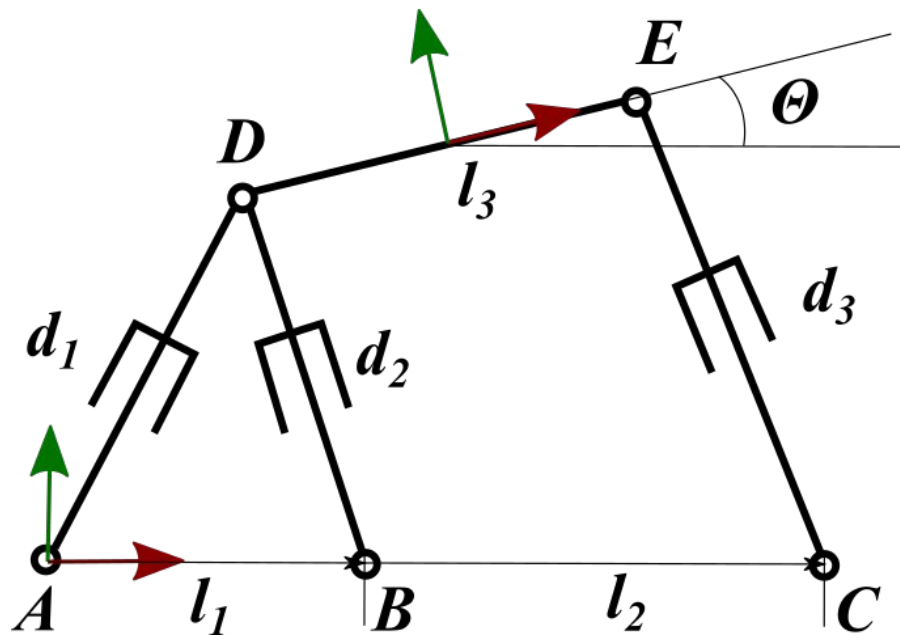


Kinematika paralelního robotu

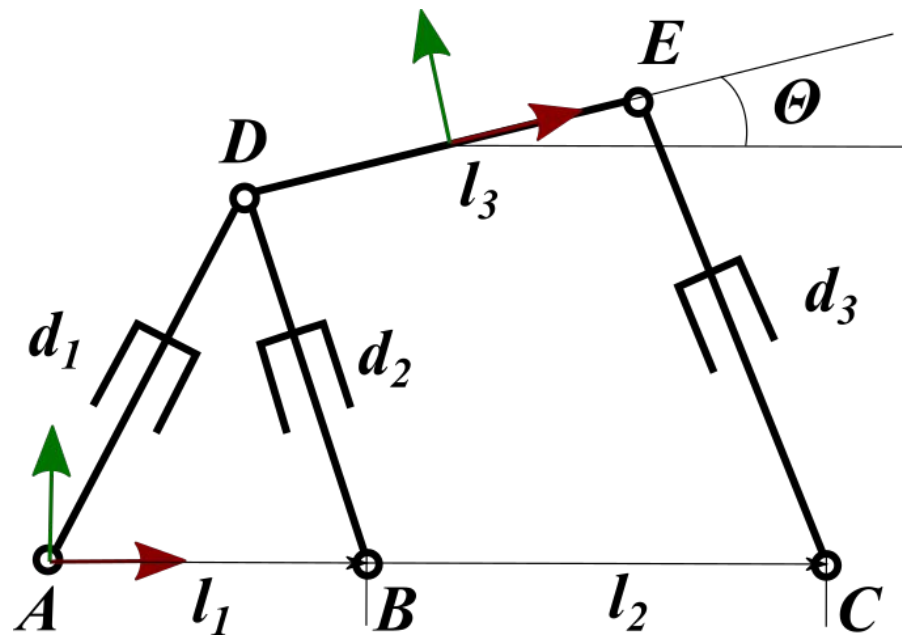
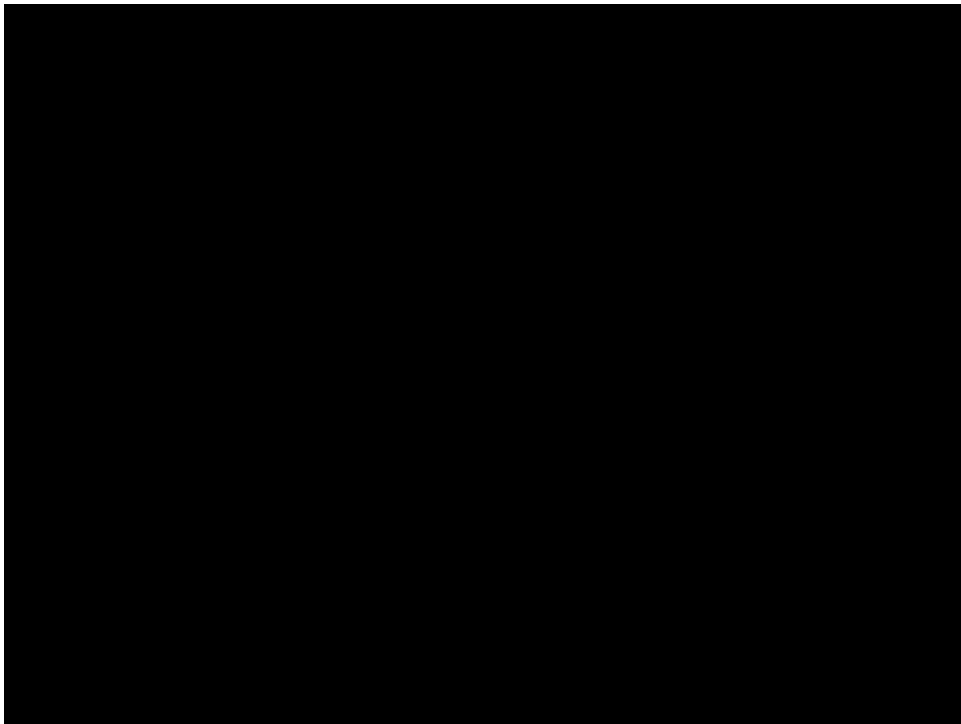
Vladimír Petřík, vladimir.petrik@cvut.cz

Úvod

- Řešení kinematiky paralelního manipulátoru
- Jako v zadání úkolu č. 4
- Robot:
 - 3 poháněné posuvné klouby pevně ukotvené
 - 5 volných rotačních kloubů
 - Referenční s.s. u bodu A
 - Koncový s.s. je uprostřed ramena DE
- Cíl:
 - Vytvořit vazbové rovnice
 - Spočítat DKT, IKT

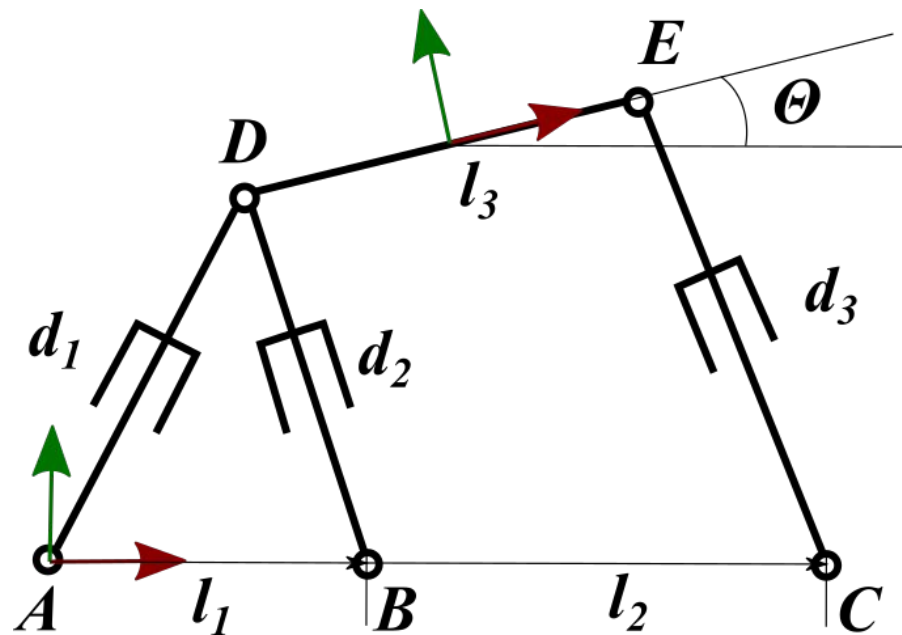


Jak se robot pohybuje



Vazbové rovnice

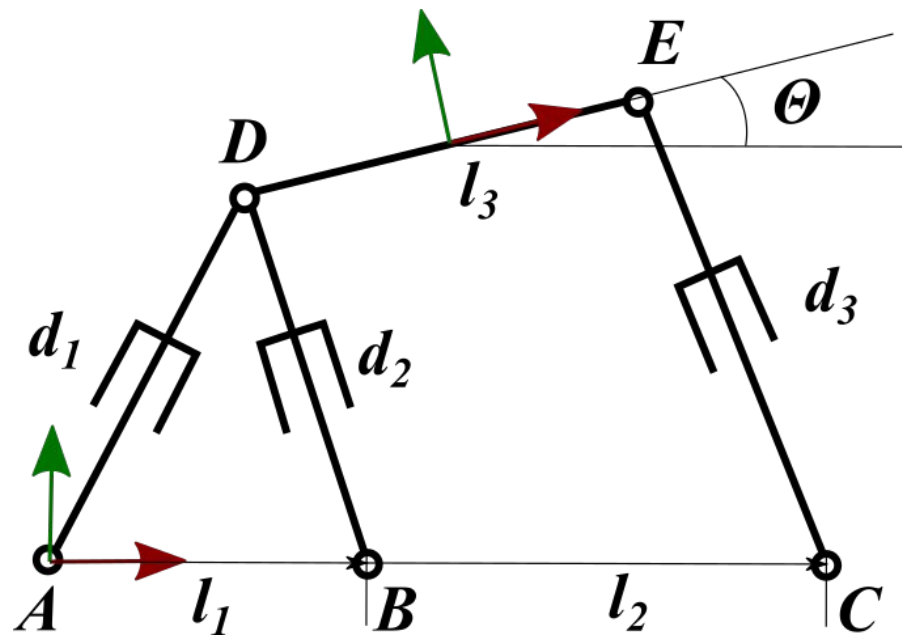
- Rovnice popisující kinematické omezení pohybu
- Jaká omezení platí mezi body A a D?



Vazbové rovnice

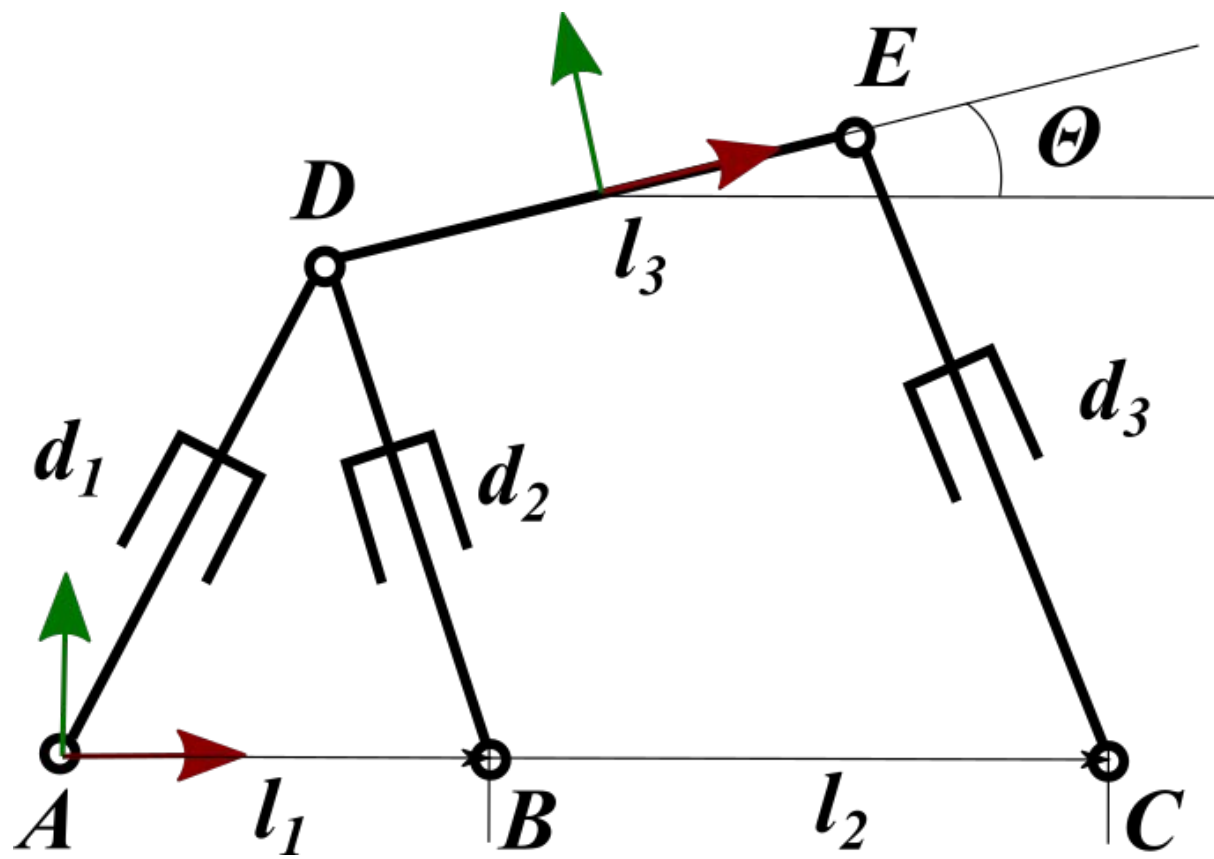
- Rovnice popisující kinematické omezení pohybu
- Jaká omezení platí mezi body A a D?

1. $\|A - D\| = d_1$
2. $\|B - D\| = d_2$
3. $\|C - E\| = d_3$
4. $\|D - E\| = l_3$
5. $A_x = 0, B_x = l_1, C_x = l_1 + l_2$
6. $A_y = B_y = C_y = 0,$

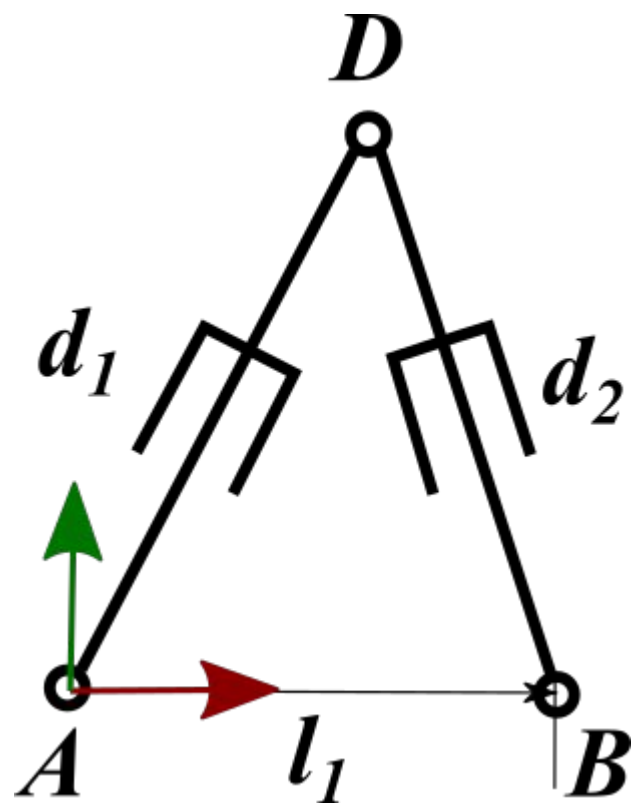


Přímá kinematická úloha (DKT)

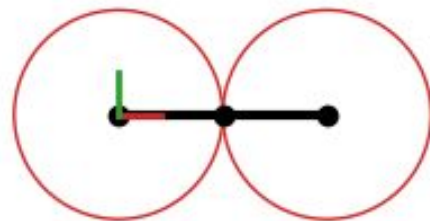
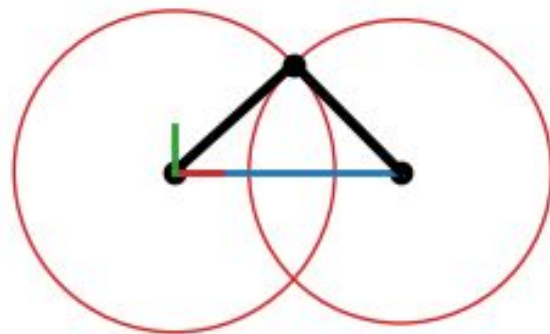
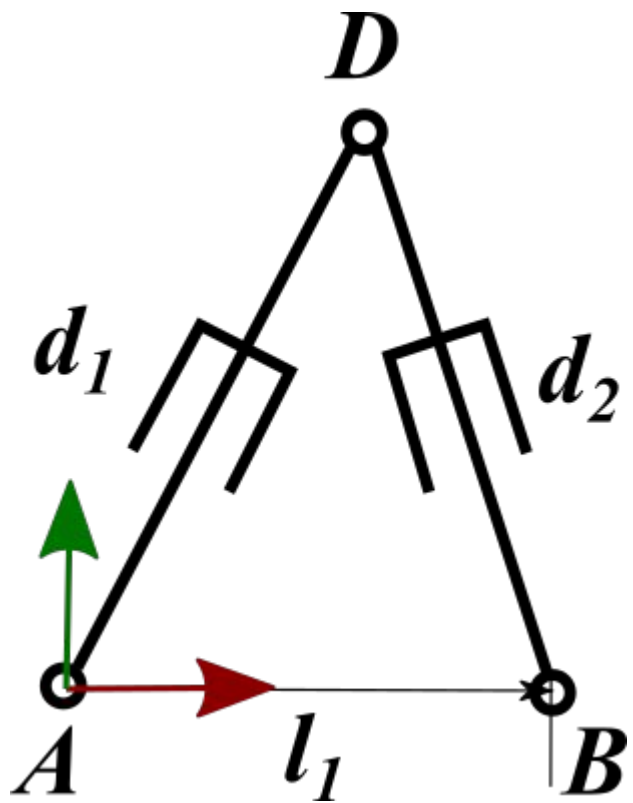
- Co je cílem?
 - A: z kloubových souřadnic spočítat pozici koncového s.s.
 - B: z koncového s.s. spočítat kloubové souřadnice
 - C: spočítat síly působící v kloubech



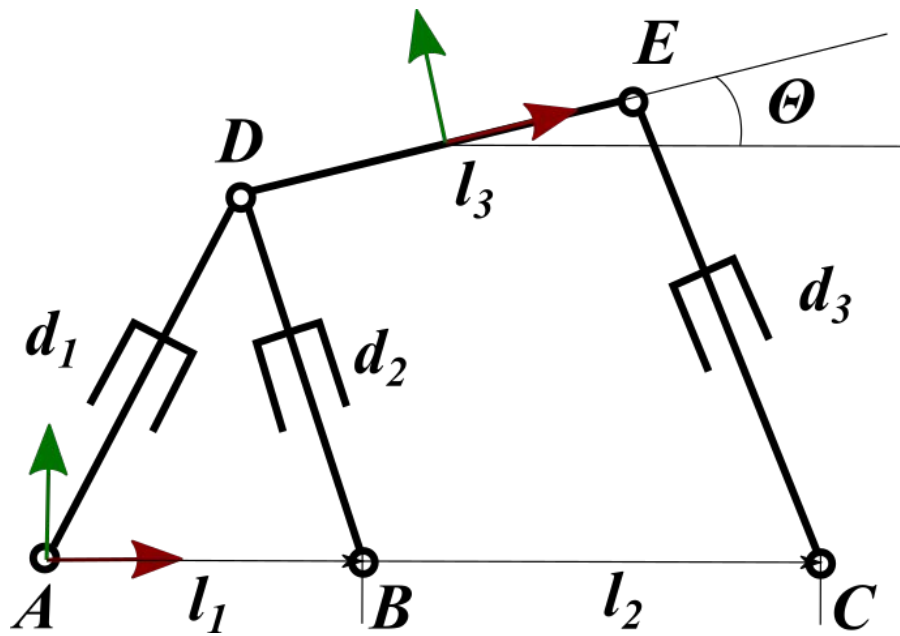
Bod D



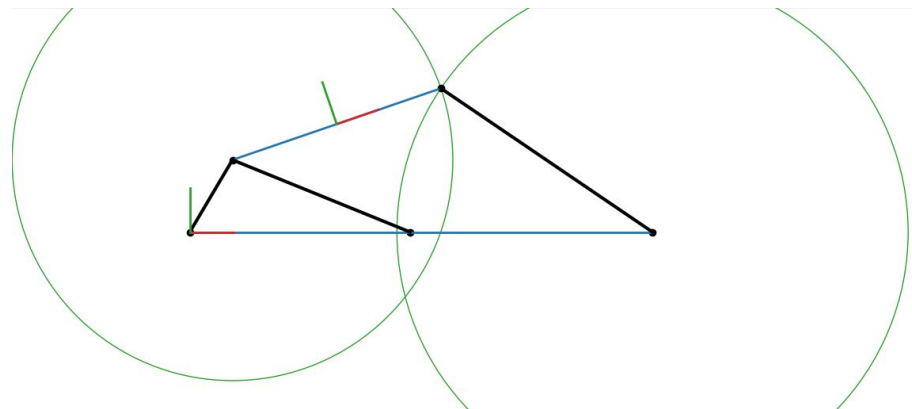
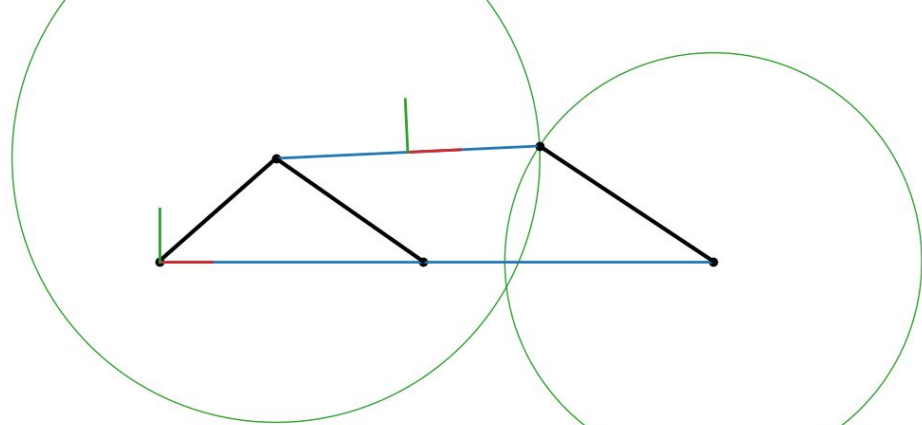
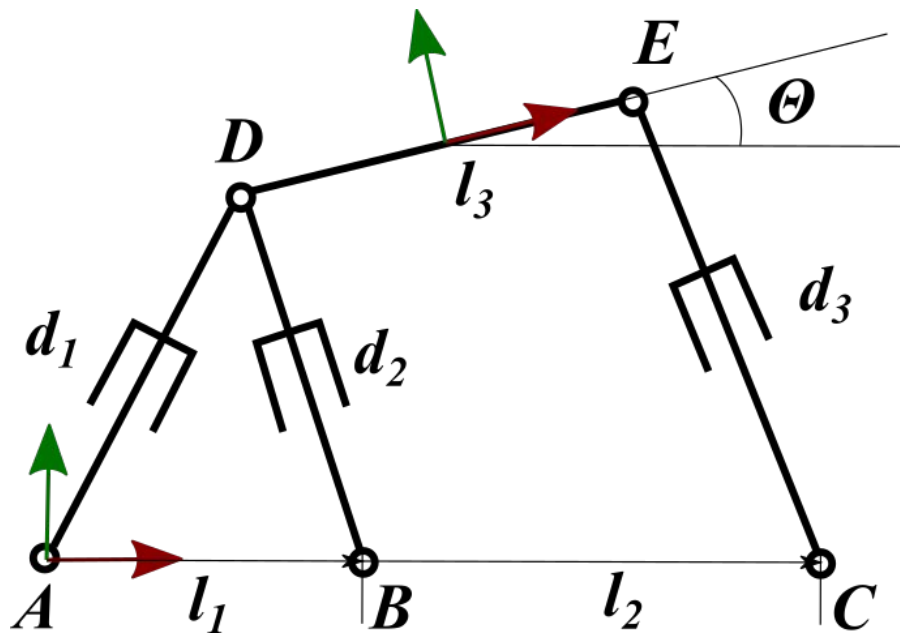
Bod D



Bod E



Bod E

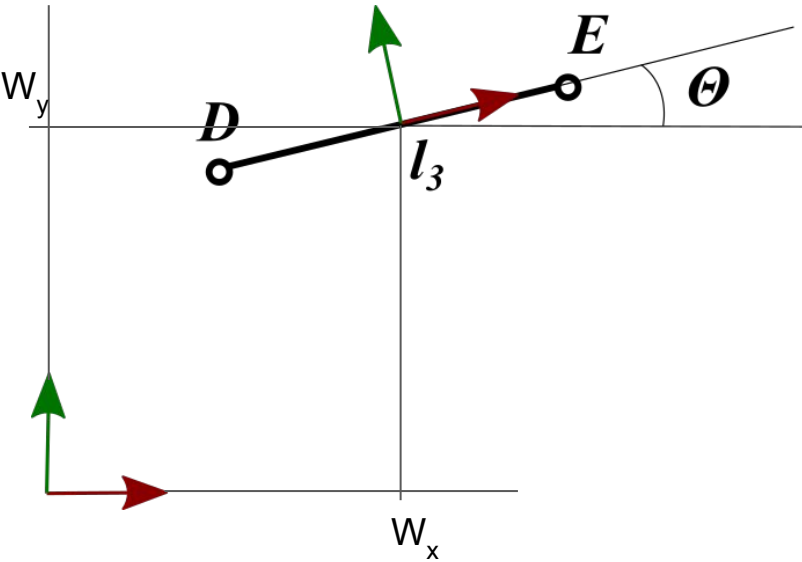


Počet řešení

Jaký je maximální počet řešení DKT?

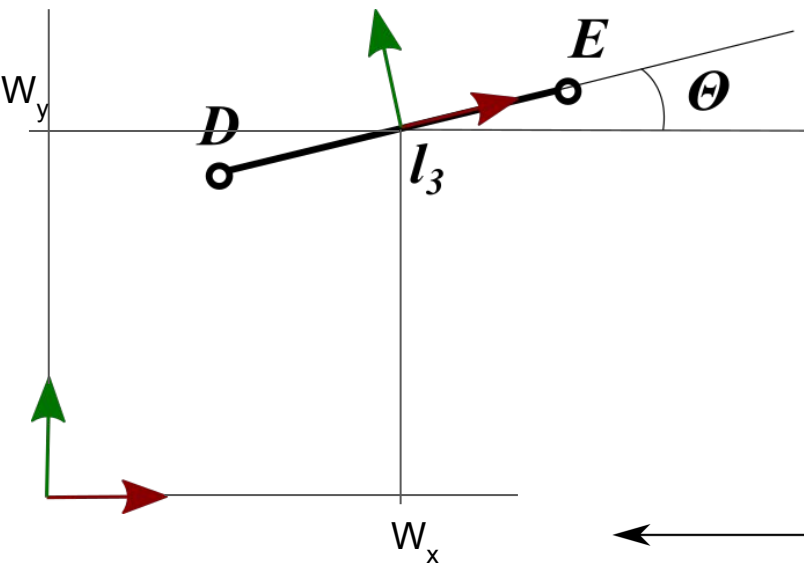
- A. 1
- B. 2
- C. 4
- D. 8

Body na souřadnice



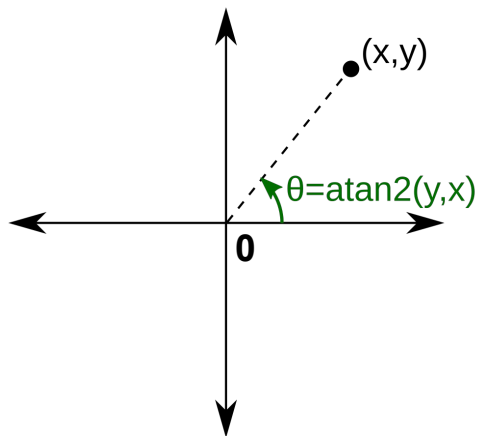
$$W = D + (E-D)/2$$

Body na souřadnice

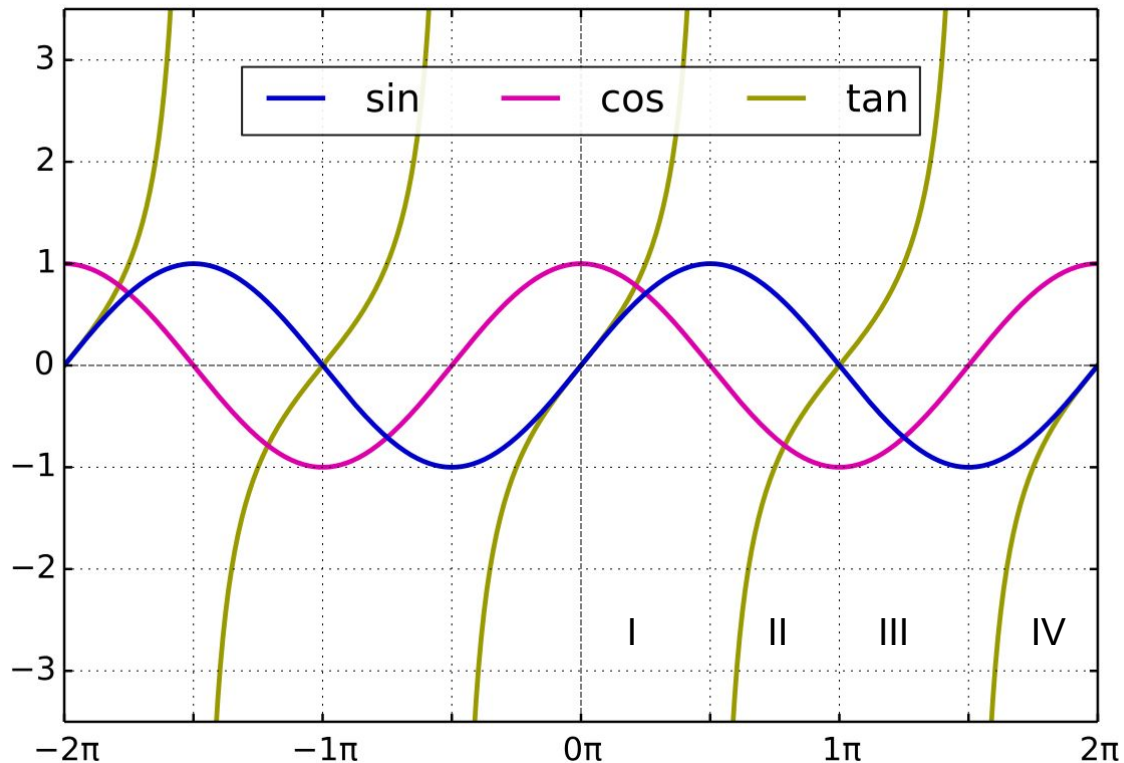


$$W = D + (E-D)/2$$

$$(x,y)^T = E - D$$



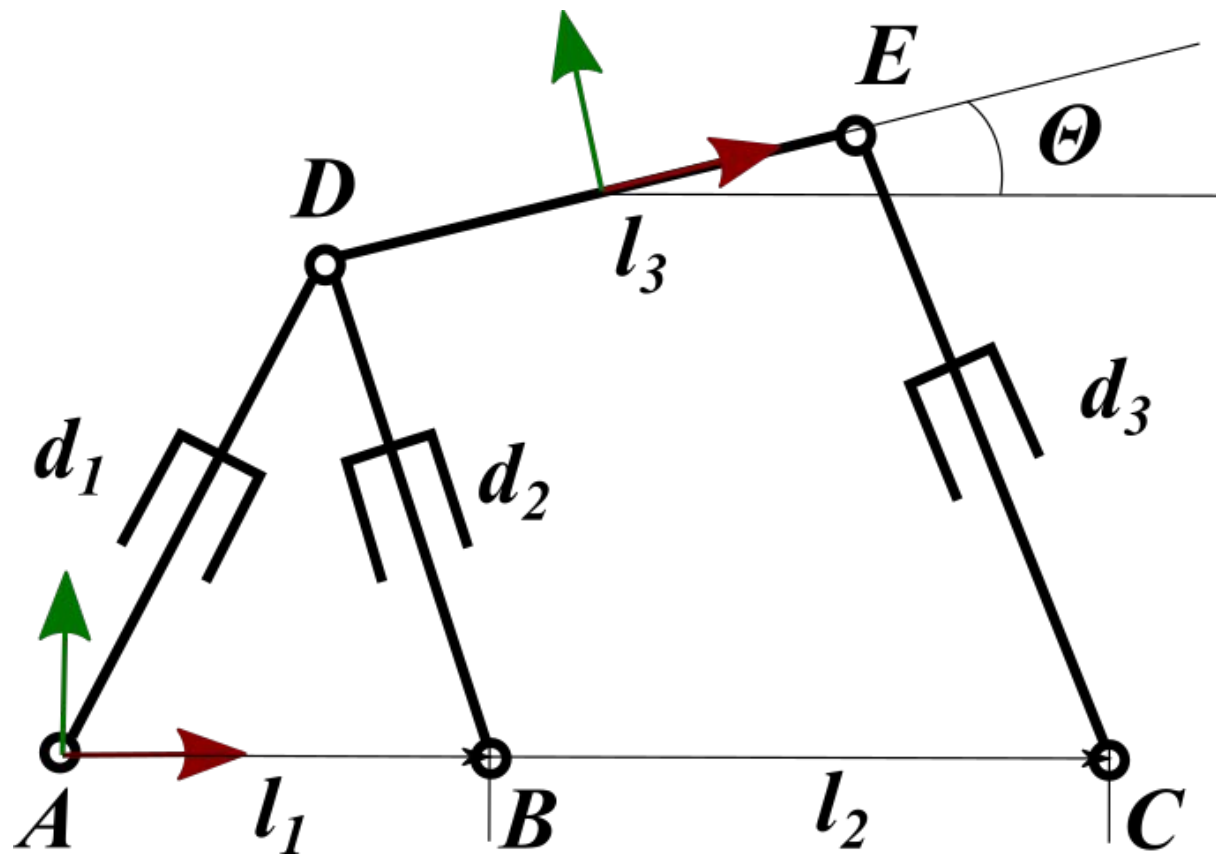
Proc ne atan?

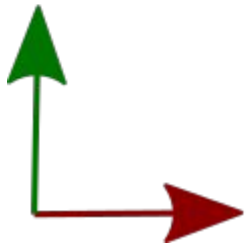
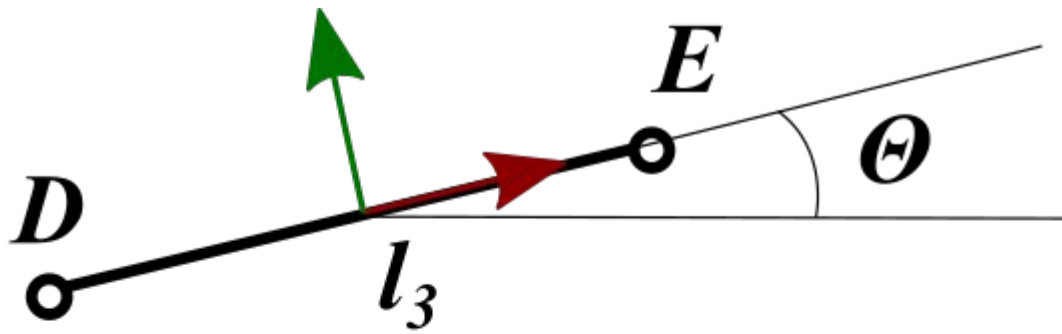


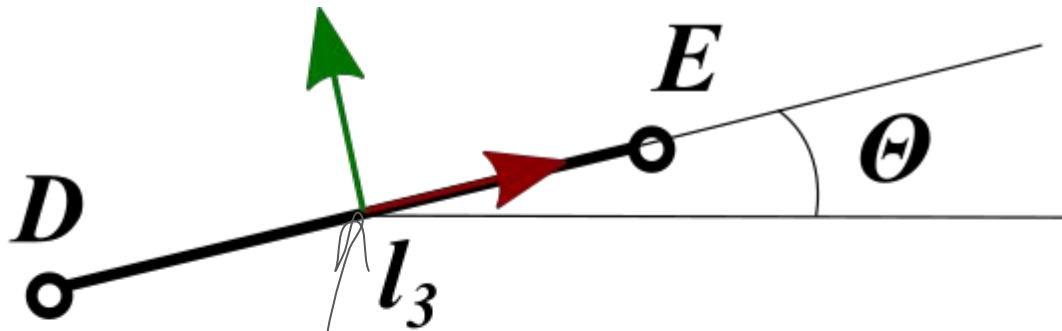
	I	II	III	IV
sin	+	+	-	-
cos	+	-	-	+
tan	+	-	+	-

- Z hodnoty $\text{asin}()$ neurčíme kv. I vs II nebo III vs IV
- \cos je fázově posunutý
- $\tan(x) = \sin(x) / \cos(x)$
- atan nemá dostatek informací na určení kvadrantu

IKT





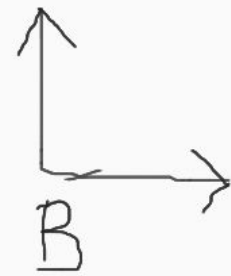


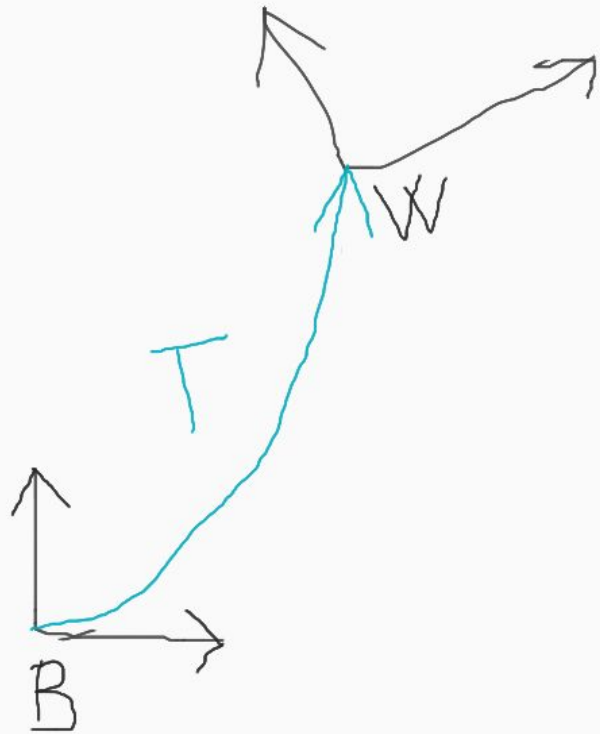
$$T = \begin{pmatrix} R(\theta) & x \\ 0 & y \\ 0 & z \end{pmatrix}$$

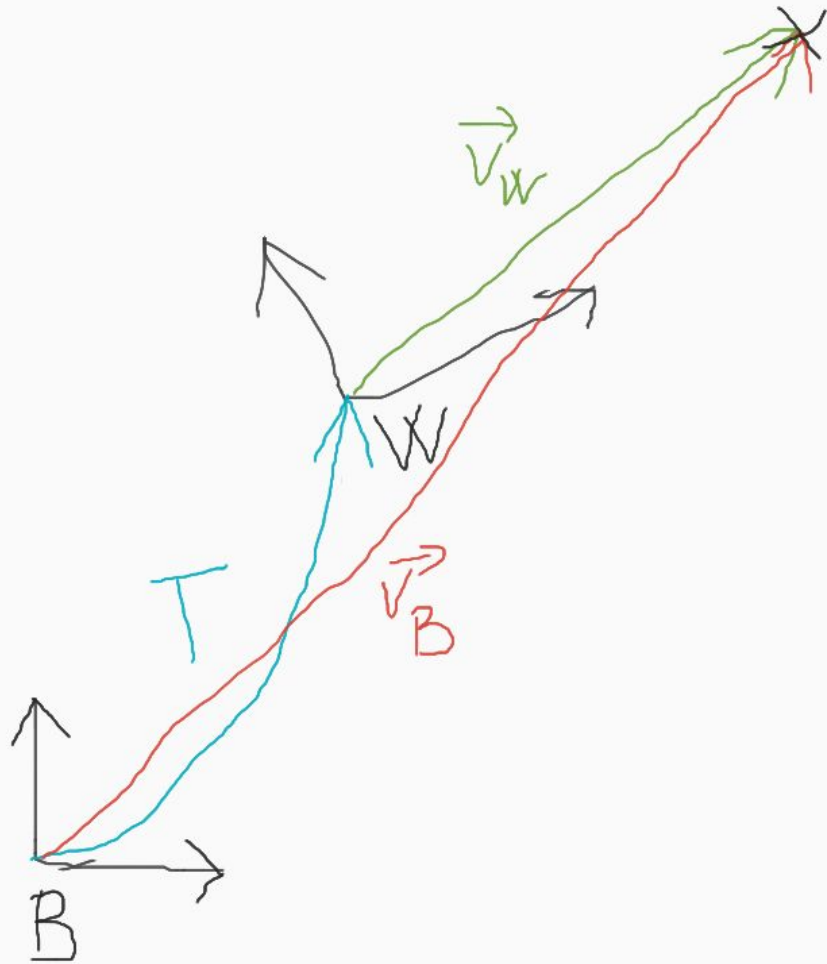
Transformace

- Homogenní souřadnice
- $R(\theta)$ je 2x2 rotační matice

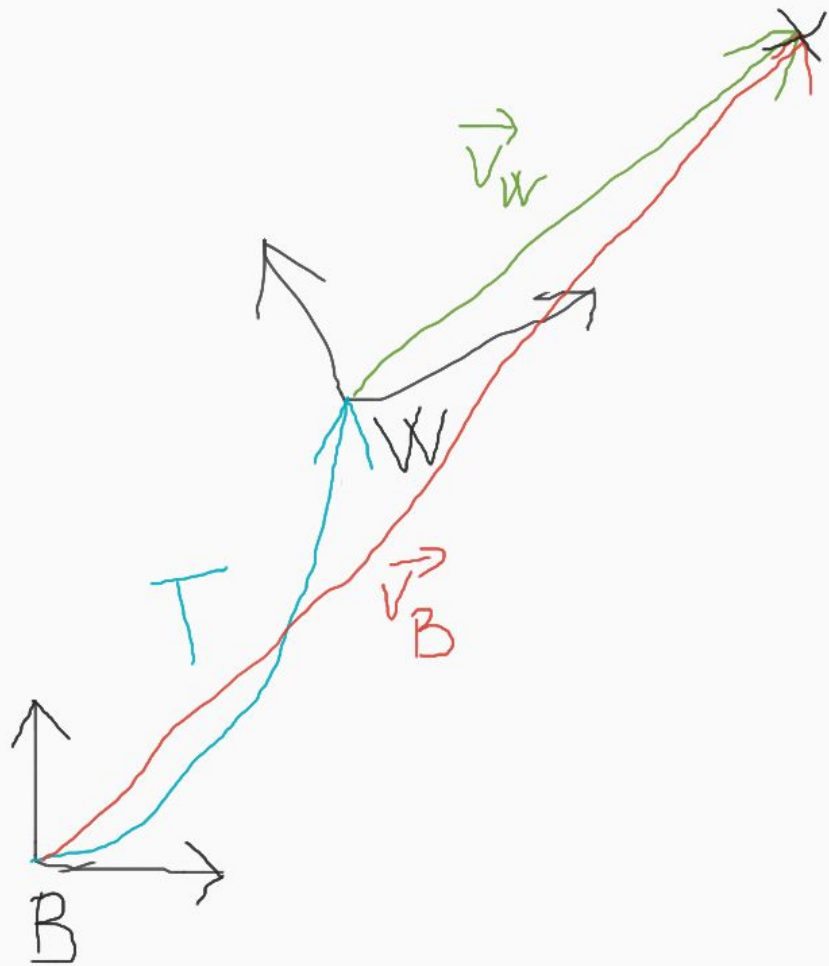
$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$



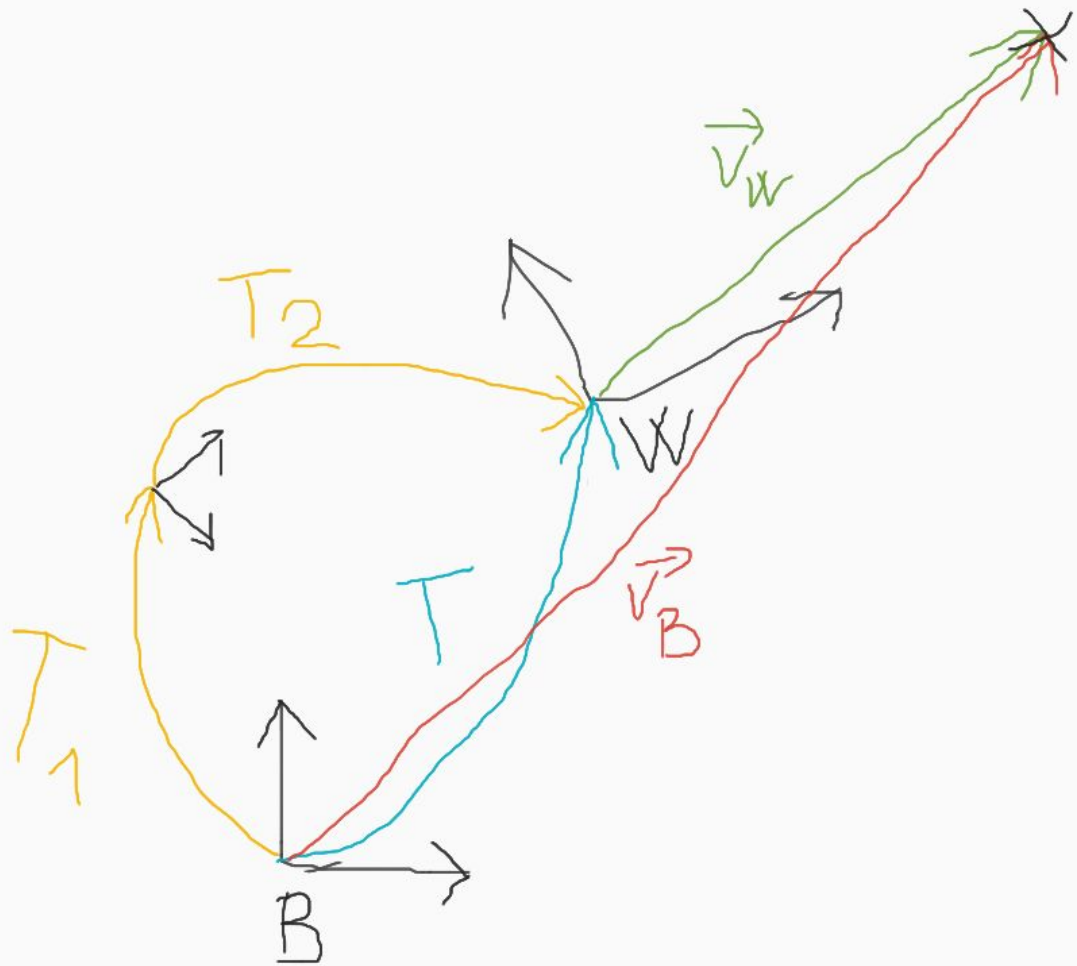




- A. $v_W = T v_B$
 B. $v_B = T v_W$

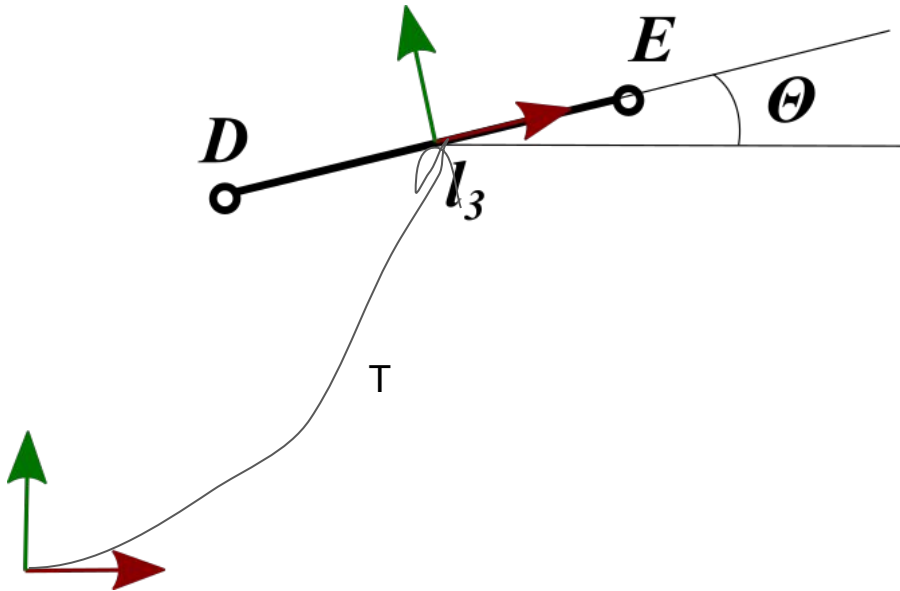


$$\vec{v}_B = T \vec{v}_W$$



$$\begin{aligned} \vec{v}_B &= T \vec{v}_W \\ &= T_1 T_2 \vec{v}_W \end{aligned}$$

Bod D a E?

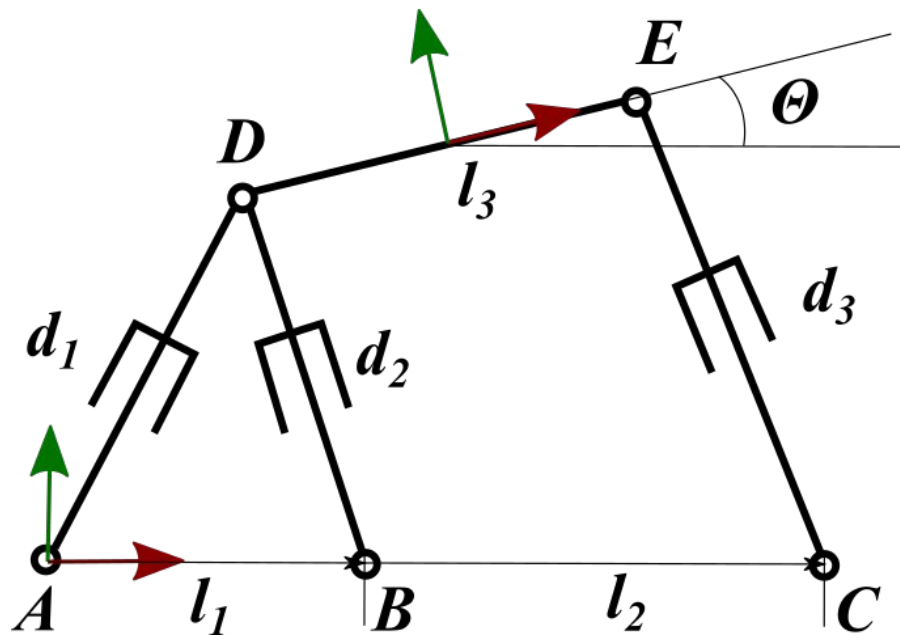


$$E_h = T (l_3/2, 0, 1)^T$$

$$D_h = T (-l_3/2, 0, 1)^T$$

Výpočet délek

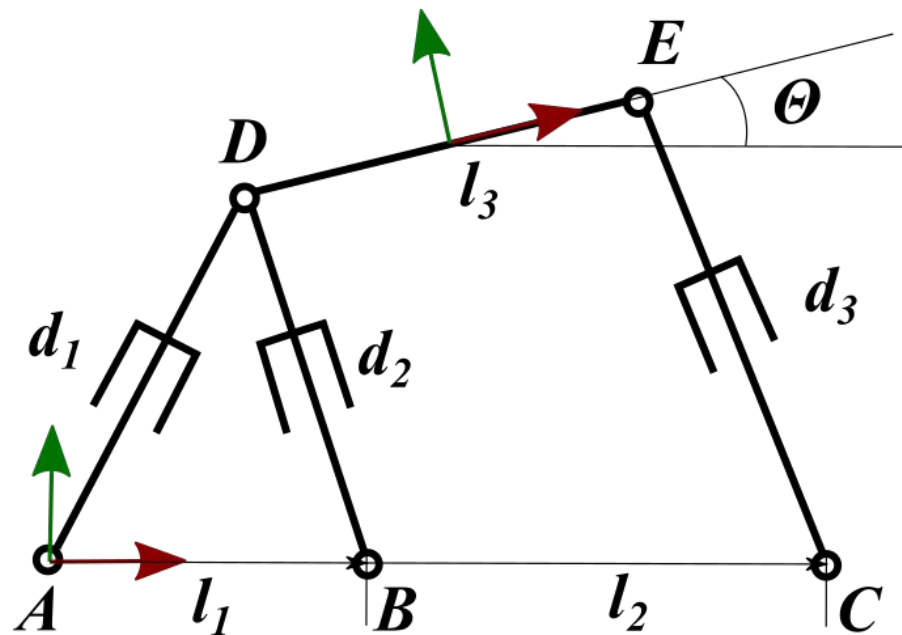
- $\|A - D\| = d_1$
- $d_1^2 = (A_x - D_x)^2 + (A_y - D_y)^2 \rightarrow d_1 = \text{sqrt}(\dots)$
- Existuje jiné řešení pro d_1 ?
 - A: Ano
 - B: Ne



Výpočet délek

Celkový počet řešení IKT?

- A. 1
- B. 4
- C. 8
- D. 16



Závěr pro paralelní manipulátor

- Vaším úkolem je:
 - Napsat vazbové rovnice
 - Vyřešit DKT (jenom x, y)
 - Vyřešit IKT
- Pozor na:
 - Numerické problémy (atan2, porovnávání integer/float)
 - Kvalitu kódu
 - Pomocné funkce (např. výpočet průsečíků)
 - Cykly vs copy-paste (nepište stejný kód vícekrát)

Reprezentace rotace ve 3D

- Rotační matice
 - 3x3 matice
 - $\text{inv}(R) = R^T$
- Eulerovy úhly
 - Např. $R = R_x R_y R_z$
 - Jak ale získat rotaci kolem os?
- Osa - úhel
 - Osa \mathbf{u} a úhel θ
- Kvaternion
 - $q = (\cos(\theta/2), \sin(\theta/2)\mathbf{u})$

Osa úhel a rotační matice

- Rodriguesův vzorec pro rotaci

$$R = I \cos \theta + (1 - \cos \theta) \mathbf{u} \mathbf{u}^T + \mathbf{u} \times \sin \theta$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Osa úhel a rotační matice

$$\begin{bmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Rodriguesův vzorec pro rotaci

$$R = I \cos \theta + (1 - \cos \theta) \mathbf{u} \mathbf{u}^T + \mathbf{u}_\times \sin \theta$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_\times = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Osa úhel a rotační matice

$$\begin{bmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Rodriguesův vzorec pro rotaci

$$R = I \cos \theta + (1 - \cos \theta) \mathbf{u} \mathbf{u}^T + \mathbf{u}_\times \sin \theta$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_\times = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$