# Struktury a uniony, přesnost výpočtů a vnitřní reprezentace číselných typů

Jan Faigl

Katedra počítačů
Fakulta elektrotechnická
České vysoké učení technické v Praze

Přednáška 06

B0B36PRP – Procedurální programování



## Přehled témat







# Část I

# Část 1 – Struktury a uniony





## Struktura – struct

- Struktura je konečná množina prvků (proměnných), které nemusí být stejného typu.
- Skladba struktury je definovaná uživatelem jako nový typ sestavený z již definovaných typů.
- K prvkům struktury **přistupujeme tečkovou notací**, např. `struct_proměnná.prvek`.
- K prvkům můžeme přistupovat přes ukazatel operátorem `->`, např.
  `proměnná_typu_ukazatel_na_struct->prvek`.
- Pro struktury stejného typu je definován operátor přiřazení.
  `var_struct1 = var_struct2;`
- Struktury (jako celek) **nelze** porovnávat relačním operátorem `==`.
- Struktura může být funkci předávána hodnotou i ukazatelem.
- Struktura může být návratovou hodnotou funkce.





## Příklad struct – Definice

- Bez zavedení nového typu (`typedef`) je nutné před identifikátor jména struktury uvádět klíčové slovo `struct`.
- Jméno struktury je ve jmenném prostoru složených typů (struktur).

```
struct record {
   int number;
   double value;
};
```

```
typedef struct {
   int n;
   double v;
} item;
```

```
record r; /* IT IS NOT ALLOWED! */
          /* Type record is not known */

struct record r; /* Keyword struct is required */
item i;     /* type item defined using typedef */
```

- Zavedením nového typu `typedef` používáme definovaný typ a nemusíme používat (a ani definovat) jméno struktury.

lec06/struct.c





## Definice jména struktury a typu struktury

- Uvedením `struct record` zavádíme nové jméno struktury `record`.

```
struct record {
   int number;
   double value;
};
```

  - Definujeme idenfikátor `record` ve jmeném prostoru struktur.
- Definicí typu `typedef` zavádíme nové jméno typu `record`.

```
typedef struct record record;
```

  - Definujeme globální idenfikátor `record` jako jméno typu `struct record`.
- Obojí můžeme kombinovat v jediné definici jména a typu struktury.

```
typedef struct record {
   int number;
   double value;
} record;
```

```
typedef struct record_struct_name {
   int number;
   double value;
} record_type;
```





## Příklad struct – Inicializace

- Struktury:

```
struct record {
   int number;
   double value;
};
```

```
typedef struct {
   int n;
   double v;
} item;
```

- Proměnné typu struktura můžeme inicializovat prvek po prvku.

```
struct record r;
r.value = 21.4;
r.number = 7;
```

- Podobně jako pole lze inicializovat přímo při definici

```
item i = { 1, 2.3 };
```

- nebo pouze konkrétní položky (ostatní jsou nulovány).

```
struct record r2 = { .value = 10.4 };
```

lec06/struct.c





## Příklad struct jako parametr funkce

- Struktury můžeme předávat jako parametry funkcí hodnotou.

```
void print_record(struct record rec) {
   printf("record: number(%d), value(%lf)\n",
   rec.number,  rec.value);
}
```

- Nebo hodnotou ukazatele

```
void print_item(item *v) {
   printf("item: n(%d), v(%lf)\n", v->n, v->v);
}
```

- Při předávání parametru
  - **hodnotou** se vytváří nová proměnná a původní obsah předávané struktury se kopíruje na zásobník (pro složený typ je definován operátor přiřazení);
  - **hodnotou ukazatele** se kopíruje pouze hodnota ukazatele (adresa) a pracujeme tak s původní strukturou.

lec06/struct.c





## Složený typ, operátor přiřazení a pole jako prvek složeného typu 1/2

- Velikost složeného typu musí být známa během překladu, proto můžeme mít definovaný operátor přiřazení.

  *Nebo naopak, abychom mohli jednoduše přiřazovat, tak potřebujeme znát velikost typu.*
- Prvek složeného typu může být pole (definované velikosti) nebo ukazatel.

```
1  void print(const char *str, int n, int *a);
2
3  #define N 10 // We need named literal.
4
5  int main(void)
6  {
7     struct { // Anonymous struct
8        int a[N]; // Defined size, no VLA
9     } s1, s2; // Two struct variables
10
11    printf("s1 %p; s2 %p\n", &s1, &s2);
12    for (int i = 0; i < n; ++i) {
13       s1.a[i] = i;
14    }
15    print("s1.a", n, s1.a);
16    s2 = s1; // Assignment
17    print("s2.a", n, s2.a);
18    for (int i = 0; i < n; ++i) {
19       s1.a[i] = n - i;
20    }
21    print("s1.a", n, s1.a);
22    print("s2.a", n, s2.a);
23    return 0;
24 } // end main()
25
26 void print(const char *str, int n, int *a) {
27    printf("%s %p: ", str, a);
28    for (int i = 0; i < n; ++i) {
29       printf("%d%s", a[i], i < (n-1) ? ", " : "\n");
30    }
31 }
```

lec06/demo-struct_array.c

## Složený typ, operátor přiřazení a pole jako prvek složeného typu 2/2

Příklad `lec06/demo-struct_array.c`

- Používáme anonymní složený typ - definice strukturu přímo v definici proměnných `s1` a `s2`.
- Musíme použít textový literál pro definici velikosti položky `a` jako pole definované délky.
- Ve funkci `print()` tiskneme hodnotu adresy, kde je alokované pole.

*V našem případě se shoduje s adresou, kde je struktura uložena. Struktura je „organizovaný" pohled na blok paměti důležitý zejména pro zpřehlední programu. Při běhu programu vlastně není nutné mít v paměti dílčí jména prvku složeného typu.*

```
s1 0x7fffffffe840; s2 0x7fffffffe818
s1.a 0x7fffffffe840: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
s2.a 0x7fffffffe818: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
s1.a 0x7fffffffe840: 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1
s2.a 0x7fffffffe818: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
```

- V příkladu si vyzkoušejte chování překladu a programu v případě použití VLA nebo konstantní proměnné definující velikost pole.
- Pole definované velikosti nahraďte dynamicky alokovaným polem.





## Příklad struct – Přiřazení

- Hodnoty proměnné stejného typu struktury můžeme přiřadit operátorem `=`.

```
struct record {
   int number;
   double value;
};
```

```
typedef struct {
   int n;
   double v;
} item;
```

```
struct record rec1 = { 10, 7.12 };
struct record rec2 = { 5, 13.1 };
item i;
print_record(rec1); /* number(10), value(7.120000) */
print_record(rec2); /* number(5), value(13.100000) */
rec1 = rec2;
i = rec1; /* IT IS NOT ALLOWED! */
// Different types, albeit with the same memory representation.
print_record(rec1); /* number(5), value(13.100000) */
```

lec06/struct.c





## Příklad struct – Přímá kopie paměti

- Jsou-li dvě struktury stejně veliké, můžeme přímo kopírovat obsah příslušné paměťové oblasti. *Například funkcí `memcpy()` z knihovny `string.h`*

```
struct record r = { 7, 21.4};
item i = { 1, 2.3 };
print_record(r); /* number(7), value(21.400000) */
print_item(&i); /* n(1), v(2.300000) */
if (sizeof(i) == sizeof(r)) {
   printf("i and r are of the same size\n");
   memcpy(&i, &r, sizeof(i));
   print_item(&i); /* n(7), v(21.400000) */
}
```

- V tomto případě je interpretace hodnot v obou strukturách identická, obecně tomu však být nemusí. Například v případě změny pořadí prvků typu `int` a `double`.

lec06/struct.c





## Struktura struct a velikost

- Vnitřní reprezentace struktury nutně nemusí odpovídat součtu velikostí jednotlivých prvků.

```
struct record {
   int number;
   double value;
};
```

```
typedef struct {
   int n;
   double v;
} item;
```

```
printf("Size of int: %lu size of double: %lu\n", sizeof(int), sizeof(
    double));
printf("Size of record: %lu\n", sizeof(struct record));
printf("Size of item: %lu\n", sizeof(item));
```

```
Size of int: 4 size of double: 8
Size of record: 16
Size of item: 16
```

lec06/struct.c





## Struktura struct a velikost 1/2

- Při kompilaci zpravidla dochází k zarovnání prvků na velikost slova příslušné architektury.

*Např. 8 bytů v případě 64-bitové architektury.*

*Jednotlivé prvky jsou na adrese v násobkuNapř. 8 bytů v případě 64-bitové architektury.*

- Můžeme explicitně předepsat kompaktní paměťovou reprezentaci, např. direktivou `__attribute__((packed))` překladačů `clang` a `gcc`.

```
struct record_packed {
   int n;
   double v;
} __attribute__((packed));
```

lec06/struct.c





## Struktura struct a velikost 2/2

- Nebo

```
typedef struct __attribute__((packed)) {
   int n;
   double v;
} item_packed;
```

- Příklad výstupu:

```
printf("Size of int: %lu size of double: %lu\n", sizeof(int), sizeof(double));
printf("record_packed: %lu\n", sizeof(struct record_packed));
printf("item_packed: %lu\n", sizeof(item_packed));
```

```
Size of int: 4 size of double: 8
Size of record_packed: 12
Size of item_packed: 12
```

lec06/struct.c

- Zarovnání zpravidla přináší rychlejší přístup do paměti, ale zvyšuje paměťové nároky.

http://www.catb.org/esr/structure-packing

https://stackoverflow.com/questions/4306186/structure-padding-and-packing





## Proměnné se sdílenou pamětí – union

- **Union** je množina prvků (proměnných), které nemusí být stejného typu.
- Prvky unionu sdílejí společně stejná paměťová místa.

*Překrývají se*

- Velikost unionu je dána velikostí největšího z jeho prvků.
- Skladba unionu je definována uživatelem jako nový typ sestavený z již definovaných typů.
- K prvkům unionu se přistupuje tečkovou notací.
- Pokud nedefinujeme nový typ je nutné k identifikátoru proměnné unionu uvádět klíčové slovo `union`. *Podobně jako u struktury `struct`.*

```
union Nums {
   char c;
   int i;
};
Nums nums; /* THIS IS NOT ALLOWED! Type Nums is not known! */
union Nums nums;
```





## Příklad union 1/2

- Union složený z proměnných typu: `char`, `int` a `double`.

```
int main(int argc, char *argv[])
{
   union Numbers {
      char c;
      int i;
      double d;
   };
   printf("size of char %lu\n", sizeof(char));
   printf("size of int %lu\n", sizeof(int ));
   printf("size of double %lu\n", sizeof(double));
   printf("size of Numbers %lu\n", sizeof(union Numbers));

   union Numbers numbers;

   printf("Numbers c: %d i: %d d: %lf\n", numbers.c, numbers.i, numbers.d);
```

- Příklad výstupu.

```
size of char 1
size of int 4
size of double 8
size of Numbers 8
Numbers c: 48 i: 740313136 d: 0.000000
```

lec06/union.c





## Příklad union 2/2

- Proměnné sdílejí paměťový prostor.

```
numbers.c = 'a';
printf("\nSet the numbers.c to 'a'\n");
printf("Numbers c: %d i: %d d: %lf\n", numbers.c, numbers.i, numbers.d);

numbers.i = 5;
printf("\nSet the numbers.i to 5\n");
printf("Numbers c: %d i: %d d: %lf\n", numbers.c, numbers.i, numbers.d);

numbers.d = 3.14;
printf("\nSet the numbers.d to 3.14\n");
printf("Numbers c: %d i: %d d: %lf\n", numbers.c, numbers.i, numbers.d);
```

- Příklad výstupu

```
Set the numbers.c to 'a'
Numbers c: 97 i: 1374389601 d: 3.140000

Set the numbers.i to 5
Numbers c: 5 i: 5 d: 3.139999

Set the numbers.d to 3.14
Numbers c: 31 i: 1374389535 d: 3.140000
```

lec06/union.c

## Inicializace union

- Proměnnou typu union můžeme inicializovat při definici.

```
union {
   char c;
   int i;
   double d;
} numbers = { 'a' };
```

*Pouze první položka (proměnná) může být inicializována.*

- V C99 můžeme inicializovat konkrétní položku (proměnnou).

```
union {
   char c;
   int i;
   double d;
} numbers = { .d = 10.3 };
```





## Příklad struktura, pole a výčtový typ 1/3

- Hodnoty (konstanty) výčtového typu jsou celá čísla, která mohou být použita jako indexy (pole).
- Také je můžeme použít pro inicializaci pole struktur.

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <string.h>

enum weekdays { MONDAY, TUESDAY, WEDNESDAY, THURSDAY, FRIDAY };

typedef struct {
   char *name;
   char *abbr; // abbreviation
} week_day_s;

const week_day_s days_en[] = {
   [MONDAY] = { "Monday", "mon" },
   [TUESDAY] = { "Tuesday", "tue" },
   [WEDNESDAY] = { "Wednesday", "wed" },
   [THURSDAY] = { "Thursday", "thr" },
   [FRIDAY] = { "Friday", "fri" },
};
```

lec06/demo-struct.c





## Příklad struktura, pole a výčtový typ 2/3

- Připravíme si pole struktur pro konkrétní jazyk (angličtina a čeština).
- Program vytiskne jméno a zkratku dne v týdnu dle čísla dne v týdnu.

*V programu používáme jednotné číslo dne bez ohledu na jazykovou mutaci.*

```
const week_day_s days_cs[] = {
   [MONDAY] = { "Pondeli", "po" },
   [TUESDAY] = { "Utery", "ut" },
   [WEDNESDAY] = { "Streda", "st" },
   [THURSDAY] = { "Ctvrtek", "ct" },
   [FRIDAY] = { "Patek", "pa" },
};
int main(int argc, char *argv[], char **envp)
{
   int day_of_week = argc > 1 ? atoi(argv[1]) : 1;
   if (day_of_week < 1 || day_of_week > 5) {
      fprintf(stderr, "(EE) File: '%s' Line: %d -- Given day of week out of range\n",
        __FILE__, __LINE__);
      return 101;
   }
   day_of_week -= 1; // start from 0
```

lec06/demo-struct.c





## Příklad struktura, pole a výčtový typ 3/3

- Detekci národního prostředí provedeme podle hodnoty proměnné prostředí.

*Pro jednoduchost detekujeme češtinu na základě výskytu řetězce "cs" v hodnotě proměnné prostředí* LC_CTYPE.

```
   _Bool cz = 0;
   while (*envp != NULL) {
      if (strstr(*envp, "LC_CTYPE") && strstr(*envp, "cs")) {
         cz = 1;
         break;
      }
      envp++;
   }
   const week_day_s *days = cz ? days_cs : days_en;

   printf("%d %s %s\n", day_of_week,
         days[day_of_week].name,
         days[day_of_week].abbr
         );
   return 0;
}
```

lec06/demo-struct.c

V programu jsme využili koncept definování datových struktur, které následně programově přepínáme a využíváme.
Alternativně můžeme data načítat ze souboru. *V programu se snažíme obecně pracovat s datovými structurami.*





# Část II

# Část 2 – Vnitřní reprezentace číselných typů





## Přesnost výpočtu 1/2

- Ztráta přesnosti při aritmetických operacích.

### Příklad sčítání dvou čísel

```
#include <stdio.h>

int main(void)
{
   double a = 1e+10;
   double b = 1e-10;

   printf("a  : %24.12lf\n", a);
   printf("b  : %24.12lf\n", b);
   printf("a+b: %24.12lf\n", a + b);

   return 0;
}

clang sum.c && ./a.out
a  : 10000000000.000000000000
b  :            0.000000000100
a+b: 10000000000.000000000000
```

lec06/sum.c





## Přesnost výpočtu 2/2

### Příklad dělení dvou čísel

```
#include <stdio.h>

int main(void)
{
   const int number = 100;
   double dV = 0.0;
   float fV = 0.0f;

   for (int i = 0; i < number; ++i) {
      dV += 1.0 / 10.0;
      fV += 1.0 / 10.0;
   }

   printf("double value: %lf ", dV);
   printf(" float value: %lf ", fV);

   return 0;
}

clang division.c && ./a.out
double value: 10.000000  float value: 10.000002
```

lec06/division.c





## Přesnost výpočtu - strojová přesnost

- Strojová přesnost $\epsilon_m$ - nejmenší desetinné číslo, které přičtením k 1.0 dává výsledek různý od 1, pro $|v| < \epsilon_m$, platí

$$v + 1.0 == 1.0.$$

*Symbol == odpovídá porovnání dvou hodnot (test na ekvivalenci).*

- Zaokrouhlovací chyba - nejméně $\epsilon_m$.
- Přesnost výpočtu - aditivní chyba roste s počtem operací v řádu $\sqrt{N} \cdot \epsilon_m$.
  - Často se však kumuluje preferabilně v jedno směru v řádu $N \cdot \epsilon_m$.





## Zdroje a typy chyby

- Chyby matematického modelu - matematická aproximace fyzikální situace.
- Chyby vstupních dat.
- Chyby numerické metody.
- Chyby zaokrouhlovací.

- Absolutní chyba aproximace
  $E(x) = \hat{x} - x$, $\hat{x}$ přesná hodnota, $x$ aproximace.
- Relativní chyba $RE(x) = \frac{\hat{x}-x}{x}$.

## Podmíněnost numerických úloh

- Podmíněnost úlohy $C_p = \frac{\text{relativní chyba výstupních údajů}}{\text{relativní chyba vstupních údajů}}$.
- Dobře podmíněná úloha $C_p \approx 1$.
- Výpočet je dobře podmíněný, je-li málo citlivý na poruchy ve vstupních datech.
- Numericky stabilní výpočet - vliv zaokrouhlovacích chyb na výsledek je malý.
- Výpočet je stabilní, je-li dobře podmíněný a numericky stabilní.





## Možnosti zvýšení přesnosti

- Reprezentace racionálních čísel - podíl dvou celočíselných hodnot, např. *Homogenní souřadnice*.
- „Libovolná přesnost" - speciální knihovny, např. `gmp` až do výše volné paměti.

*Souřadnice x,y - 7511164176768 346868669952 3739567104 ∼ 2008,57; 92,76.*

*Informativní*





## Příklady chyb

- Ariane 5 - 4.6.1996
  40 sekund po startu explodovala. Datová konverze z 64-bitového desetinné reprezentace na 16-ti bitový znaménkový integer.

  `http://www.esa.int/esaCP/Pr_33_1996_p_EN.html`
- Systém Patriot - 25.2.1991
  Systémový čas v desetinách sekundy, převod na sekundy realizován dělením 10, registry pouze 24 bitů.

  `http://www.ima.umn.edu/~arnold/disasters/patriot.html`

  `http://www5.informatik.tu-muenchen.de/~huckle/bugse.html`





## Datové typy

- Při návrhu algoritmu abstrahujeme od binární podoby paměti počítače.
- S daty pracujeme jako s hodnotami různých datových typů, které jsou uloženy v paměti předepsaným způsobem.
- Datový typ specifikuje
  - Množinu hodnot, které je možné v počítači uložit;

    *Záleží na způsobu reprezentace.*
  - Množinu operací, které lze s hodnotami typu provádět.
- **Jednoduchý typ** je takový typ, jehož hodnoty jsou atomické, tj. z hlediska operací dále nedělitelné.





## Příklad číselných typů a vnitřní reprezentace

- 32-bitový typ `int` umožňuje uložit celá čísla v intervalu $\langle -2147483648, 2147483647 \rangle$, pro která můžeme použít:
  - aritmetické operace $+$, $-$, $*$, $/$ s výsledkem hodnota typu **int**;
  - relační operace $==$, $!=$, $>$, $<$, $>=$, $<=$.
  - Inicializovat hodnotou dekadického nebo hexadecimálního literálu.

```
1 int i; // definice promenne typu int
2 int decI = 120;  // definice spolu s prirazenim
3 int hexI = 0x78; //pocatecni hodnota v 16-kove soustave
4
5 int sum = 10 + decI + 0x13; //pocatecni hodnota je vyraz
```

- Vnitřní reprezentace typů (např. `int`, `short`, `double`) umožňuje uložit čísla z definovaného rozsahu s různou přesností.
- Číselné datové typy lze vzájemně převádět implicitní nebo explicitní typovou konverzí.
- Při konverzi nemusí být hodnota zachována – viz `lec06/demo-types.c`.





## Reprezentace dat v počítači

- V počítači není u datové položky určeno jaký konkrétní datový typ je v paměti uložen.
- Proto musíme přidělení paměti **definovat** s jakými typy dat budeme pracovat.
- Překladač tuto definici hlídá a volí odpovídající strojové instrukce pro práci s daty, např. jako s odpovídajícími číselnými typy.

  *Např. neceločíselné (float) typy a využití tzv. FPU (Floating Point Unit).*

### Příklad zápisů stejného čísla v různých soustavách.

- $0100\ 0001_{(2)}$ – binární zápis jednoho bajtu (8-mi bitů);
- $65_{(10)}$ – odpovídající číslo v dekadické soustavě;
- $41_{(16)}$ – odpovídající číslo v šestnáctkové soustavě;
- Obsah paměťového místa $0100\ 0001_{(2)}$ o velikosti 1 byte může být interpretován jako znak A.





## Číselné soustavy

- Číselné soustavy – poziční číselné soustavy (polyadické) jsou charakterizovány bází udávající kolik číslic lze maximálně použít.
  $x_d = \sum_{i=-n}^{i=m} a_i \cdot z^i$, kde $a_i$ je číslice a $z$ je základ soustavy.
- Unární – např. počet vypitých půllitrů.
- Binární soustava (bin) – 2 číslice 0 nebo 1.

$$\begin{aligned} 11010,01_{(2)} &= \mathbf{1}\cdot 2^4 + \mathbf{1}\cdot 2^3 + \mathbf{0}\cdot 2^2 + \mathbf{1}\cdot 2^1 + \mathbf{0}\cdot 2^0 + \mathbf{0}\cdot 2^{-1} + \mathbf{1}\cdot 2^{-2} \\ &= \mathbf{1}\cdot 16 + \mathbf{1}\cdot 8 + \mathbf{0}\cdot 4 + \mathbf{1}\cdot 2 + \mathbf{0}\cdot 1 + \mathbf{0}\cdot \frac{1}{2} + \mathbf{1}\cdot \frac{1}{4} \\ &= 26,25 \end{aligned}$$

- Desítková soustava (dec) – 10 číslic, znaky 0 až 9.

$$\begin{aligned} 138,24_{(10)} &= \mathbf{1}\cdot 10^2 + \mathbf{3}\cdot 10^1 + \mathbf{8}\cdot 10^0 + \mathbf{2}\cdot 10^{-1} + \mathbf{4}\cdot 10^{-2} \\ &= \mathbf{1}\cdot 100 + \mathbf{3}\cdot 10 + \mathbf{8}\cdot 1 + \mathbf{2}\cdot 0,1 + \mathbf{4}\cdot 0,01 \end{aligned}$$

- Šestnáctková soustava (hex) – 16 číslic, znaky 0 až 9 a A až F.

$$\begin{aligned} 0x7D_{(16)} &= 7\cdot 16^1 + D\cdot 16^0 \\ &= 112 + 13 \\ &= 125 \end{aligned}$$





## Kódování záporných čísel

- Přímý kód – znaménko je určeno prvním bitem (zleva), snadné stanovení absolutní hodnoty. Reprezentace má dvě nuly.

| | |
|---|---|
| $121_{(10)}$ | $0111\ 1001_{(2)}$ |
| $-121_{(10)}$ | $1111\ 1001_{(2)}$ |
| $0_{(10)}$ | $0000\ 0000_{(2)}$ |
| $-0_{(10)}$ | $1000\ 0000_{(2)}$ |

- Inverzní kód – záporné číslo odpovídá bitové negaci kladné hodnoty čísla. Reprezentace má dvě nuly.

| | |
|---|---|
| $121_{(10)}$ | $0111\ 1001_{(2)}$ |
| $-121_{(10)}$ | $1000\ 0110_{(2)}$ |
| $0_{(10)}$ | $0000\ 0000_{(2)}$ |
| $-0_{(10)}$ | $1111\ 1111_{(2)}$ |

- **Doplňkový kód** – záporné číslo je uloženo jako hodnota kladného čísla po bitové negaci zvětšená o 1. Jediná reprezentace nuly.

| | |
|---|---|
| $121_{(10)}$ | $0111\ 1001_{(2)}$ |
| $-121_{(10)}$ | $1000\ 0110_{(2)}$ |
| $-121_{(10)}$ | $1000\ 0111_{(2)}$ |
| $127_{(10)}$ | $0111\ 1111_{(2)}$ |
| $-128_{(10)}$ | $1000\ 0000_{(2)}$ |
| $-1_{(10)}$ | $1111\ 1111_{(2)}$ |





## Více-bajtová reprezentace a pořadí bajtů

- Číselné typy s více-bajtovou reprezentací mohou mít bajty uloženy v různém pořadí.
  - *little-endian* – nejméně významný bajt se ukládá na nejnižší adresu.

    *x86, ARM*
  - *big-endian* – nejvíce významný bajt se ukládá na nejnižší adresu.

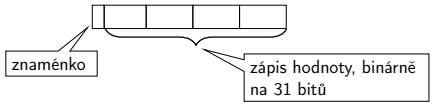
    *Motorola, ARM*
- Pořadí je důležité při přenosu hodnot z paměti jako posloupnosti bajtů a jejich následné interpretaci.
- **Network byte order** – je definován pro síťový přenos a není tak nutné řešit konkrétní architekturu.
  - Tj. hodnoty z paměti jsou ukládány a přenášeny v tomto pořadí bajtů a na cílové stanici pak zpětně zapsány do konkrétního nativního pořadí.

*big-endian*

*Informativní*

## Příklad reprezentace celých čísel **int**

- Na 32-bitových a 64-bitových strojích je celočíselný typ **int** zpravidla reprezentován 32 bity (4 byty).




- Typ **int** je znaménkový typ.
- Znaménko je zakódováno v 1 bitu a vlastní číselná hodnota pak ve zbývajících 31 bitech.
  - Největší číslo je $0111\ldots111 = 2^{31}-1 = 2\,147\,483\,647$. *Reprezentujeme i nulu.*
  - Nejmenší číslo je $-2^{31} = -2\,147\,483\,648$. *0 už je zahrnuta.*
- Pro zobrazení záporných čísel je použit doplňkový kód.

Nejmenší číslo v doplňkovém kódu $1000\ldots000$ je $-2^{31}$.





## Reprezentace záporných celých čísel

- Doplňkový kód – $D(x)$.
- Pro 8-mi bitovou reprezentací čísel.
  - Můžeme reprezentovat $2^8$=256 čísel.
  - Rozsah $r = 256$.

$$D(x) = \begin{cases} x & \text{pro } 0 \leq x < \frac{r}{2} \\ r + x & \text{pro } -\frac{r}{2} \leq x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

- Příklady

| Desítkově | Doplňkový kód |
|---|---|
| 0–127 | 0000 0000 – 0111 1111 |
| 128 | nelze zobrazit na 8 bitů v doplňkovém kódu |
| -128 | $D(-128) = 256 + (-128) = 128$ to je 1000 0000 |
| -1 | $D(-1) = 256 + (-1) = 255$ to je 1111 1111 |
| -4 | $D(-4) = 256 + (-4) = 252$ to je 1111 1100 |

*Informativní*





## Reprezentace reálných čísel

- Pro uložení čísla vyhrazujeme omezený paměťový prostor.

Příklad – zápis čísla $\frac{1}{3}$ v dekadické soustavě

- $= 33333333\ldots3333$
- $= 0,\overline{3}$
- $\approx 0,33333333333333333333$
- $\approx 0,333$

*V trojkové soustavě:* $0 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^0 + 1 \cdot 3^{-1} = (0,1)_3$

- Nepřesnosti v zobrazení reálných čísel v konečné posloupnosti bitů způsobují
  - Iracionální čísla, např. $e$, $\pi$, $\sqrt{2}$;
  - Čísla, která mají v dané soustavě periodický rozvoj, např. $\frac{1}{3}$;
  - Čísla, která mají příliš dlouhý zápis.





## Model reprezentace reálných čísel

- Reálná čísla se zobrazují jako aproximace daným rozsahem paměťového místa.
- Reálné číslo $x$ se zobrazuje ve tvaru

$$x = \textbf{mantisa} \cdot \textbf{základ}^{\textbf{exponent}}.$$

- Pro jednoznačnost zobrazení musí být mantisa normalizována, např. $0,1 \leq m < 1$ nebo ve tvaru $\pm 1.[\text{mantisa}] \cdot 2^{\text{exponent}}$
- Ve vyhrazeném paměťovém prostoru je pro zvolený základ uložen exponent a mantisa jako dvě celá čísla.

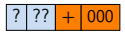




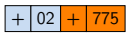

## Příklad modelu reprezentace reálných čísel 1/2

Reprezentace na 7 bajtů se základem 10

- Délka mantisy 3 pozice (bajtů) plus znaménko.
- Délka exponentu 2 pozice plus znaménko.
- Základ $z = 10$. *Reprezentace dle IEEE-754 používá dvojkový základ*
- Reprezentace nuly.




- Příklad $x = 77,5 = 0,775 \cdot z^{+02}$

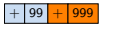




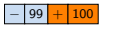



## Příklad modelu reprezentace reálných čísel 2/2 – Limitní zobrazitelná čísla

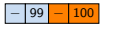
- Maximální zobrazitelné kladné číslo $0,999z^{99}$.



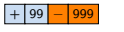

- Minimální zobrazitelné kladné číslo $0,100z^{-99}$.

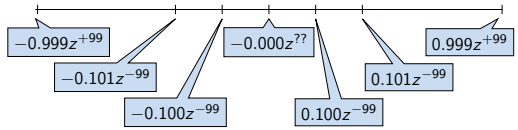



- Maximální zobrazitelné záporné číslo $-0,100z^{-99}$.




- Minimální zobrazitelné záporné číslo $-0,999z^{+99}$.



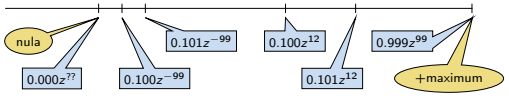








## Model reprezentace reálných čísel a vzdálenost mezi aproximacemi

- Rozsah hodnot pro konkrétní exponent je dán velikostí mantisy.
- Absolutní vzdálenost dvou aproximací tak záleží na exponentu.
  - Mezi hodnotou 0 a 1,0 je využít celý rozsah mantisy pro exponenty $\{-99, -98, \ldots, 0\}$.




- Aproximace reálných čísel nejsou na číselné ose rovnoměrně rozloženy.


*Čím větší exponent, tím větší „mezery" mezi sousedními aproximacemi čísel.*



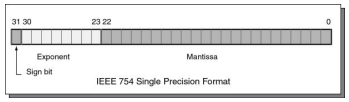


## Reprezentace necelých čísel – IEEE 754

- Reálné číslo $x$ se zobrazuje ve tvaru Základ 2.

$$x = (-1)^{\textbf{s}} \textbf{mantisa} \cdot 2^{\textbf{exponent}-\textbf{bias}}.$$ *IEEE 754, ISO/IEC/IEEE 60559:2011*

- Mantisa je **normalizována** na první jedničku vlevo (v soustavě o dvojkovém základu).
- **float** – 32 bitů (4 bajty): $s$ – 1 bit znaménko (+ nebo −), **exponent** – 8 bitů, tj. 256 možností. **mantisa** – 23 bitů ≈ 16,7 milionu možností.




- **double** – 64 bitů (8 bajtů).
  - $s$ – 1 bit znaménko (+ nebo −).
  - **exponent** – 11 bitů, tj. 2048 možností.
  - **mantisa** – 52 bitů ≈ 4,5 biliardy možností (4 503 599 627 370 495).
- **bias** umožňuje reprezentovat exponent vždy jako kladné číslo.

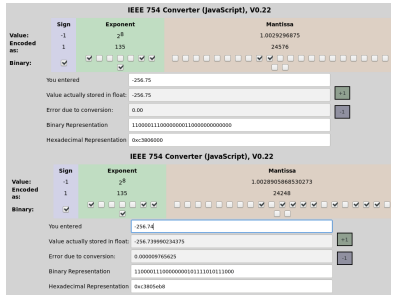
*Lze zvolit, např.* $bias = 2^{eb-1} - 1$, *kde eb je počet bitů exponentu.*

http://www.root.cz/clanky/norma-ieee-754-a-pribuzni-formaty-plovouci-radove-tecky





## Příklad reprezentace **float** hodnot dle IEEE 754




- Chyba reprezentace -256.75 vs -256.74.
- `Infinity` (0x7f800000), `-Infinity` (0xff800000), a `NaN` (0x7fffffff).

https://www.h-schmidt.net/FloatConverter/IEEE754.html

## Příklady reprezentace hodnot typu `float`

Reprezentace čísla 85,125 (`float`)

- 85 odpovídá $1010101_{(2)}$.
- 0,125 odpovídá 001
  - $0,125/2^{-1} = 0,25 \mid 0$
  - $0,125/2^{-2} = 0,50 \mid 0$
  - $0.125/2^{-3} = 1.00 \mid 1$
- $85,125$ odpovídá $1010101,001_{(2)} = 1,01010101001_{(2)} \times 2^{6}$,
- Bias pro `float` je 127.
- Exponet je $127 + 6 = 133$
- 133 odpovídá $10000101_{(2)}$.
- Normalizovaná mantisa je $010101001_{(2)}$, kterou doplníme nulami na 23 bitů (zprava, je to desetinné číslo).
- **0 - 1000 0101 - 0101 0100 1000 0000 0000 000**.
- **01000010 10101010 01000000 00000000**.
- V šestnáctkové soustavě **0x42 0xaa 0x40 0x00**, tedy **0x42aa4000**.

Reprezentace čísla 0,1 (`float`)

- 0,1 má periodický rozvoj
  1. $0,1 * 2 = 0,2 \mid 0$
  2. $0,2 * 2 = 0,4 \mid 0$
  3. $0,4 * 2 = 0,8 \mid 0$
  4. $0,8 * 2 = 1,6 \mid 1$
  5. $0,6 * 2 = 1,2 \mid 1$
  6. $0,2 * 2 = 0,4 \mid 0$
- Opakuje se 0011, 23-bitů tak reprezentuje menší hodnotu.
- $0,1_{(10)} \sim 0,0001\,1001\,1001\,1001\,1001\,1001\,100_{(2)} = 1,1001\,1001\,1001\,1001\,1001\,100_{(2)} \times 2^{-4}$.
- Exponet je $127 - 4 = 123$ odpovídá $0111\,1011_{(2)}$.
- Normalizovaná mantisa ~~1~~,100 1100 1100 1100 1100 1100.
- **0 - 0111 1011 - 100 1100 1100 1100 1100 1100**.
- **00111101 11001100 11001100 11001100**.
- V šestnáctkové soustavě to je **0x3d 0xcc 0xcc 0xcc**, tedy **0x3dcccccc**.
- Prakticky je 0,1 převedeno na o něco větší číslo **0x3dcccccd**, protože absolutní chyba je menší.

lec06/floats.c





## Přiřazovací operátor a příkaz

- Slouží pro nastavení hodnoty proměnné.

  *Uložení číselné hodnoty do paměti, kterou proměnná reprezentuje.*

- Tvar přiřazovacího operátoru.

  $$\langle \textbf{proměnná} \rangle = \langle \textbf{výraz} \rangle$$

  *Výraz je literál, proměnná, volání funkce, ...*

- Zkrácený zápis

  $$\langle \textbf{proměnná} \rangle\ \langle \textbf{operátor} \rangle = \langle \textbf{výraz} \rangle$$

- Přiřazení je výraz asociativní zprava.
- Přiřazovací příkaz – výraz zakončený středníkem ;

```
int x; //definice promenne x
int y; //definice promenne y

x = 6;
y = x = x + 6;
```

```
int x, y; //definice promennych x a y

x = 10;
y = 7;

y += x + 10;
```





## Typové konverze

- Typová konverze je operace převedení hodnoty nějakého typu na hodnotu typu jiného.
- Typová konverze může být
  - **implicitní** – vyvolá se automaticky;
  - **explicitní** – je nutné v programu explicitně uvést.
- Konverze typu **int** na **double** je implicitní.

  *Hodnota typu `int` může být použita ve výrazu, kde se očekává hodnota typu `double`, dojde k automatickému převodu na hodnotu typu `double`.*

### Příklad

```
double x;
int i = 1;

x = i; // hodnota 1 typu int se automaticky převede
       // na hodnotu 1.0 typu double
```

- Implicitní konverze je bezpečná.





## Explicitní typové konverze

- Převod hodnoty typu **double** na **int** je třeba explicitně předepsat.
- Dojde k „odseknutí" necelé části hodnoty `int`.

### Příklad

```
double x = 1.2; // definice proměnné typu double
int i;          // definice proměnné typu int
int i = (int)x; // hodnota 1.2 typu double se převede
                // na hodnotu 1 typu int
```

- Explicitní konverze je potenciálně nebezpečná.

### Příklady

```
double d = 1e30;
int i = (int)d;

// i je -2147483648
// to je asi -2e9 misto 1e30
```

```
long l = 5000000000L;
int i = (int)l;

// i je 705032704
// (orízntuté 4 bajty)
```

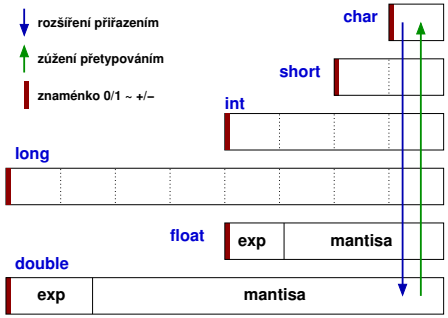
lec06/demo-type_conversion.c





## Konverze primitivních číselných typů

- Primitivní datové typy jsou vzájemně nekompatibilní, ale jejich hodnoty lze převádět.








## Matematické funkce

- `<math.h>` – základní funkce pro práci s „reálnými" čísly.
  - Výpočet odmocniny necelého čísla `x`.
    `double sqrt(double x);`, `float sqrtf(float x);`

    *V C funkce nepřetěžujeme, proto jsou jména odlišena.*
  - `double pow(double x, double y);` – výpočet obecné mocniny.
  - `double atan2(double y, double x);` – výpočet *arctan* $y/x$ s určením kvadrantu.
  - Symbolické konstanty – `M_PI`, `M_PI_2`, `M_PI_4`, atd.
    - `#define M_PI 3.14159265358979323846`
    - `#define M_PI_2 1.57079632679489661923`
    - `#define M_PI_4 0.78539816339744830962`
  - `isfinite()`, `isnan()`, `isless()`, ... – makra pro porovnání reálných čísel.
  - `round()`, `ceil()`, `floor()` – zaokrouhlování, převod na celá čísla.
- `<complex.h>` – funkce pro počítání s komplexními čísly. *ISO C99*
- `<fenv.h>` – funkce pro řízení zaokrouhlování a reprezentaci dle IEEE 754. `man math`



# Část III

## Část 3 – Zadání 6. domácího úkolu (HW06)



## Zadání 6. domácího úkolu HW06

**Téma**: **Maticové počty**

Povinné zadání: **2b**; Volitelné zadání: **3b**; Bonusové zadání: **3b**

- **Motivace**: Získání zkušenosti s dvojrozměrným polem.
- **Cíl**: Osvojit si práci s polem variabilní délky a předávání ukazatelů.
- **Zadání**: `https://cw.fel.cvut.cz/wiki/courses/b0b36prp/hw/hw06`
  - Načtení vstupních hodnot dvou matic a znaku operace (`'*'` – násobení).
  - Volitelné zadání rozšiřuje úlohu o další operace s maticemi sčítání (`'+'`) a odčítání (`'-'`), které mohou být zapsány ve výrazu.
  - Bonusové zadání pak řeší zpracování celého výrazu, ve kterém jsou však jednotlivé matice uvedeny jako symboly, které jsou nejdříve definovány načtením hodnot matic ze standardního vstupu.

    Využití `struct` a dynamické alokace může být výhodnou, není však nutné.
- Termín odevzdání: 26.11.2022, 23:59:59 PST.
- Bonusová úloha: 14.01.2023, 23:59:59 PST.

*PST – Pacific Standard Time*





# Shrnutí přednášky

## Diskutovaná témata

- Struktury, způsoby definování, inicializace a paměťové reprezentace
- Uniony
- Přesnost výpočtu
- Vnitřní paměťová reprezentace celočíslených i neceločíselných číselných typů
- Knihovna `math.h`

- Příště: Standarní knihovny C. Rekurze.