



Algoritmizace

Marko Genyk-Berezovskyj, Daniel Průša

2010 - 2022

Rekurzivní algoritmy

- Programovací technika rozděl a panuj
- Odvození časové složitosti

slido

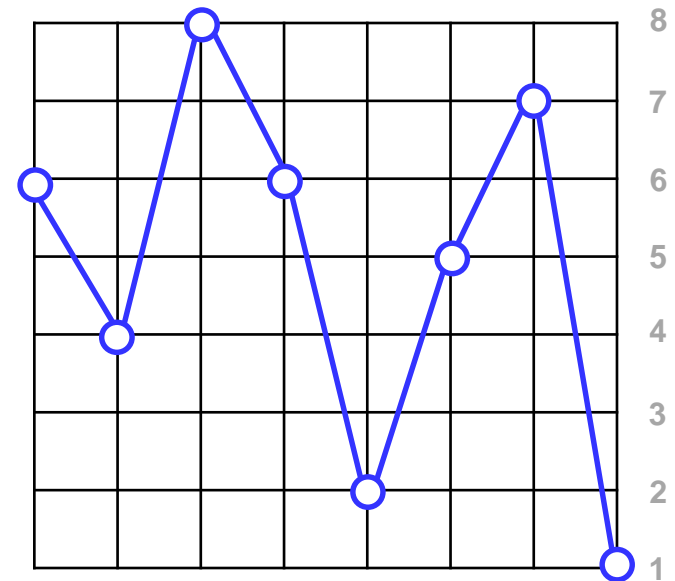
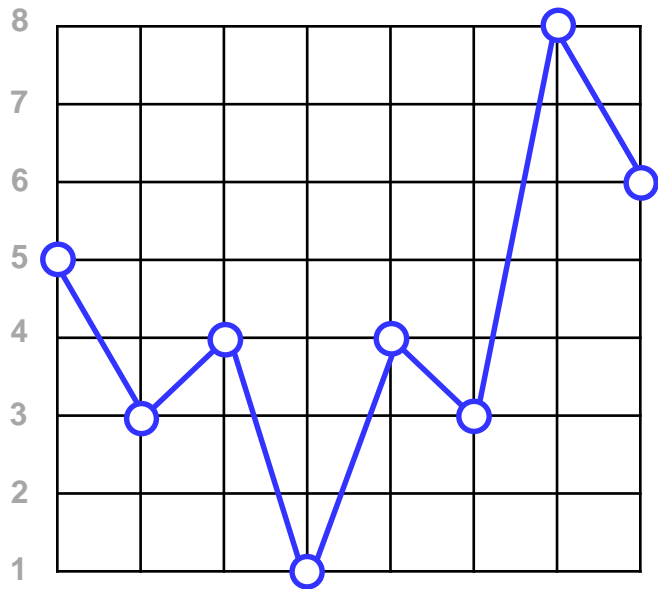


**Join at slido.com
#1526493**

① Start presenting to display the joining instructions on this slide.

Nákup a prodej akcií

Predikce vývoje ceny
v čase:



Úloha: Chceme naplánovat jeden nákup a jeden prodej tak, aby zisk byl maximální možný.

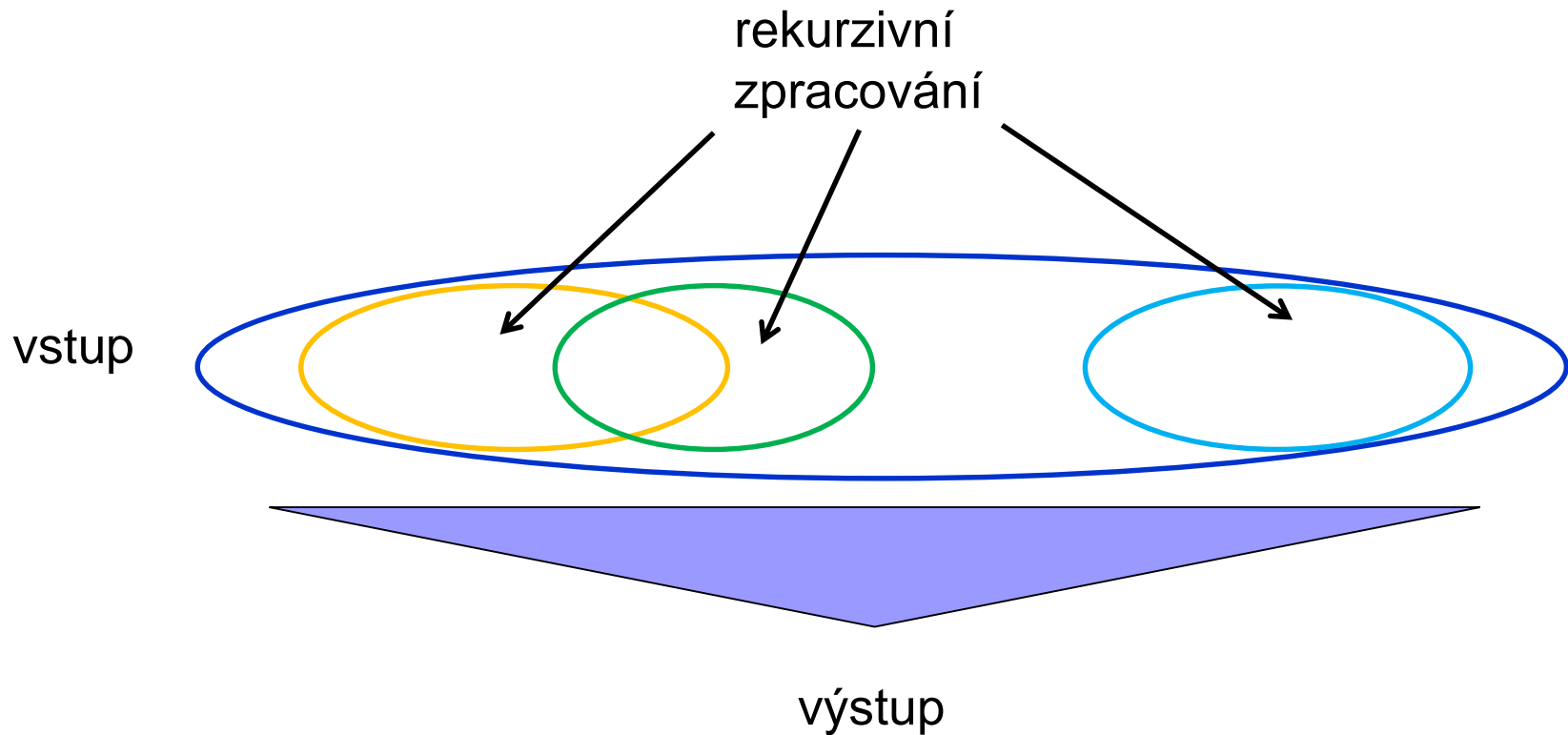
Nákup a prodej akcií

Rekurzivní algoritmus:

```
MaxProfit(int low, int hi, int[] cena):  
  if low == hi then  
    return 0;  
  else  
    mid = (low + hi) / 2;  
    profit_1 = MaxProfit(low, mid, cena);  
    profit_2 = MaxProfit(mid + 1, hi, cena);  
    profit_3 = MAX(mid + 1, hi, cena) -  
              MIN(low, mid, cena);  
    return MAX(profit_1, profit_2, profit_3);  
  endif
```

Rozděl a panuj

- Divide and conquer, divide et impera
- Programovací technika



Rozděl a panuj

- Třídění
- Syntaktická analýza (top-down parsing)
- Násobení velkých čísel
- Násobení matic
- Diskrétní Fourierova transformace

Nákup a prodej akcií

Rekurzivní algoritmus:

```
MaxProfit(int low, int hi, int[] cena):  
  if low == hi then  
    return 0;  
  else  
    mid = (low + hi) / 2;  
    profit_1 = MaxProfit(low, mid, cena);  
    profit_2 = MaxProfit(mid + 1, hi, cena);  
    profit_3 = MAX(mid + 1, hi, cena) -  
              MIN(low, mid, cena);  
    return MAX(profit_1, profit_2, profit_3);  
  endif
```

Časovou složitost vyjádříme rekurentně:

$$T(1) = \theta(1)$$

$$T(n) = T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + \theta(n), n > 1$$

slido



Audience Q&A Session

① Start presenting to display the audience questions on this slide.

Převod rekurence na přímé vyjádření

- Přímým vyjádřením složitosti myslíme vyjádření složitosti bez rekurence.
 - Např: $T(n) \in \Theta(\log n)$
- Jaké jsou možnosti řešení?
 - **Substituční metoda**
 - „Uhádneme“ řešení a potom dokážeme, že je správné indukcí.
 - **Metoda rekurzivního stromu**
 - Spočítáme složitost celého rekurzivního stromu.
 - **Použití „kuchařky“** (Master theorem – mistrovská věta)
 - Pro některé speciální tvary rekurentních vztahů známe předem vypočítané řešení dle mistrovské věty.

slido



Audience Q&A Session

① Start presenting to display the audience questions on this slide.

Substituční metoda

- Řešíme ve dvou krocích
 1. **Odhadneme přesný tvar řešení.**
 - Odhad lze stanovit například pomocí zjišťováním složitosti pro různá vstupní n .
 2. **Matematicky dokážeme, že je náš odhad správný.**
 - Obvykle se dokazuje pomocí matematické indukce.
- Metoda bývá zpravidla velmi účinná.
- Její nevýhodou je určování přesného tvaru řešení v kroku 1 pro které neexistuje obecný postup.

Substituční metoda

$$T(1) = \Theta(1)$$

$$T(n) = T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + \Theta(n), \quad n > 1$$

Zkusme odhadnout, jakou má $T(n)$ asymptotickou složitost.

- A. $T(n) \in \Theta(n)$
- B. $T(n) \in \Theta(n \log n)$
- C. $T(n) \in \Theta(n^2)$
- D. $T(n) \in \Theta(2^n)$

slido



Prodej akcií - jaká je časová složitost?

ⓘ Start presenting to display the poll results on this slide.

Substituční metoda

- $T(1) = d$

$$T(n) = T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + d \cdot n, \quad n > 1$$

- Nejprve mat. indukcí dokážeme $\forall k \geq 1: T(2^k) \leq 2dk2^k$

- Ověříme platnost tvrzení pro $k = 1$:

$$T(2^1) = T(1) + T(1) + 2d = 4d$$

- A s použitím indukčního předpokladu $T(2^k) \leq 2dk2^k$ odvodíme

$$\begin{aligned} T(2^{k+1}) &= T(2^k) + T(2^k) + d2^{k+1} \leq 2dk2^{k+1} + d2^{k+1} \\ &= (2k + 1)d2^{k+1} \leq 2(k + 1)d2^{k+1} = 2d(k + 1)2^{k+1} \end{aligned}$$

Substituční metoda

- Nyní výsledek zobecníme pro každé $n \geq 2$.
- Pro takové n existuje mocnina dvojky n' splňující

$$n \leq n' < 2n$$

- $T(n)$ je neklesající funkce, platí tedy

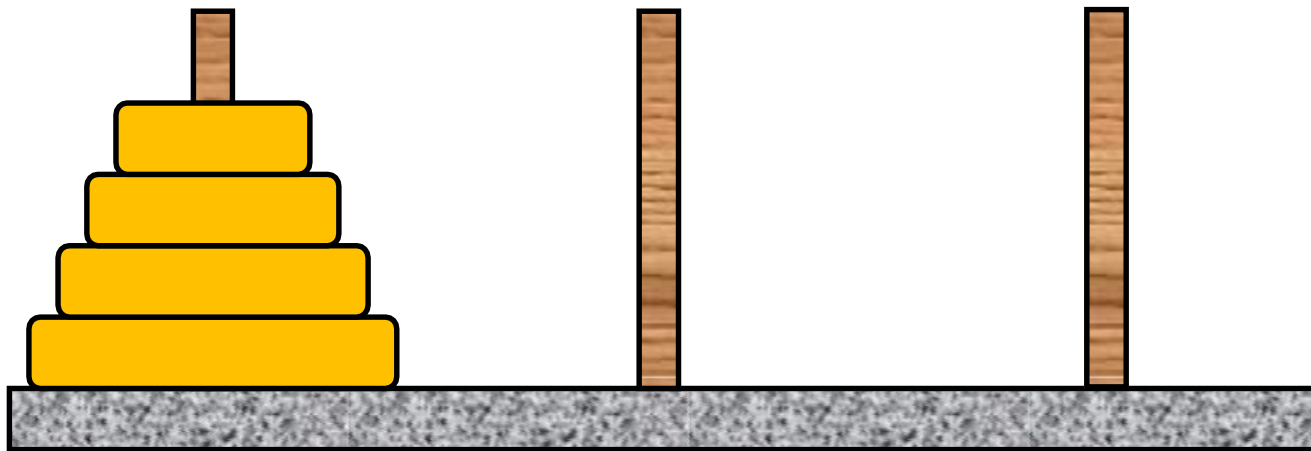
$$T(n) \leq T(n') \leq 2dn' \log_2 n' < 4dn \log_2(2n) \in O(n \log n)$$

Hanojská věž

Úkol: přemístit disky z tyče vlevo na tyč vpravo

Pravidla:

- disky přesouváme pouze jednotlivě, z tyče na tyč
- větší disk nesmí nikdy ležet na menším disku



Hanojská věž

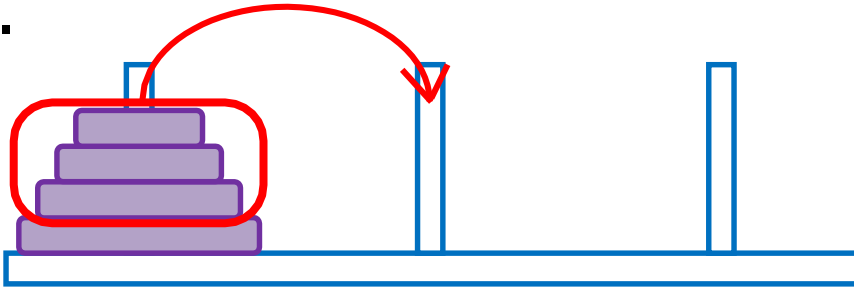


<https://www.youtube.com/watch?v=CBM1zE9vFnE>

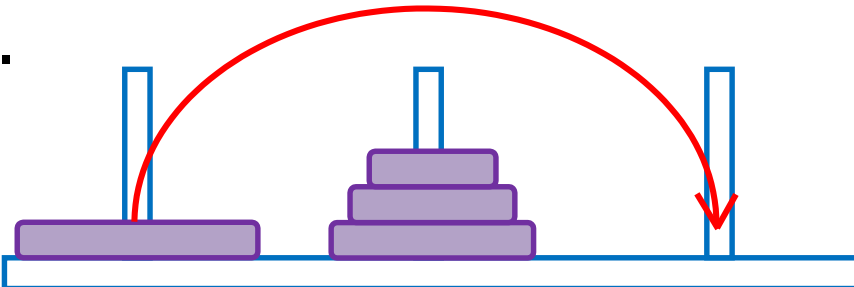
Hanojská věž

Rekurzivní algoritmus:

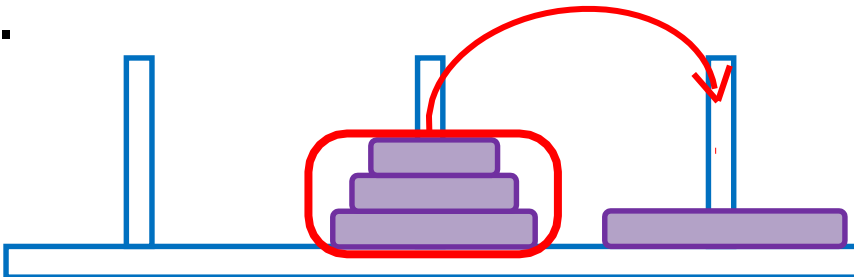
1.



2.



3.



odkud, přes, kam

Hanoj(n, t1, t2, t3):

if n > 0 **then**

Hanoj(n-1, t1, t3, t2);

přesuň disk z t1 na t3;

Hanoj(n-1, t2, t1, t3);

endif

Hanoj(4, 1, 2, 3);

Hanojská věž

Časová složitost je úměrná počtu tahů (přesunů), které provedeme.

```
Hanoj(n, t1, t2, t3):  
if n > 0 then  
    Hanoj(n-1, t1, t3, t2);  
    přesuň disk z t1 na t3;  
    Hanoj(n-1, t2, t1, t3);  
endif
```

$$T(1) = 1,$$

$$T(n) = 2T(n - 1) + 1, \quad n > 1.$$

Substituční metoda

- $T(1) = 1,$
 $T(n) = 2T(n - 1) + 1, \quad n > 1.$

Zkusme odhadnout asymptotickou složitost funkce $T(n)$.

- A. $T(n) \in \Theta(n)$
- B. $T(n) \in \Theta(n \log n)$
- C. $T(n) \in \Theta(n^2)$
- D. $T(n) \in \Theta(2^n)$

slido



Hanojská věž - jaká je časová složitost?

ⓘ Start presenting to display the poll results on this slide.

Substituční metoda

- $T(1) = 1,$
 $T(n) = 2T(n - 1) + 1, \quad n > 1.$

Dokážeme $T(n) = 2^n - 1$

- Pro $n = 1$:

$$2^1 - 1 = 1 = T(1)$$

- Pro $n > 1$:

$$\begin{aligned} T(n + 1) &= 2T(n) + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1 \\ &= 2^{n+1} - 1 \end{aligned}$$

slido



Audience Q&A Session

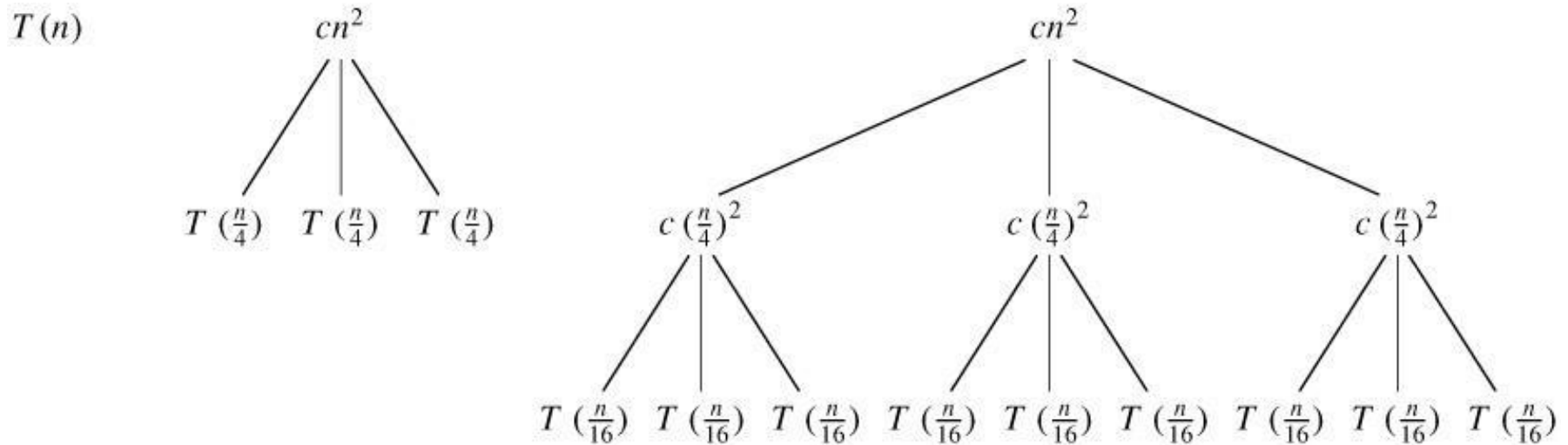
① Start presenting to display the audience questions on this slide.

Metoda rekurzivního stromu

- Příklad:

$$T(n) = 3 \cdot T\left(\frac{n}{4}\right) + cn^2$$

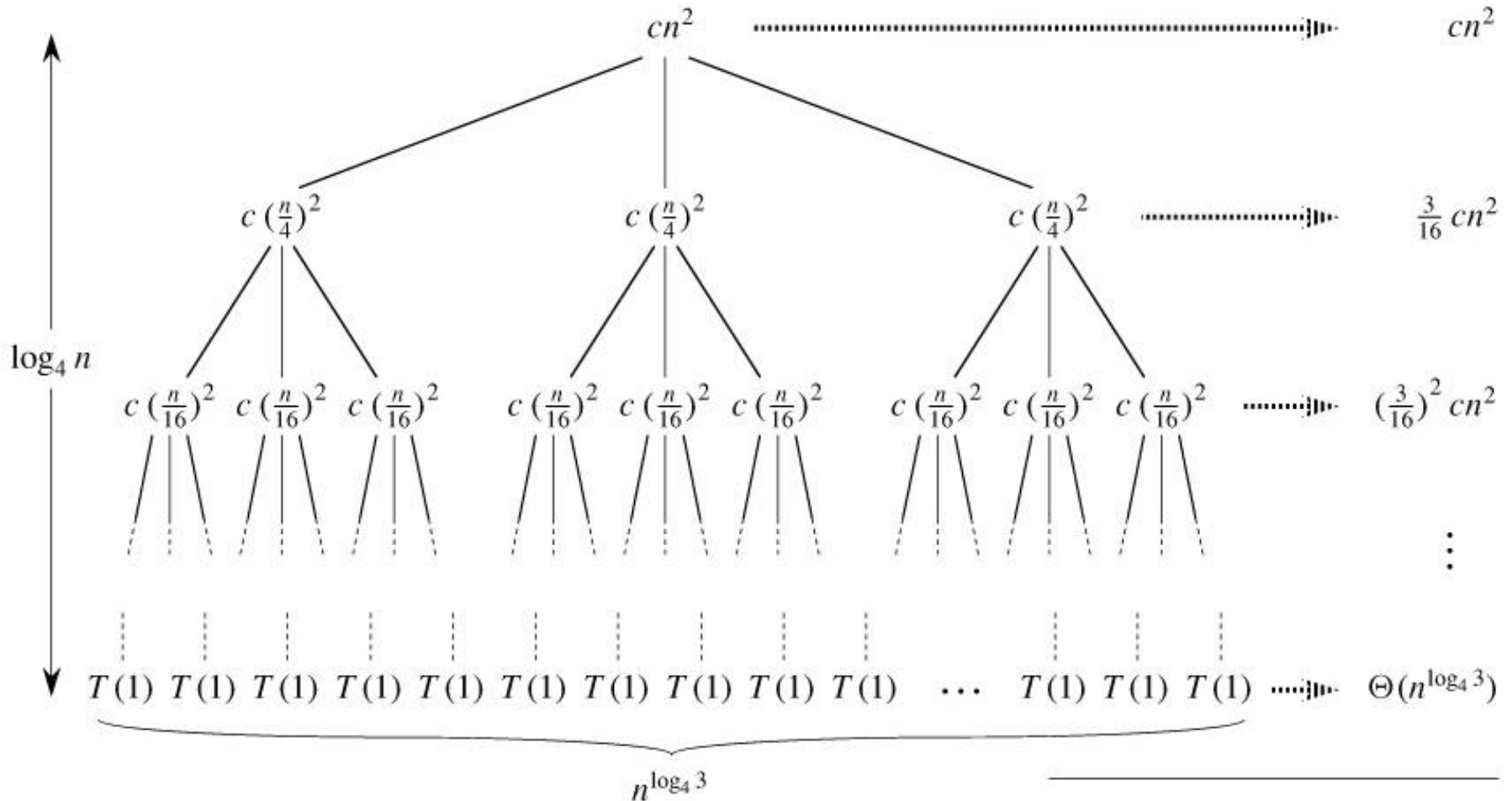
- Iterativně rozkládáme do rekurzivních stromů:



- Pro každý strom platí, že součet všech uzlů dá složitost $T(n)$ podle původního rekurentního vztahu.
- Rekurzivní stromy jsou pouze grafická vizualizace rozvoje rekurentního vztahu.

Metoda rekurzivního stromu

- Výsledný strom má následující tvar:



- Vyjádříme součty v patrech a patra sečteme:

$$O(n^2)$$

Metoda rekurzivního stromu

- Výsledný rekurzivní strom má $3^{\log_4 n}$ listů, z čehož odvodíme

$$\begin{aligned} 3^{\log_4 n} &= \left(4^{\log_4 3}\right)^{\log_4 n} = 4^{(\log_4 3) \cdot (\log_4 n)} \\ &= \left(4^{\log_4 n}\right)^{\log_4 3} = n^{\log_4 3} \end{aligned}$$

Metoda rekurzivního stromu

- Součet pater spočítáme následovně:

$$\begin{aligned} T(n) &= cn^2 + \frac{3}{16}cn^2 + \left(\frac{3}{16}\right)^2 cn^2 + \dots + \left(\frac{3}{16}\right)^{\log_4 n - 1} cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) \\ &= \sum_{i=0}^{\log_4 n - 1} \left(\frac{3}{16}\right)^i cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) \\ &< \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^i cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) \\ &= \frac{1}{1 - (3/16)} cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) \\ &= \frac{16}{13} cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) \\ &= O(n^2). \end{aligned}$$

podle vzorce $\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$
kde $0 < q < 1$

Mistrovská věta

- Master theorem nebo také kuchařková věta
- Řeší složitost rekurentní funkce tvaru

$$T(n) = a T(n/b) + f(n)$$

kde $a \geq 1$ a $b > 1$ jsou konstanty

a $f(n)$ je asymptoticky kladná funkce.

- Zaokrouhlení u členu $T(n/b)$ na $T(\lfloor n/b \rfloor)$ nebo $T(\lceil n/b \rceil)$ neovlivní v tomto případě výslednou složitost.
- Lze aplikovat na Mergesort, binární vyhledávání, hledání mediánu, Strassenův algoritmus pro násobení matic, ...

Mistrovská věta

Nechť jsou $a \geq 1$ a $b > 1$ konstanty, necht' je $f(n)$ asymptoticky kladná funkce a necht' $T(n)$ je definováno pro nezáporná celá čísla rekurencí $T(n) = a T(n/b) + f(n)$, kde n/b má význam buď $\lfloor n/b \rfloor$ nebo $\lceil n/b \rceil$. Potom lze $T(n)$ asymptoticky vyjádřit následovně:

1. Pokud $f(n) \in O(n^{\log_b(a)-\varepsilon})$ pro nějakou konstantu $\varepsilon > 0$, potom

$$T(n) \in \Theta(n^{\log_b(a)}).$$

2. Pokud $f(n) \in \Theta(n^{\log_b(a)})$, potom

$$T(n) \in \Theta(n^{\log_b(a)} \log(n)).$$

3. Pokud $f(n) \in \Omega(n^{\log_b(a)+\varepsilon})$ pro nějakou konstantu $\varepsilon > 0$ a pokud $a f(n/b) \leq c f(n)$ pro nějakou konstantu $c < 1$ a všechna dostatečně velká n , potom

$$T(n) \in \Theta(f(n)).$$

Použití „kuchařky“ – příklad 1

- Příklad 1 (Strassenův algoritmus):

$$T(n) = 7 \cdot T(n/2) + \Theta(n^2)$$

- Z toho dostáváme, že $a = 7$, $b = 2$, $f(n) \in O(n^{\log_2(7)-0.5})$.
Jedná se tedy o případ číslo 1.
- Dostáváme složitost:

$$T(n) \in \Theta(n^{\log_2(7)}) \subseteq \Theta(n^{2.8074})$$

Použití „kuchařky“ – příklad 2

- Příklad 2 (Nákup a prodej akcií):

$$T(n) = 2 \cdot T(n/2) + \Theta(n)$$

- Z toho dostáváme, že $a = 2$, $b = 2$,

$$f(n) \in \Theta(n) = \Theta(n^{\log_2(2)}).$$

Jedná se tedy o případ číslo 2.

- Dostáváme složitost:

$$T(n) \in \Theta(n \cdot \log(n))$$

Použití „kuchařky“ – příklad 3

- Příklad 3 (fiktivní):

$$T(n) = 3 \cdot T(n/4) + n \log(n)$$

- Z toho dostáváme, že $a = 3$, $b = 4$,

$$f(n) = n \log(n) \text{ a víme, že } n^{\log_4(3)} = O(n^{0.793}) .$$

Platí tedy, že $f(n) \in \Omega(n^{\log_4(3)+0.2})$.

Pokud by se mělo jednat o případ 3 musí ještě platit pro $c < 1$ a všechna dostatečně velká n , že $a f(n/b) \leq c f(n)$ tedy $a f(n/b) = 3(n/4) \log(n/4) \leq (3/4)n \log(n) = c f(n)$ pro $c = 3/4$.

- Dostáváme složitost:

$$T(n) \in \Theta(n \log(n))$$

slido

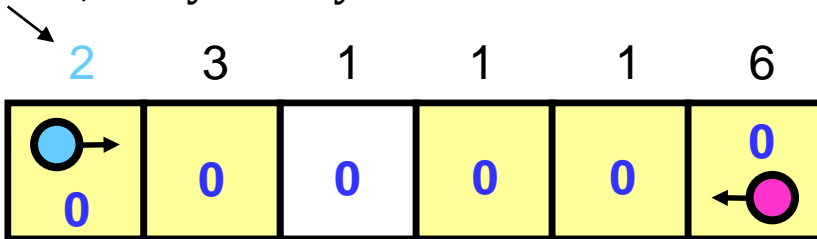


Audience Q&A Session

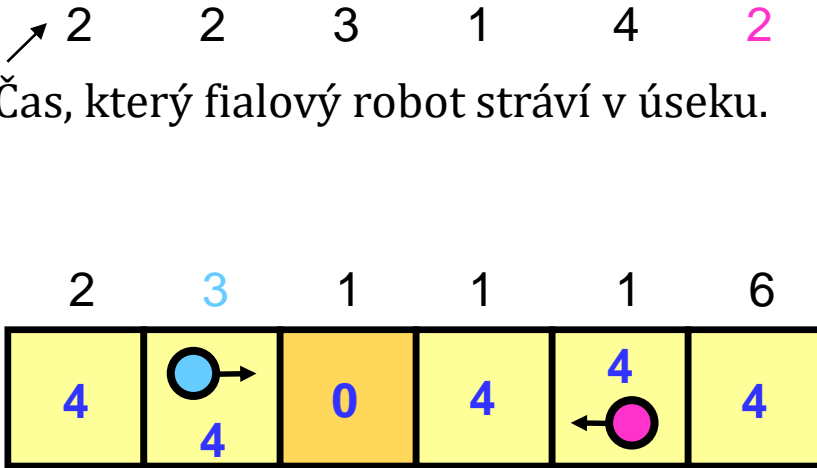
① Start presenting to display the audience questions on this slide.

Domácí úloha

Čas, který modrý robot stráví v úseku.



Čas, který fialový robot stráví v úseku.



$t = 2$

2	2	3	1	4	2
---	---	---	---	---	---

$N = 6$... počet úseků

$T = 14$... celková doba projití chodbou

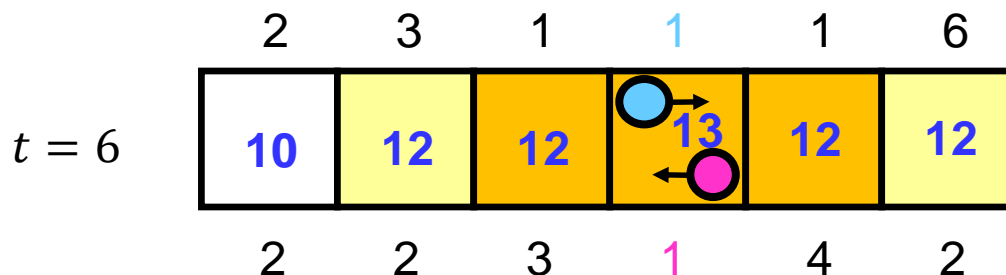
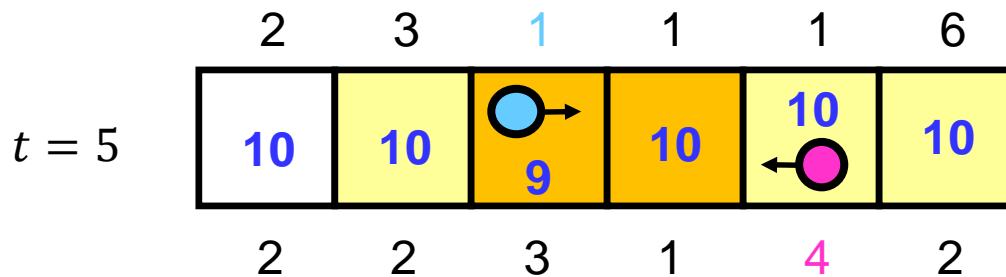
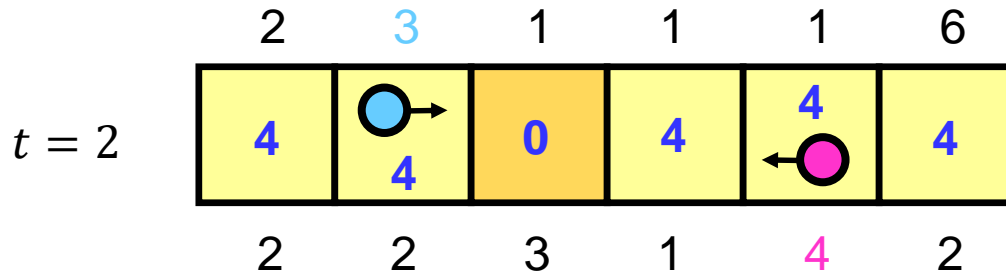
$D_1 = 1$... dosah osvětlení robota č. 1

$D_2 = 2$... dosah osvětlení robota č. 2

Je-li úsek osvětlen jedním robotem, kvalita úseku se za časovou jednotku zvýší o 2.

Je-li úsek osvětlen oběma roboty, kvalita úseku se za časovou jednotku zvýší o 3.

Domácí úloha





$N = 6$... počet úseků

$T = 14$... celková doba projití chodbou

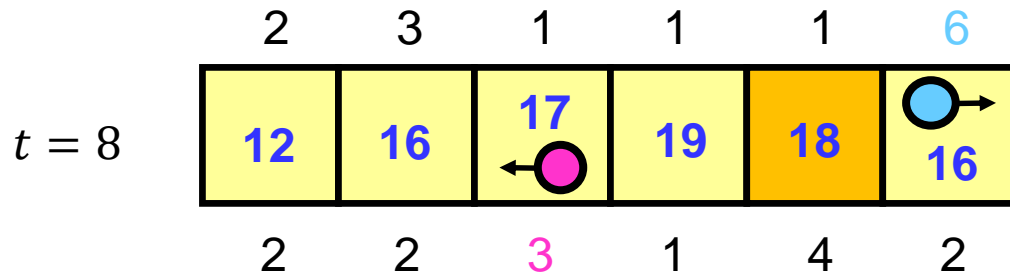
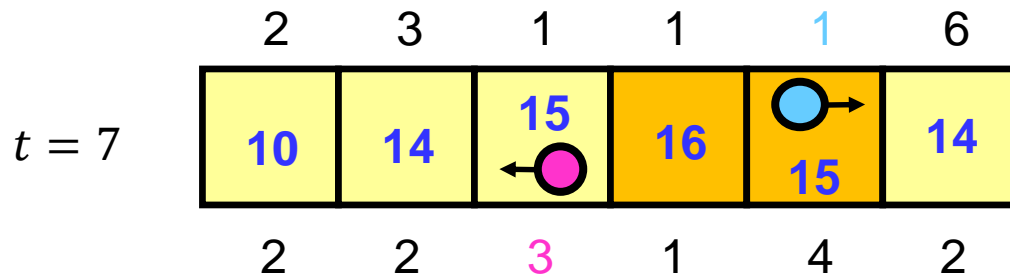
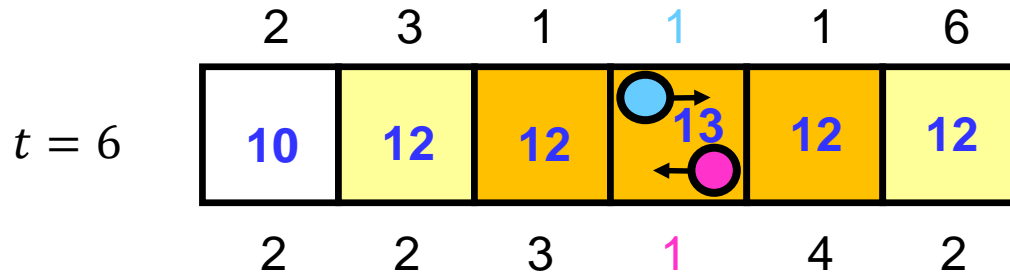
$D_1 = 1$... dosah osvětlení robota č. 1

$D_2 = 2$... dosah osvětlení robota č. 2

Je-li úsek osvětlen jedním robotem, kvalita úseku se za časovou jednotku zvýší o 2. 

Je-li úsek osvětlen oběma roboty, kvalita úseku se za časovou jednotku zvýší o 3. 

Domácí úloha





$N = 6$... počet úseků

$T = 14$... celková doba projití chodbou

$D_1 = 1$... dosah osvětlení robota č. 1

$D_2 = 2$... dosah osvětlení robota č. 2

Je-li úsek osvětlen jedním robotem, kvalita úseku se za časovou jednotku zvýší o 2. 

Je-li úsek osvětlen oběma roboty, kvalita úseku se za časovou jednotku zvýší o 3. 

slido



Audience Q&A Session

① Start presenting to display the audience questions on this slide.