iR)  qSort(a, low, iR);
  if (iL < high) qSort(a, iL, high);
}
```







Quicksort

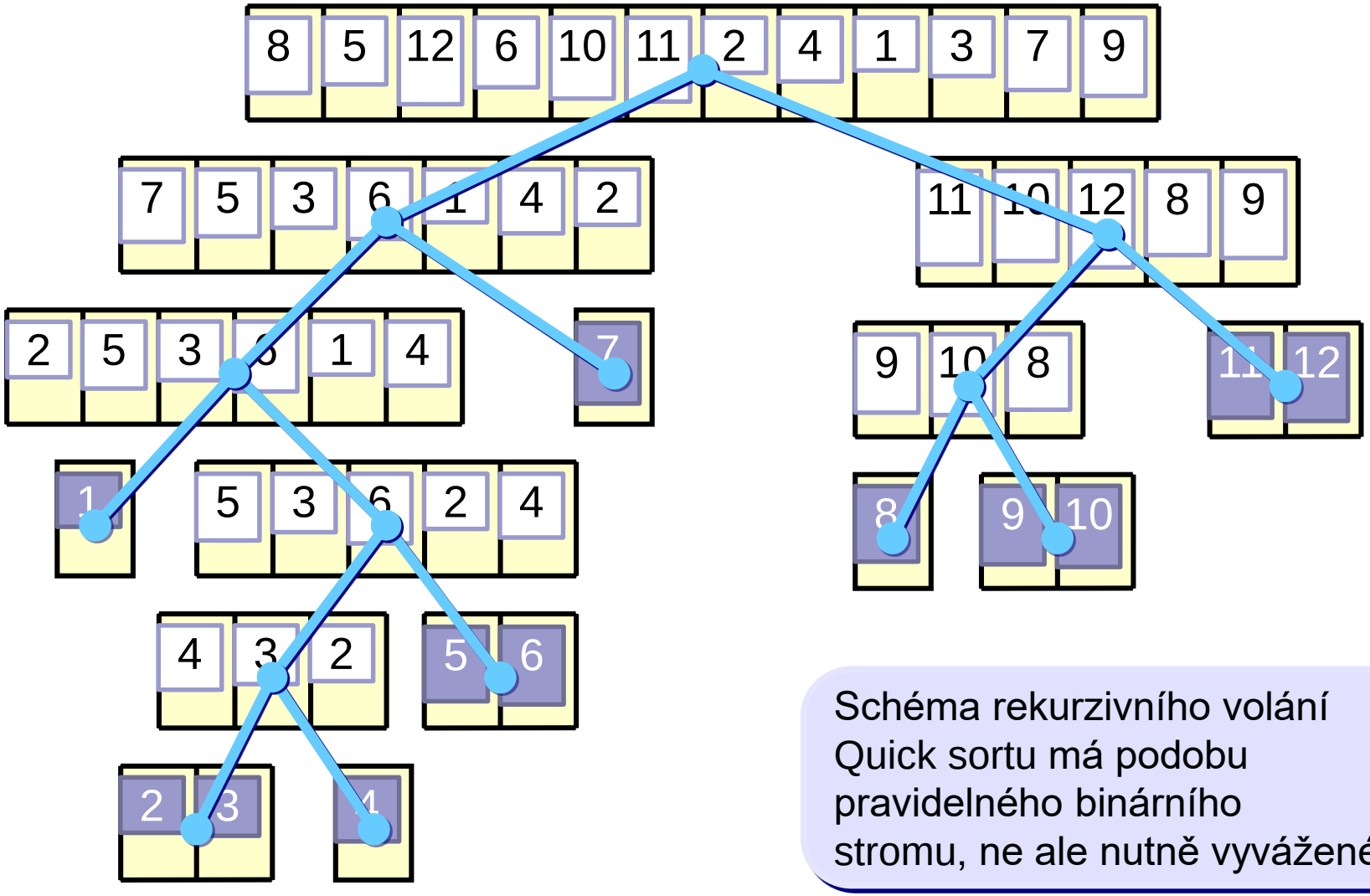


Schéma rekurzivního volání Quick sortu má podobu pravidelného binárního stromu, ne ale nutně vyváženého.

Quicksort

- Jaká je asymptotická složitost?

Celkem přesunů a testů

$\Theta(n \log n)$	nejlepší případ
$\Theta(n \log n)$	průměrný případ
$\Theta(n^2)$	nejhorší případ

Např. pokud je vstupní posloupnost již uspořádaná.

Asymptotická složitost Quicksortu je $O(n^2)$, ...

… ale! :

Očekávaná složitost Quicksortu je $\Theta(n \log n)$.

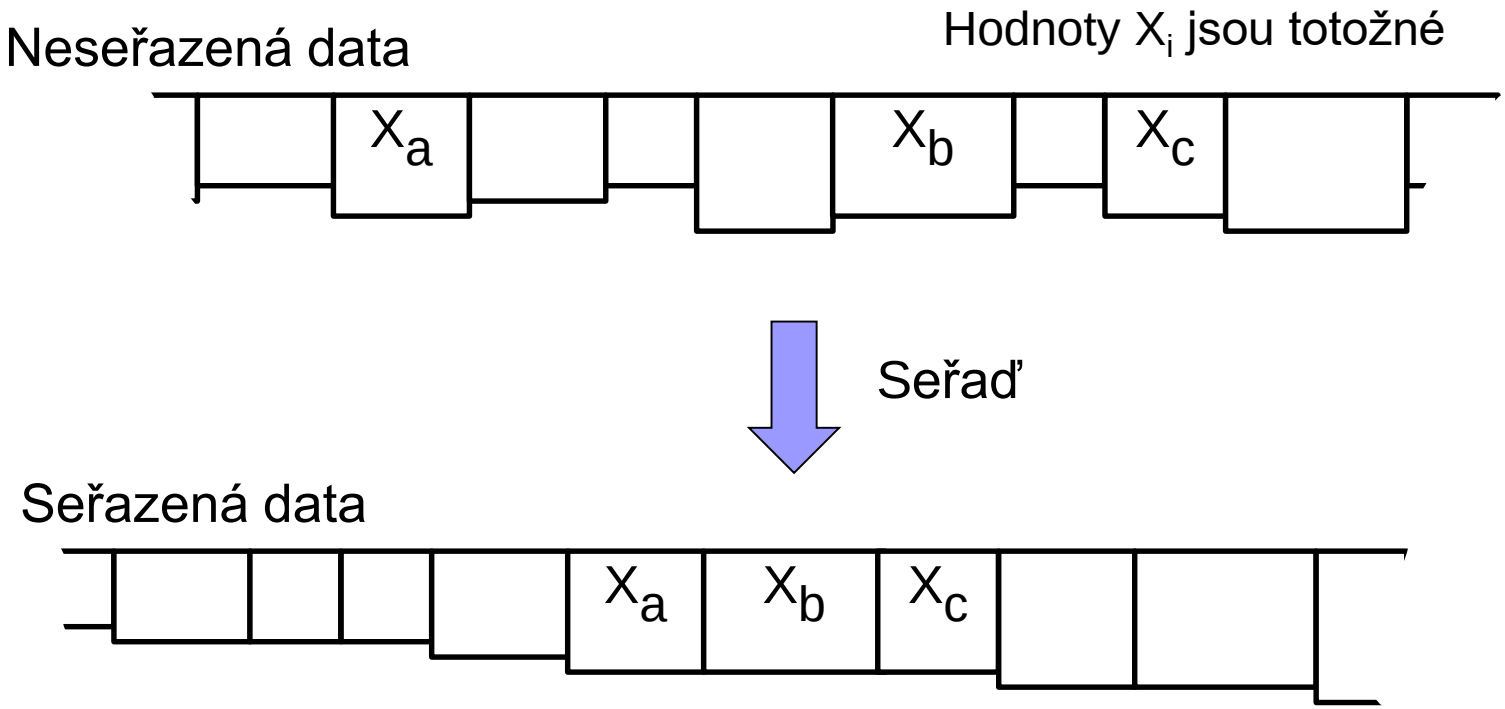
slido

Audience Q&A Session

ⓘ Start presenting to display the audience questions on this slide.

Stabilita řazení

- Řazení je **stabilní**, pokud nemění vzájemné pořadí prvků se stejnou hodnotou.



Stabilita řazení – příklad využití

Záznam:

Jméno	Příjmení

Vstup: Seznam seřazen pouze podle jména.

Andrew	Cook
Andrew	Amundsen
Andrew	Brown
Barbara	Cook
Barbara	Brown
Barbara	Amundsen
Charles	Amundsen
Charles	Cook
Charles	Brown

stabilní řazení

Seřaď záznamy pouze podle"

Příjmení

Výstup: Seznam seřazen podle jména i příjmení.

Andrew	Amundsen
Barbara	Amundsen
Charles	Amundsen
Andrew	Brown
Barbara	Brown
Charles	Brown
Andrew	Cook
Barbara	Cook
Charles	Cook

Pořadí záznamů se stejným příjmením se nezměnilo

Stabilita řazení

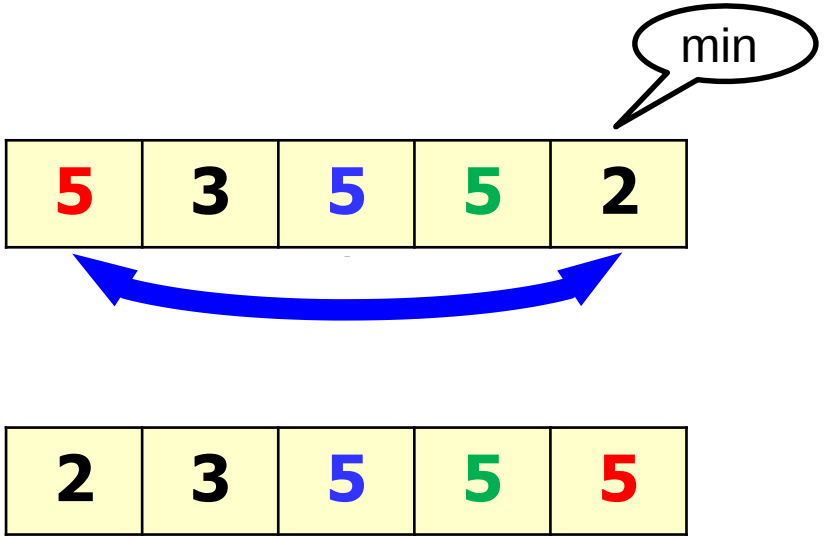
- Insertion sort ✓
- Bubble sort ✓

Prohazují se jen sousední prvky, stabilitu lze zajistit.

- Selection sort ✗
- Quicksort ✗

Při prohazování vzdálených prvků se nekontroluje, co je mezi nimi.

Příklad (Selection sort):



slido

Audience Q&A Session

ⓘ Start presenting to display the audience questions on this slide.