Algoritmizace

Marko Genyk-Berezovskyj, Daniel Průša

2010 – 2022

Dnešní témata

- Vyhledávání v uspořádaném poli
- Binární vyhledávací stromy
- Pátá domácí úloha

slido

Join at slido.com
#429042

ⓘ Start presenting to display the joining instructions on this slide.

slido

Sledujete přednášky z Algoritmizace přes stream?

ⓘ Start presenting to display the poll results on this slide.

Vyhledávání v seřazeném poli

Seřazené pole: → velikost = N

363	369	388	603	638	693	803	833	836	839	860	863	938	939	966	968	983	993

- Lineární (sekvenční) vyhledávání je pomalé.

Testů (porovnání hodnot) je 1 (najdi 363) až N (najdi 993),

v průměrném případě $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} i = \frac{N+1}{2}$ (předpoklad: hledaná hodnota je v poli)

363	369	388	603	638	693	803	833	836	839	860	863	938	939	966	968	983	993

Binární vyhledávání

- Též známé jako vyhledávání půlením intervalu.

Najdi 863

2 testy (=,>)

363	369	388	603	638	693	803	833	836	839	860	863	938	939	966	968	983	993
363	369	388	603	638	693	803	833		839	860	863	938	939	966	968	983	993

2 testy (=,>)

839	860	863	938	939	966	968	983	993
839	860	863	938		966	968	983	993

Rozděl a panuj

$$T(1) = \Theta(1)$$

$$T(N) = T\left(\frac{N}{2}\right) + \Theta(1), N > 1$$

$$\Rightarrow T(N) \in \Theta(\log N)$$

podle mistrovské věty

2 testy (=,>)

839	860	863	938
839		863	938

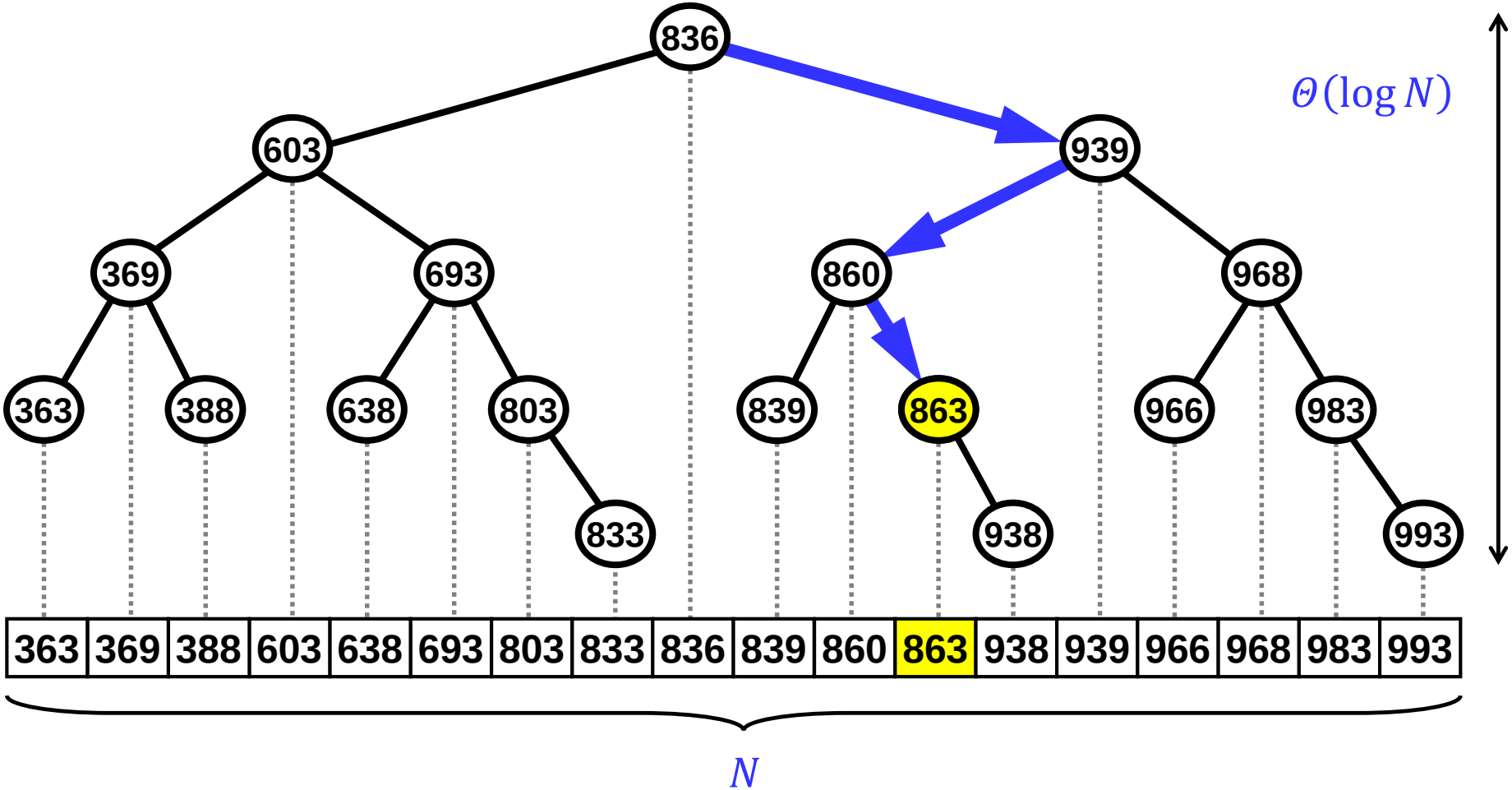
1 test (=)

863	938

Binární vyhledávání

Najdi 863

Hledání kopíruje strukturu vyváženého binárního stromu



Binární vyhledávání – vylepšení

Najdi 863

1 test (je hledaná hodnota větší než 836?)

~~363~~	~~369~~	~~388~~	~~[illegible]~~	~~[illegible]~~	~~[illegible]~~	~~[illegible]~~	~~833~~	~~836~~	839	860	863	938	939	966	968	983	993

1 test (>)

839	860	863	938	939	~~966~~	~~968~~	~~983~~	~~993~~

1 test (>)

839	860	863	~~938~~	~~939~~

1 test (>)

~~839~~	~~860~~	863

863

1 test (poslední prvek testujeme na rovnost s hledanou hodnotou)

- Typicky (v průměrném případě) je hledaná hodnota blízko listu ve stromu vyhledávání.
- Je zbytečné během sestupu stromem testovat, zda byla již hledaná hodnota nalezena.
- Nejprve se najde místo, kde přesně má být a teprve pak se kontroluje, zda tam opravdu je.

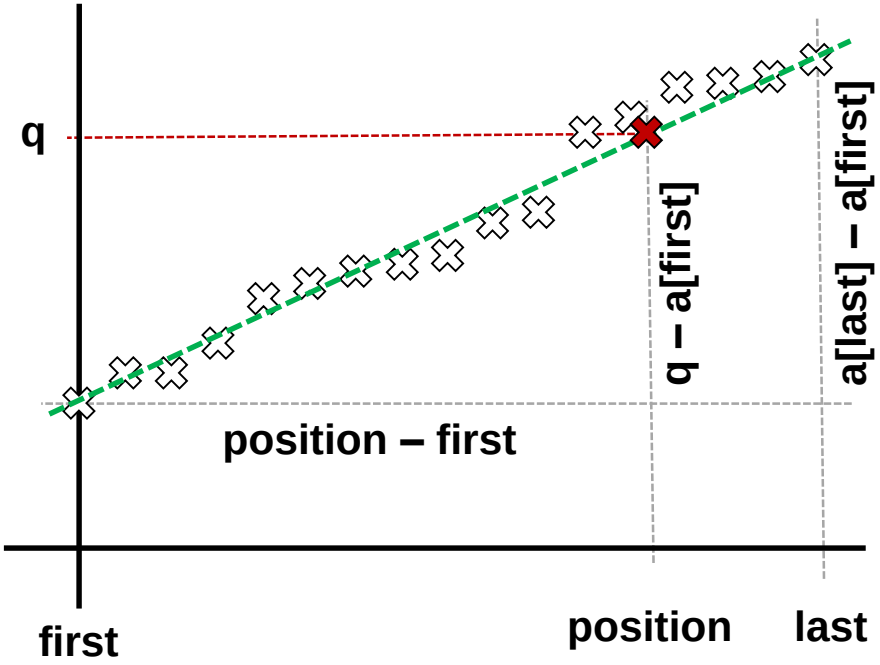
Binární vyhledávání

```
int binarySearch(int[] arr, int val) {
    int low = 0, high = arr.length - 1, mid;
    while (low < high) {
        mid = low + (high - low) / 2; // better than
        if (val > arr[mid])           // mid = (low+high)/2;
            low = mid + 1;
        else
            high = mid;
    }
    if (arr[low] == val)
        return low;
    else
        return -1;
}
```

Interpolační vyhledávání

Pole **a[ ]** Najdi **q = 939**

363	369	388	603	638	693	803	833	836	839	860	863	938	939	966	968	983	993
0 first	1	2											13		15 position		17 last



Jsou-li hodnoty v poli víceméně rovnoměrně rozložené, je možno použít lineární interpolaci pro odhad hledané pozice.

$$\frac{q - a[first]}{position - first} = \frac{a[last] - a[first]}{last - first}$$

$$position = first + \frac{q - a[first]}{a[last] - a[first]} * (last - first)$$

Interpolační vyhledávání

Najdi 939

363	369	388	603	638	693	803	833	836	839	860	863	938	939	966	968	983	993
0 first	1	2											13		15 position		17 last

Když se na vypočtené pozici prvek nenalézá, je buď vlevo nebo vpravo od ní a pak lze (rekurzivně) vzít za výchozí interval příslušnou levou nebo pravou část pole a výpočet opakovat.

363	369	388	603	638	693	803	833	836	839	860	863	938	939	966	~~968~~	~~983~~	~~993~~
0 first	1	2											13 position	14 last			17

- Časová složitost pro rovnoměrně rozložená data: $O(\log \log N)$

Interpolační vyhledávání

- Nejhorší případ – lineární složitost

Najdi 17

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	999
0	1	2														16	17
first																	last
position																	

$$\text{position} = \text{first} + \frac{q - a[\text{first}]}{a[\text{last}] - a[\text{first}]} * (\text{last} - \text{first})$$

$$0 + \left\lfloor \frac{17-1}{999-1} \cdot (17-0) \right\rfloor = 0$$

~~1~~	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	999
0	1	2														16	17
	first																last
	position																

Jak zařídit, aby nejhorší případ měl složitost $O(\log N)$?

Interpolační vyhledávání

```
int interpolationSearch(int[] arr, int key) {
    int low = 0, high = arr.length - 1;
    while (low <= high && key >= arr[low] && key <= arr[high]) {
        if (low == high) {
            if (arr[low] == key) return low;
            return -1;
        }
        int pos = low + (key - arr[low])*(high-low) /
            (arr[high] - arr[low]);
        if (arr[pos] == key)
            return pos;
        if (arr[pos] < key)
            low = pos + 1;
        else
            high = pos - 1;
    }
    return -1;
}
```

slido

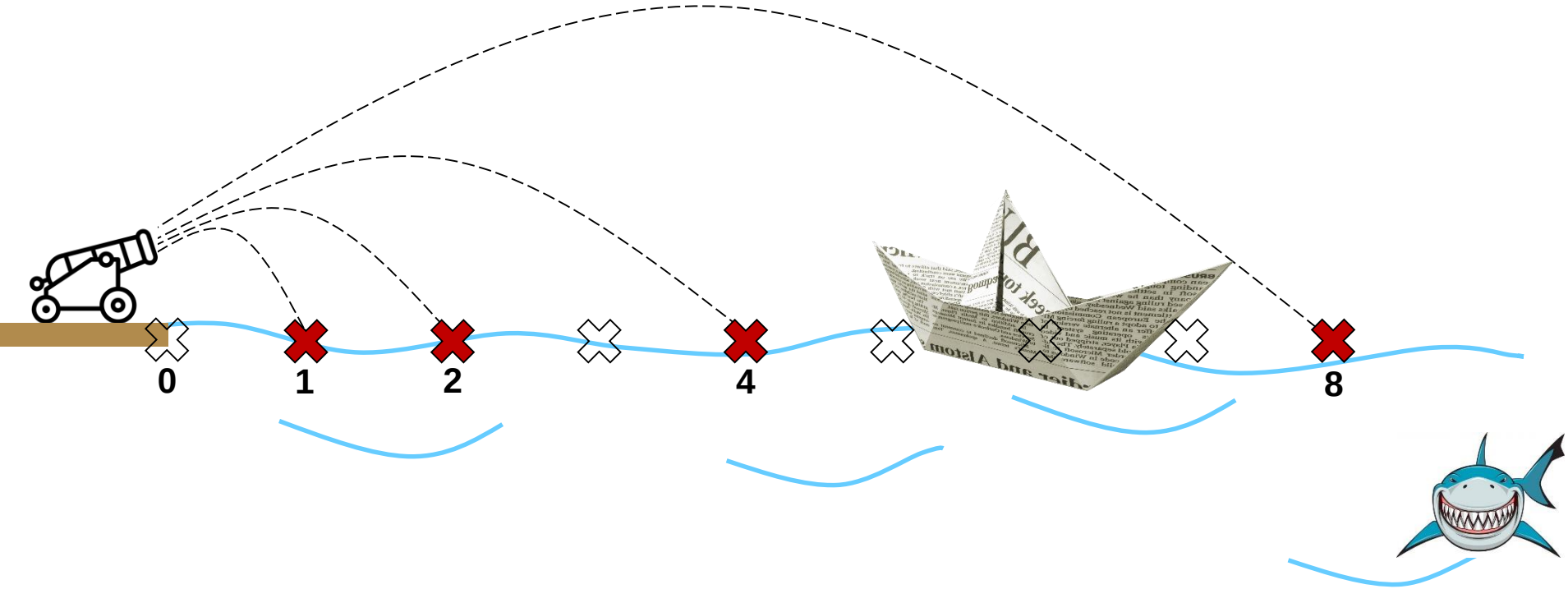
Audience Q&A Session

ⓘ Start presenting to display the audience questions on this slide.

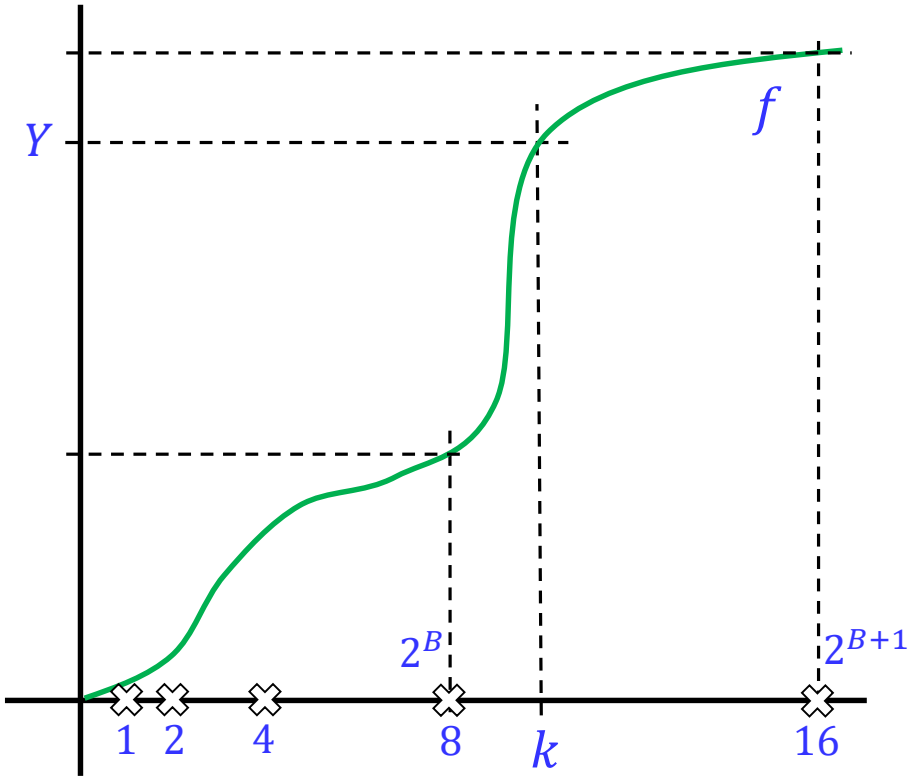
Exponenciální vyhledávání

Jak trefit loď?

- dostřel můžeme nastavit libovolně
- nevíme ale, jak je loď daleko (pro vzdálenost neexistuje ani odhad)
- po výstřelu vidíme pouze šplouchnutí před/za lodí, nebo zásah



Exponenciální vyhledávání

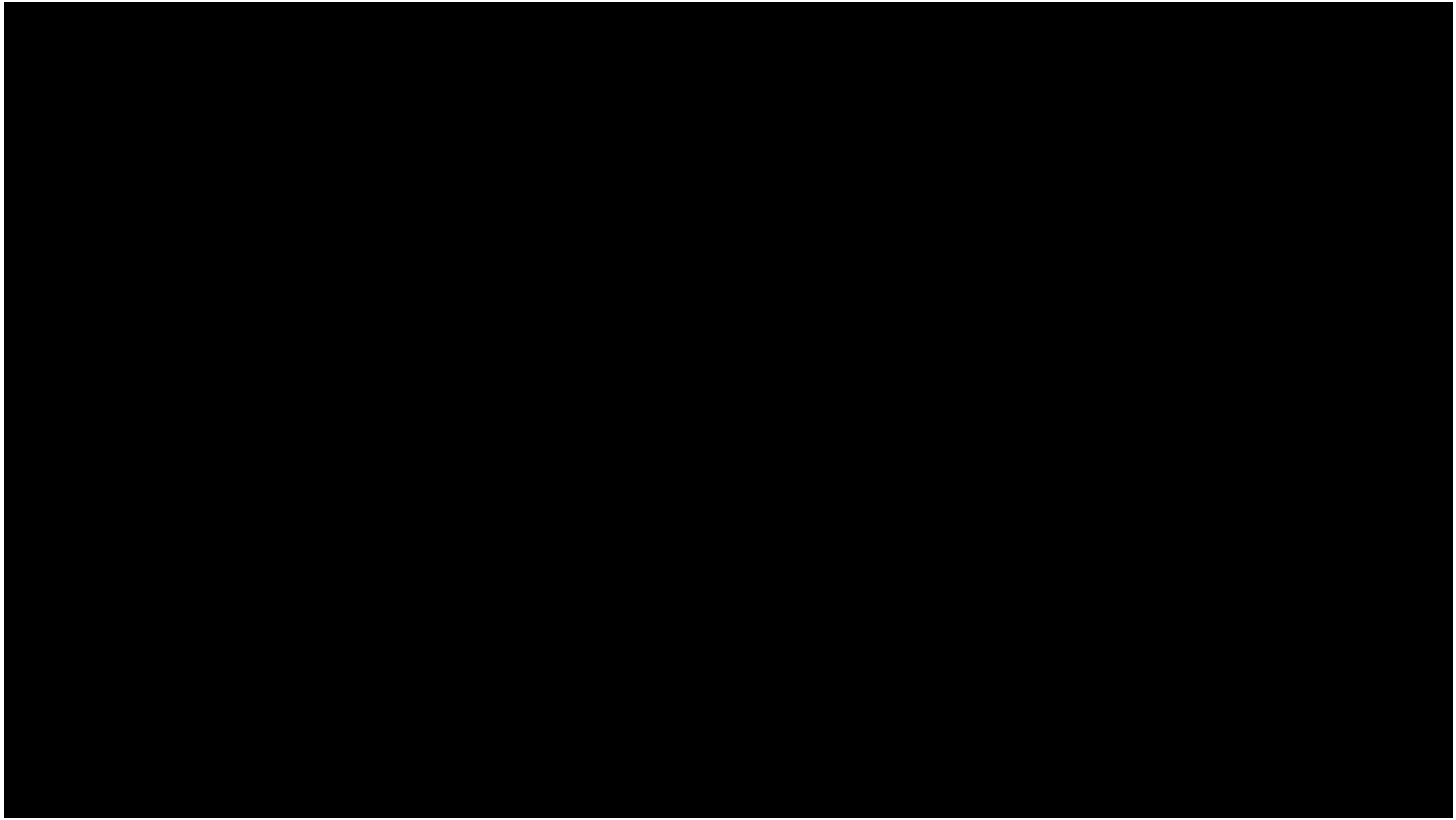


Je dána rostoucí funkce $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (např. algoritmem) a číslo $Y \in \mathbb{N}$.

Hledáme nejmenší číslo $k \in \mathbb{N}$, pro které platí $f(k) \geq Y$.

	Časová složitost:
1. Inkrementálně nalezneme B, pro které platí $f(2^B) < Y \leq f(2^{B+1})$.	$\Theta(B+1) = \Theta(\log k)$
2. Aplikujeme binární vyhledávání pro posloupnost $f(2^B), \dots, f(2^{B+1})$.	$\Theta(\log(2^{B+1} - 2^B + 1)) = \Theta(\log k)$

Vyhledejte pandu



https://www.youtube.com/watch?v=AbfdWxOSqtg

slido

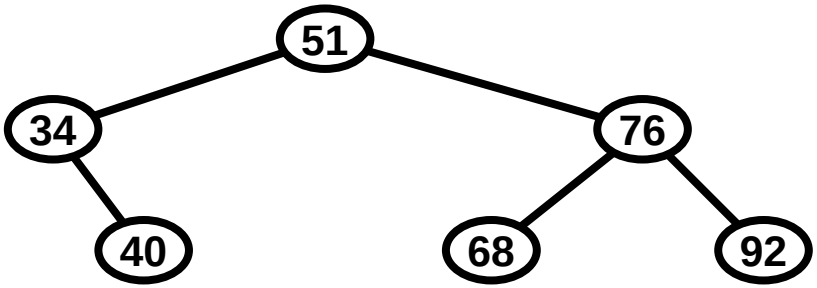
Audience Q&A Session

ⓘ Start presenting to display the audience questions on this slide.

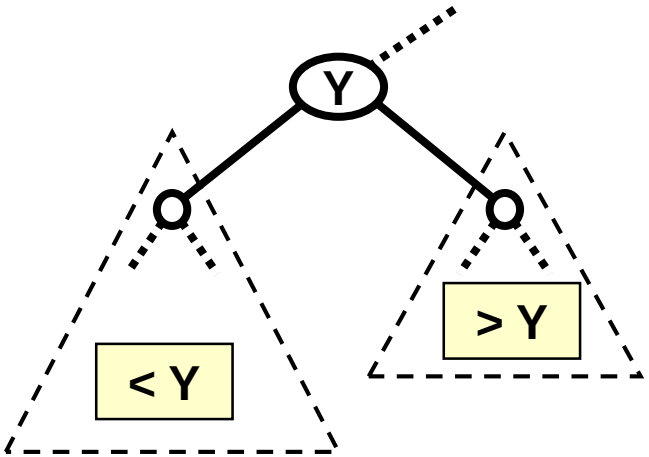
Binární vyhledávací strom (BVS)

- Binary search tree (BST).
- Datová struktura reprezentující množinu klíčů.
- Operace Find, Insert a Delete.

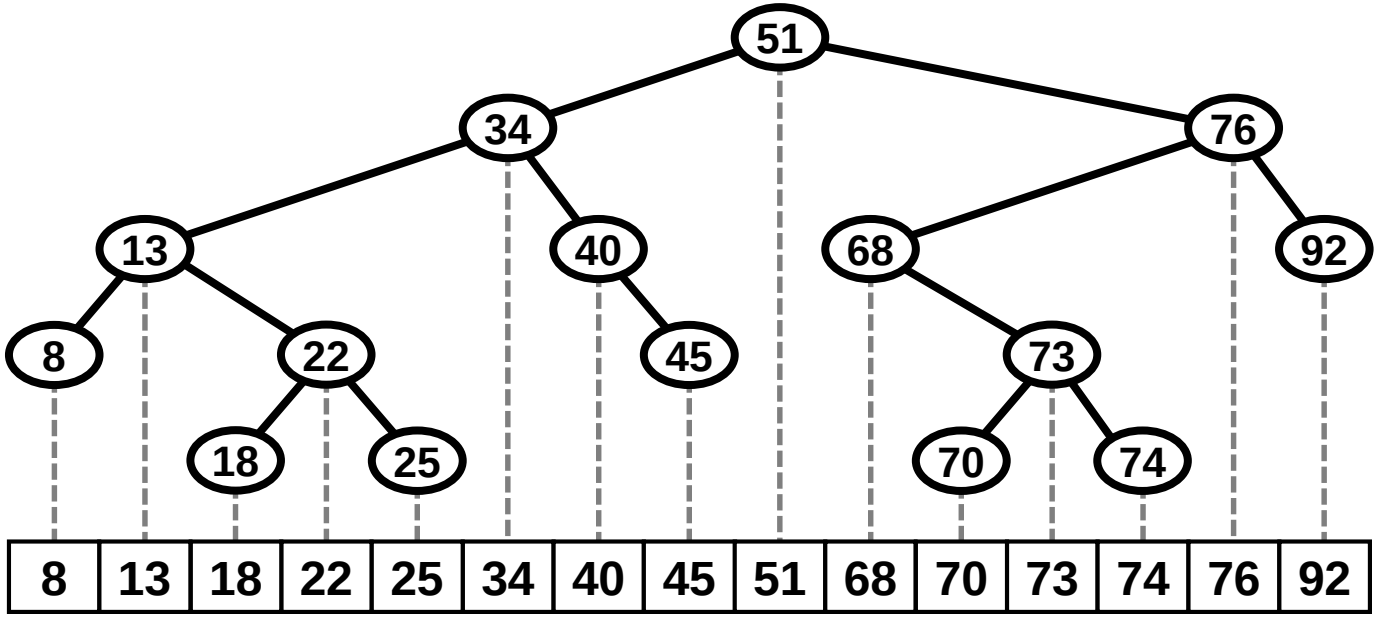
- V levém podstromu každého uzlu jsou všechny klíče menší.
- V pravém podstromu každého uzlu jsou všechny klíče větší.



Binární vyhledávací strom (BVS)



- V levém podstromu každého uzlu jsou všechny klíče menší.
- V pravém podstromu každého uzlu jsou všechny klíče větší.

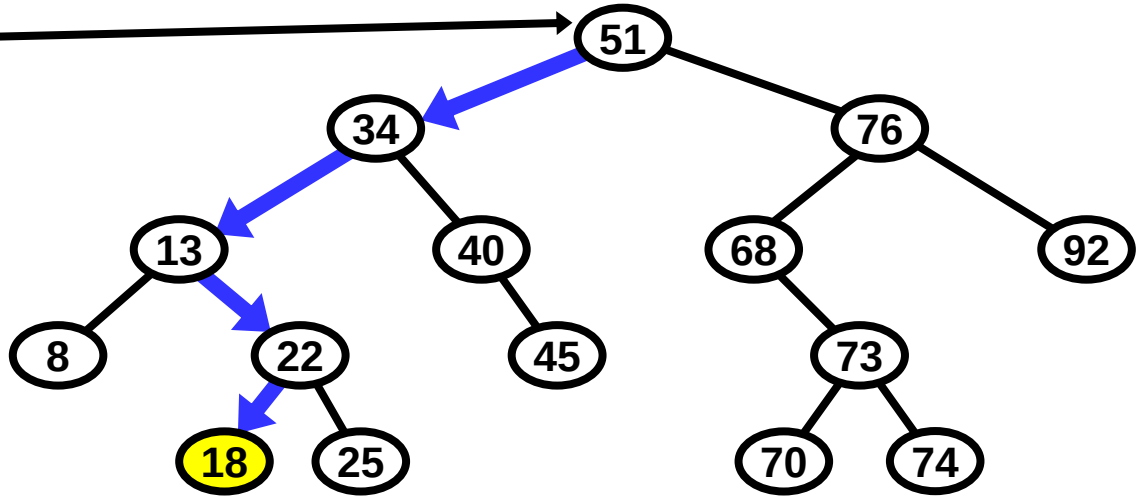


pořadí inorder = vzestupně uspořádané klíče

Operace Find v BVS

Najdi 18

Každá operace se stromem začíná v kořeni.

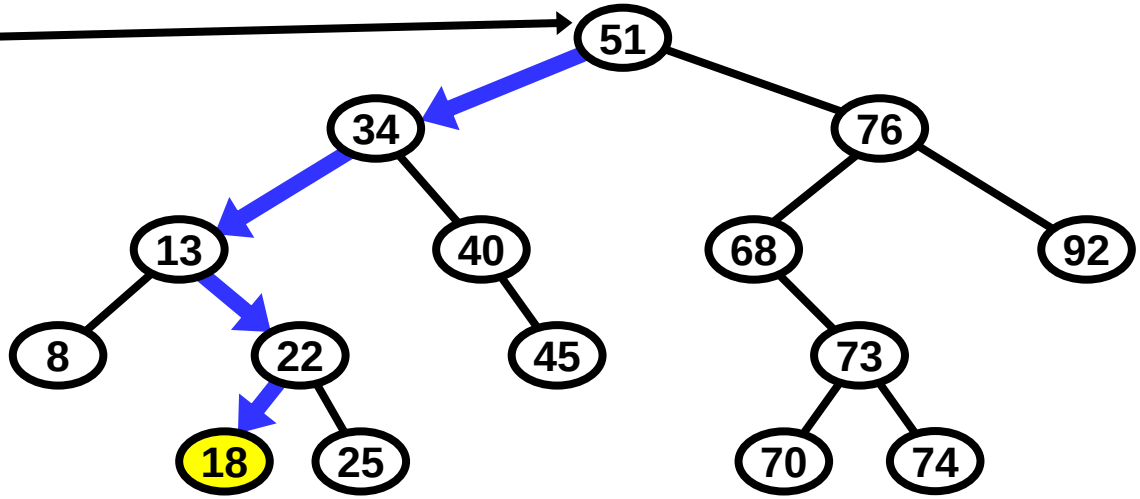



```
Node find(int key, Node node) {
    if (node == null || node.key == key)
        return node;
    if (key < node->key)
        return find(key, node->left);
    else
        return find(key, node->right);
}
```

Operace Find v BVS

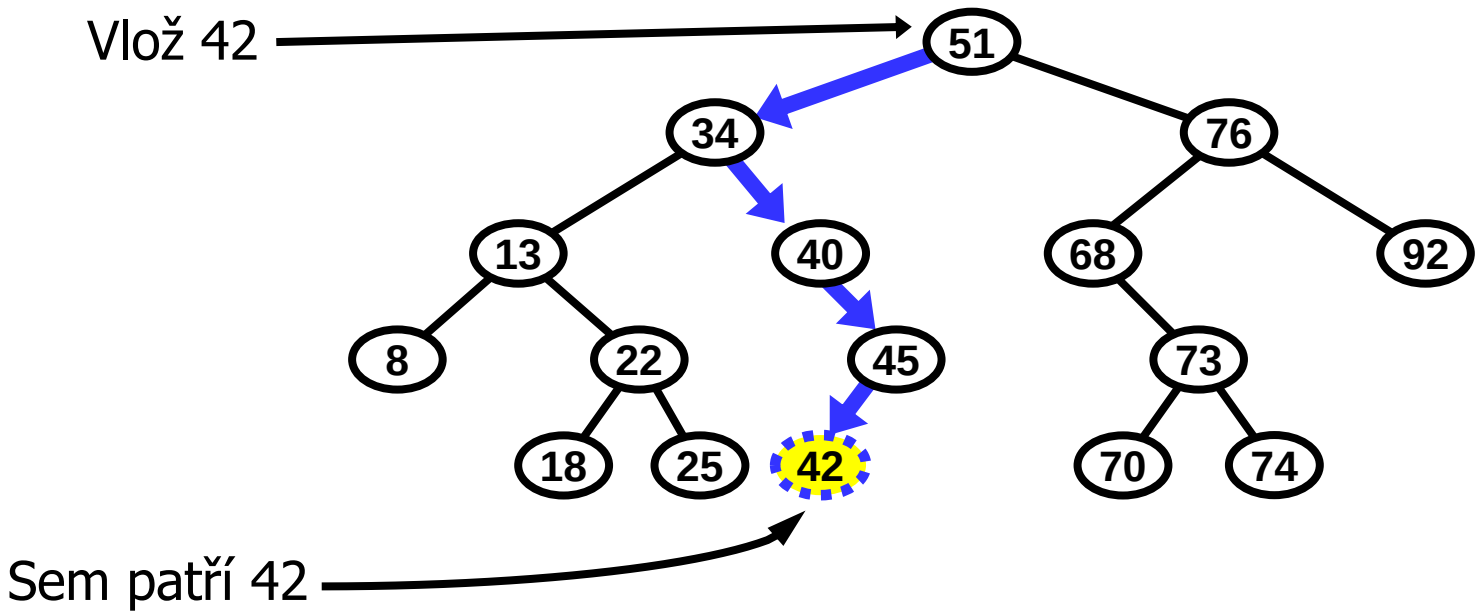
Najdi 18

Každá operace se stromem začíná v kořeni.




```
Node findIterative(int key, Node node) {
    while (true) {
        if (node == null || node->key == key)
            return node;
        if (key < node->key) node = node->left;
        else node = node->right;
    }
}
```

Operace Insert v BVS



Insert

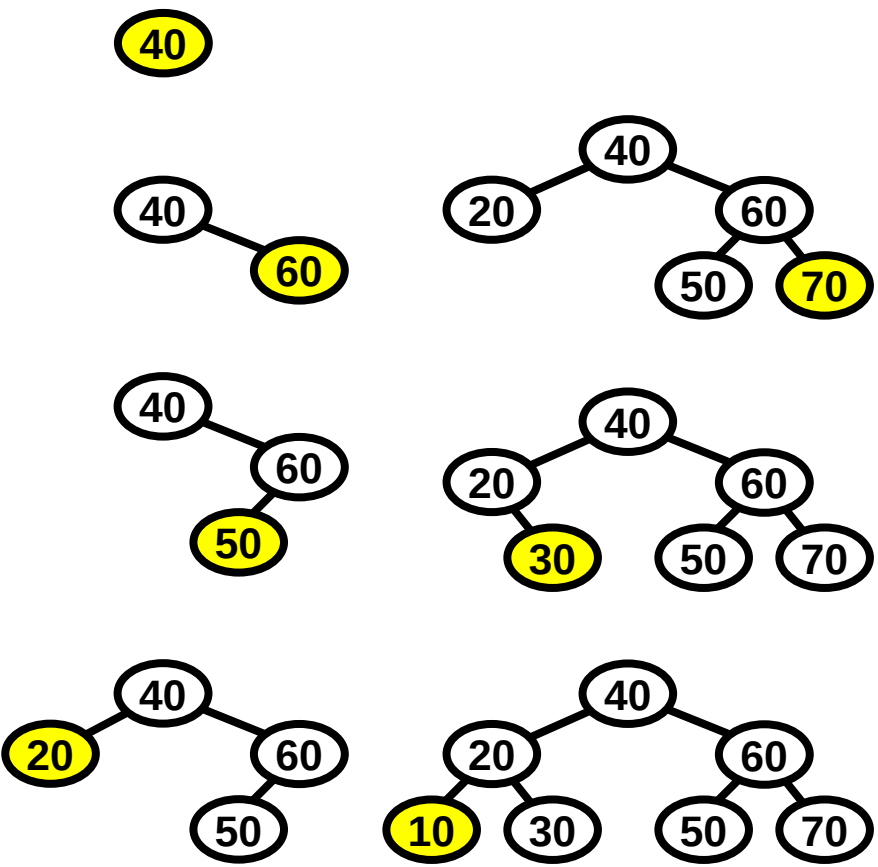
1. Najdi místo (jako ve Find) pro list, kam patří uzel s daným klíčem.
2. Vytvoř tento uzel a vlož jej do stromu.

Operace Insert v BVS

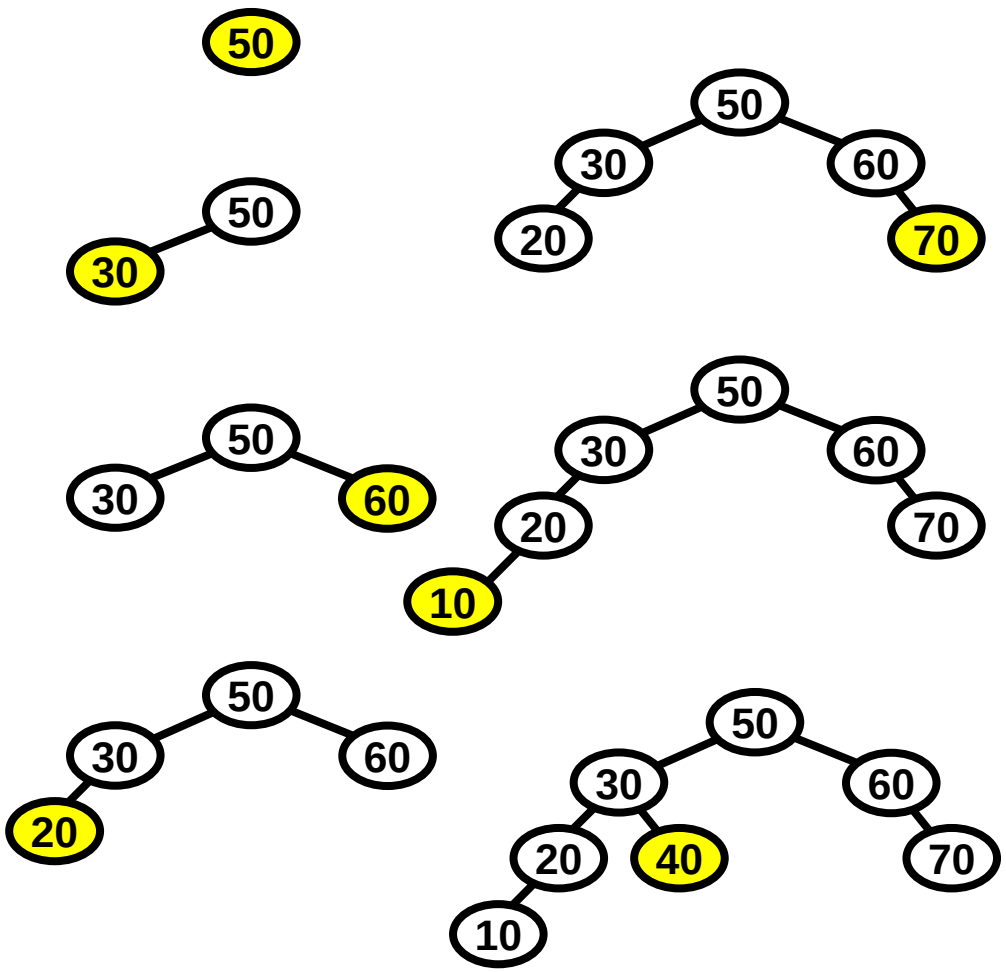
```
Node insert(Node node, int key) {
    /* If the tree is empty, return a new node */
    if (node == null)
        return new Node(key);

    /* Otherwise, recur down the tree */
    if (key < node->key)
        node->left = insert(node->left, key);
    else if (key > node->key)
        node->right = insert(node->right, key);

    /* return the (unchanged) node pointer */
    return node;
}
```

Různé tvary BVS

Insert: 40, 60, 50, 20, 70, 30, 10



Insert: 50, 30, 60, 20, 70, 10, 40



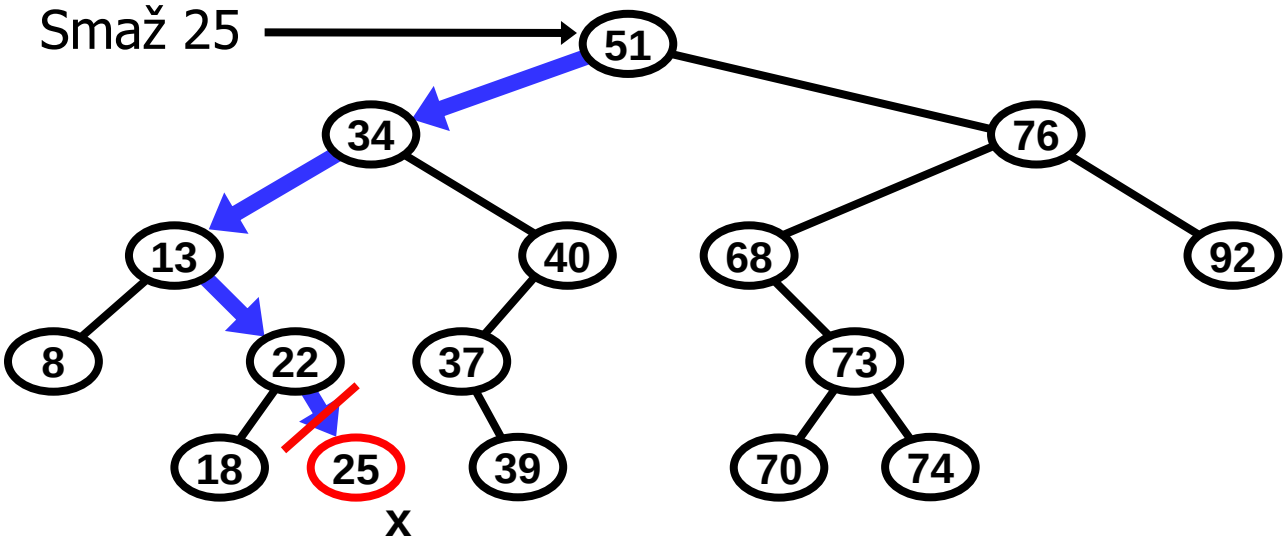
slido

Audience Q&A Session

ⓘ Start presenting to display the audience questions on this slide.

Operace Delete v BVS

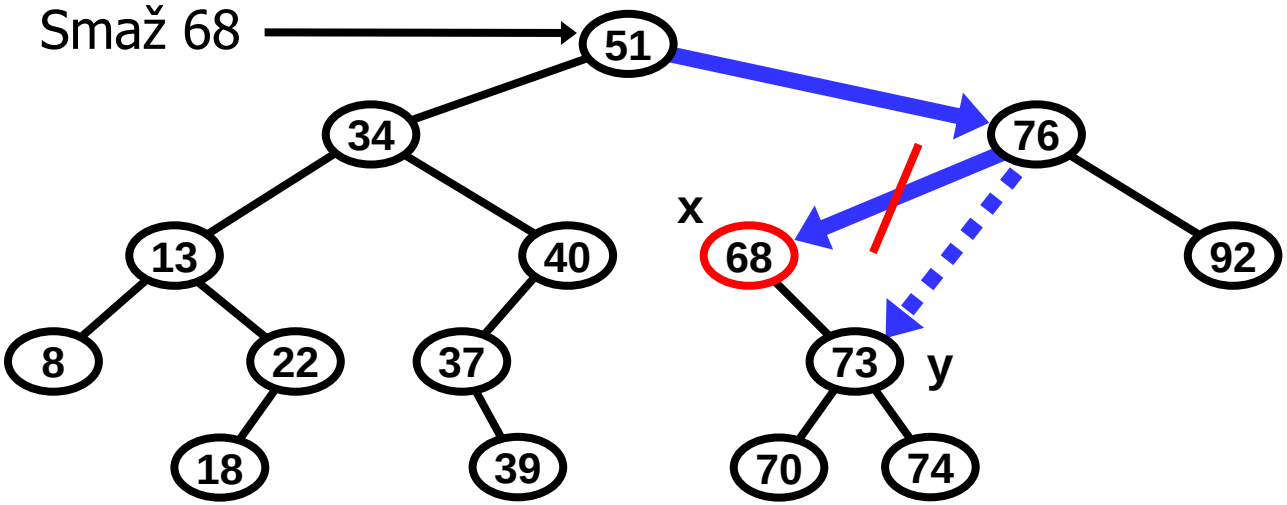
1. Smazání listu



- Najdi daný uzel *x* (Find) a odstraň ukazatel na něj z jeho rodiče.

Operace Delete v BVS

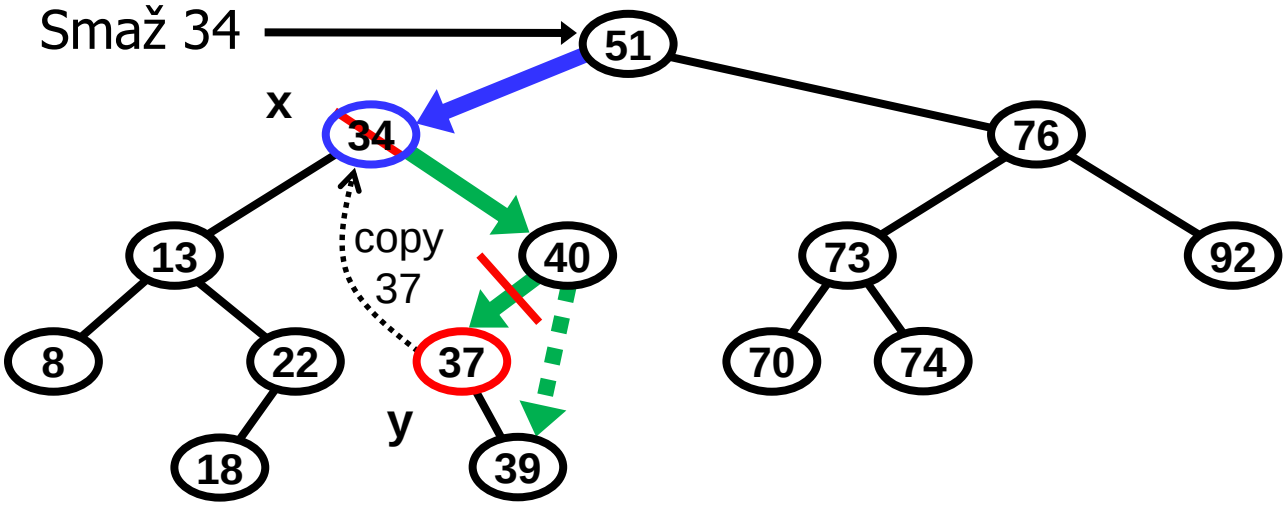
2. Smazání uzlu s 1 potomkem



- Najdi daný uzel *x* (operace Find) s potomkem *y*.
- V jeho rodiči změň ukazatel, který ukazoval na *x*, aby nově ukazoval na *y*.

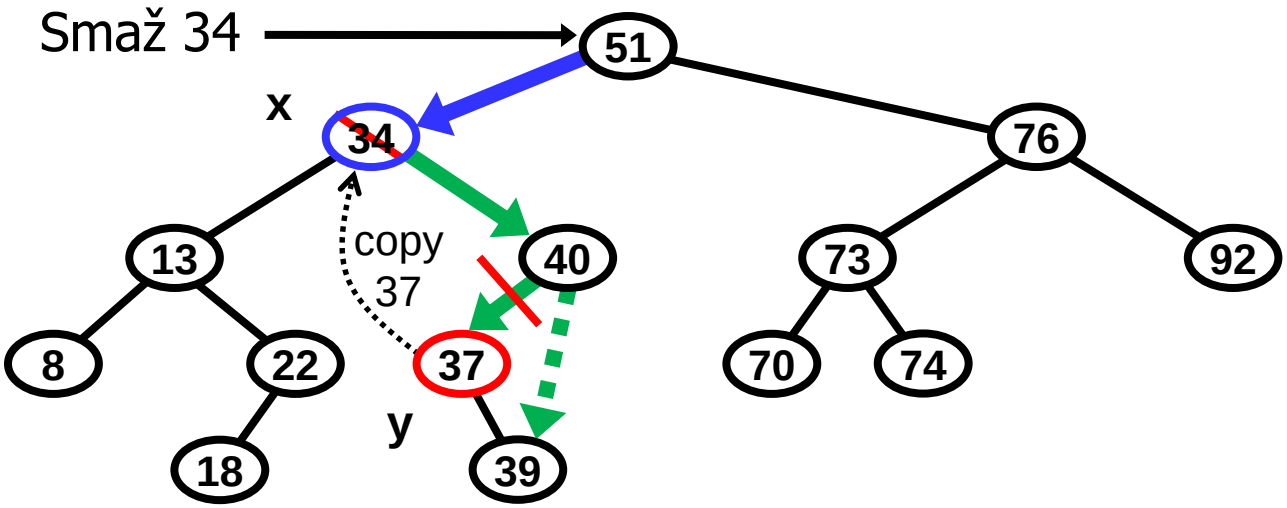
Operace Delete v BVS

3. Smazání uzlu se 2 potomky

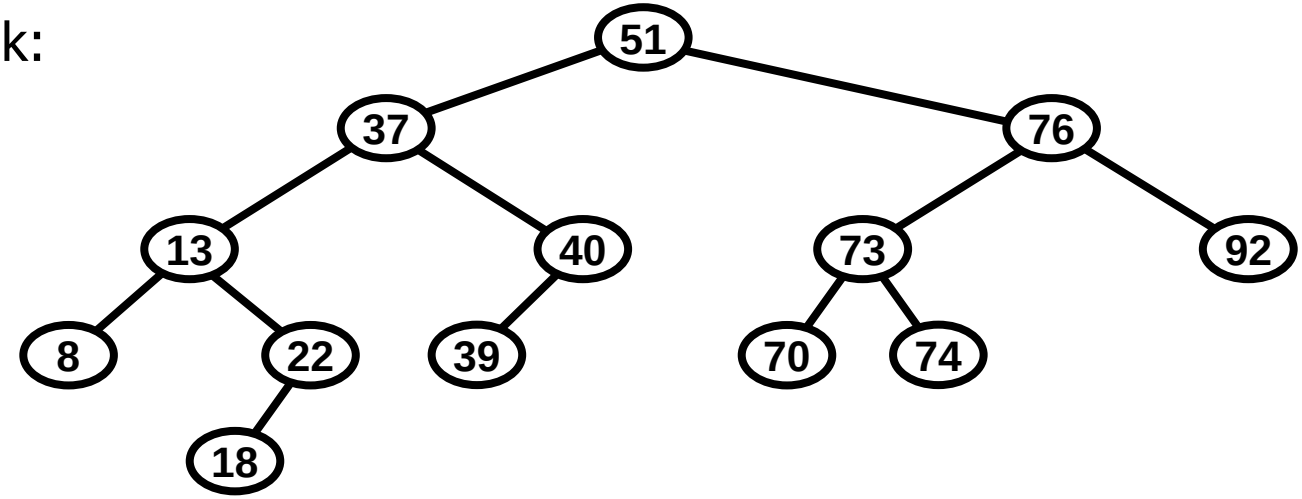


- Najdi daný uzel *x* (Find) a dále najdi uzel *y* s nejmenším klíčem v pravém podstromu uzlu *x*.
- Zkopíruj klíč uzlu *y* do uzlu *x*.
- Smaž uzel *y*, který má maximálně 1 potomka (viz předchozí případy).

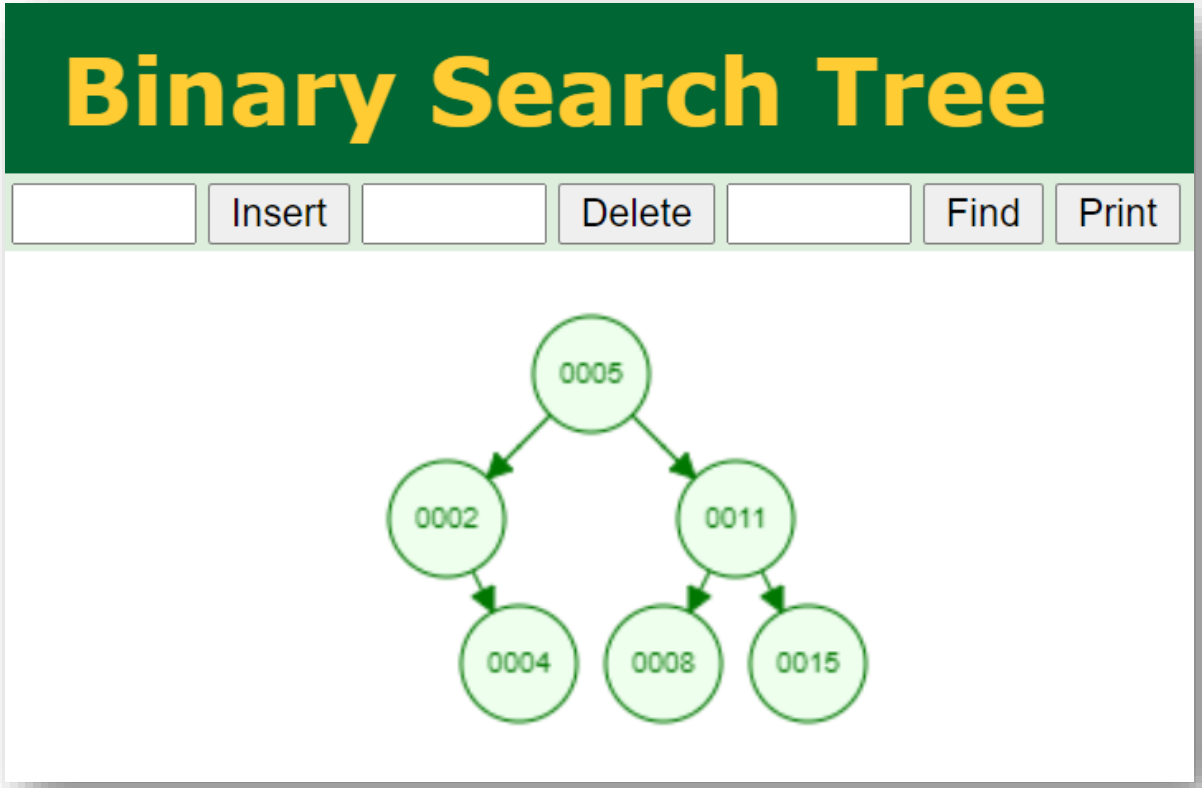
Operace Delete v BVS



Výsledek:



Vizualizace operací v BVS

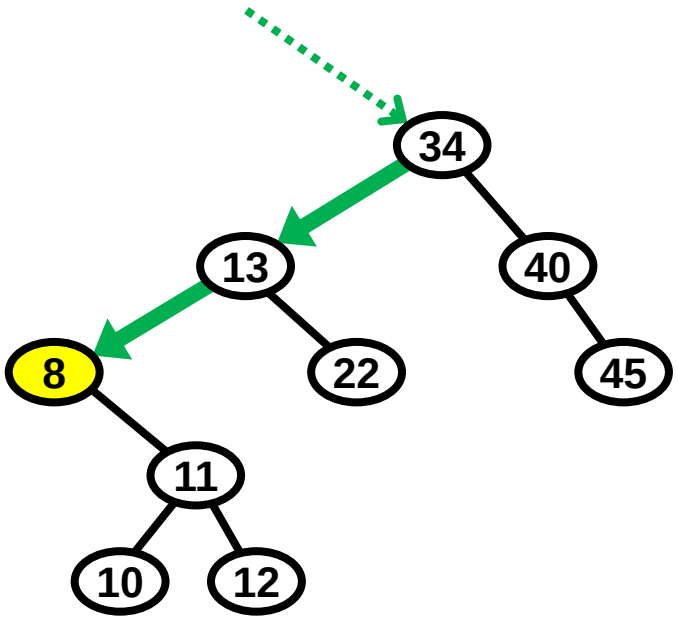


https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/BST.html

Operace Delete v BVS

Nalezení nejmenšího klíče v podstromě:

```
int minValue(Node node) {
    while (node.left != null)
        node = node.left;
    return node.key;
}
```



Operace Delete v BVS

```
Node delete(int key, Node root) {
    if (root == null) return root; // if the tree is empty
    if (key < root.key) // otherwise, recur down the tree
        root.left = delete(key, root.left);
    else if (key > root.key)
        root.right = delete(key, root.right);
    else {
        // node with only one child or no child
        if (root.left == null)
            return root.right;
        else if (root.right == null)
            return root.left;
            // node with two children
            root.key = minValue(root.right);
            // delete the inorder successor
            root.right = delete(root.key, root.right);
        }
        return root;
    }
}
```

slido

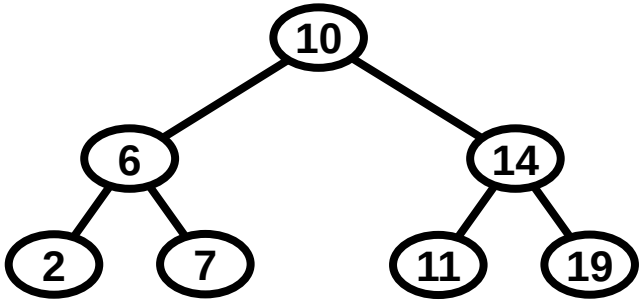
Jakou časovou složitost má operace Delete v BVS s 'n' uzly?

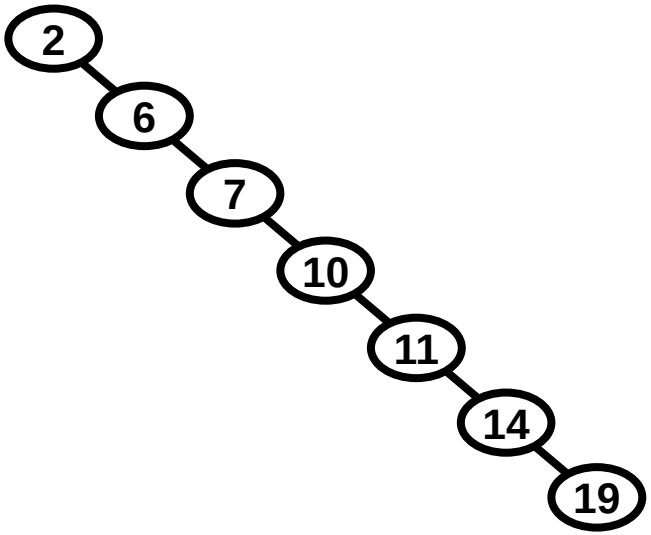
ⓘ Start presenting to display the poll results on this slide.

Asymptotická složitost operací

Asymptotická složitost operací v BVS je úměrná maximální hloubce uzlů, které navštívíme.

	BVS s n uzly	
Operace	**Obecný**	**Vyvážený**
Find	$\Theta(n)$	$\Theta(\log n)$
Insert	$\Theta(n)$	$\Theta(\log n)$
Delete	$\Theta(n)$	$\Theta(\log n)$





slido

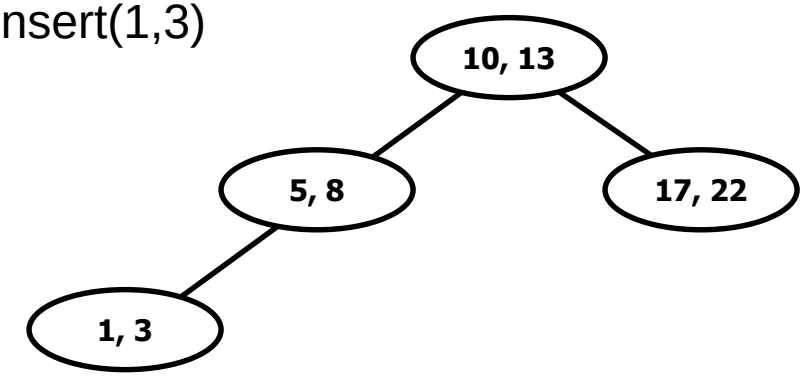
Audience Q&A Session

ⓘ Start presenting to display the audience questions on this slide.

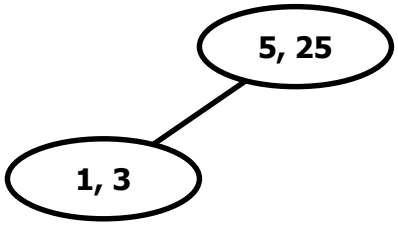
Pátá domácí úloha

Naimplementovat BVS, který má jako klíče navzájem disjunktní celočíselné intervaly.

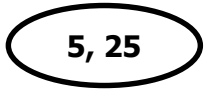
Insert(10, 13)
Insert(5, 8)
Insert(17, 12)
Insert(1,3)



Insert(7, 25)



Delete(2)



slido

Audience Q&A Session

ⓘ Start presenting to display the audience questions on this slide.