Optimalizace

12. Lagrangeova dualita

Tom Werner

FEL ČVUT

Minimaxní nerovnost

Věta

Pro libovolné množiny X, Y a funkci $L\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ platí **minimaxní nerovnost**

$$\min_{x\in X} \underbrace{\max_{y\in Y} L(x,y)}_{F(x)} \geq \max_{y\in Y} \underbrace{\min_{x\in X} L(x,y)}_{G(y)}.$$

Rovnost nastává právě tehdy, existuje-li $(x^*, y^*) \in X \times Y$ (**sedlový bod**) splňující

$$L(x^*, y) \leq L(x^*, y^*) \leq L(x, y^*) \qquad \forall x \in X,\ y \in Y.$$

Příklady pro $X = Y = \{1, 2, 3, 4\}$:

x \ y	1	2	3	4	$F(x)$
1	-1	4	7	4	7
2	4	4	6	-2	6
3	1	5	3	3	5
4	3	5	3	2	5
$G(y)$	-1	4	3	-2	

x \ y	1	2	3	4	$F(x)$
1	-1	4	7	4	7
2	4	4	6	-2	6
3	1	0	$\boxed{3}$	3	3
4	3	3	$\boxed{3}$	2	3
$G(y)$	-1	0	3	-2	

Funkce s rozšířenou hodnotou

Mějme úlohu

$$\min\{\, f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in X,\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) \le \mathbf{0} \,\}$$

kde $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{g}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.
Tuto úlohu můžeme napsat jako

$$\min_{\mathbf{x} \in X} F(\mathbf{x})$$

kde

$$F(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{když } \mathbf{g}(\mathbf{x}) \le \mathbf{0} \\ +\infty & \text{jinak} \end{cases}$$

Formálně máme $F\colon X \to \bar{\mathbb{R}}$ kde

$$\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

značí **rozšířenou množinu reálných čísel**.

Lagrangeova dualita

Jsou dány $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{g}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Definujeme **Lagrangeovu funkci**

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + \mathbf{y}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}).$$

Princip Lagrangeovy duality:

$$\underbrace{\min_{\mathbf{x}\in X} \underbrace{\max_{\mathbf{y}\in Y} L(\mathbf{x}, \mathbf{y})}_{F(\mathbf{x})}}_{\text{primární úloha}} \geq \underbrace{\max_{\mathbf{y}\in Y} \underbrace{\min_{\mathbf{x}\in X} L(\mathbf{x}, \mathbf{y})}_{G(\mathbf{y})}}_{\text{duální úloha}}$$

- Jestliže $Y = \mathbb{R}^m$, pak

$$F(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^m} [f(\mathbf{x}) + \mathbf{y}^T \mathbf{g}(\mathbf{x})] = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{když } \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ +\infty & \text{jinak} \end{cases}$$

$$\min_{\mathbf{x}\in X} F(\mathbf{x}) = \min\{\, f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in X,\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \,\}$$

- Jestliže $Y = \mathbb{R}^m_+$, pak

$$F(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{y}\geq\mathbf{0}} [f(\mathbf{x}) + \mathbf{y}^T \mathbf{g}(\mathbf{x})] = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{když } \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \\ +\infty & \text{jinak} \end{cases}$$

$$\min_{\mathbf{x}\in X} F(\mathbf{x}) = \min\{\, f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in X,\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \,\}$$

Příklad: LP

Napišme duální úlohu k úloze LP

$$\min\{\, \mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \,\}$$

Zvolíme

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad X = \mathbb{R}^n, \quad Y = \mathbb{R}^m_+.$$

Lagrangeova funkce je

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \mathbf{y}^T(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} - \mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{y}^T\mathbf{b}.$$

Ověříme, že

$$F(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{y}\in Y} L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} \mathbf{c}^T\mathbf{x} & \text{když } \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ +\infty & \text{jinak} \end{cases}$$

Platí

$$G(\mathbf{y}) = \min_{\mathbf{x}\in X} L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} \mathbf{y}^T\mathbf{b} & \text{když } \mathbf{y}^T\mathbf{A} = \mathbf{c}^T \\ -\infty & \text{jinak.} \end{cases}$$

Duální úloha tedy je

$$\max_{\mathbf{y}\geq\mathbf{0}} G(\mathbf{y}) = \max\{\, \mathbf{b}^T\mathbf{y} \mid \mathbf{A}^T\mathbf{y} = \mathbf{c},\ \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \,\}.$$

Příklad: LP s intervalovým omezením

Napišme duální úlohu k úloze LP

$$\min\{\, \mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in [0,1]^n,\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \,\}$$

Zvolíme

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad X = [0,1]^n, \quad Y = \mathbb{R}^m.$$

Lagrangeova funkce je stejná jako minule. Ověříme, že

$$F(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{y}\in Y} L(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \begin{cases} \mathbf{c}^T\mathbf{x} & \text{když } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ +\infty & \text{jinak} \end{cases}$$

Platí

$$\begin{aligned} G(\mathbf{y}) = \min_{\mathbf{x}\in X} L(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \min_{\mathbf{x}\in[0,1]^n} (\mathbf{c}^T\mathbf{x} - \mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{y}^T\mathbf{b}) = \mathbf{y}^T\mathbf{b} + \min_{\mathbf{x}\in[0,1]^n} (\mathbf{c}^T - \mathbf{y}^T\mathbf{A})\mathbf{x} \\ &= \mathbf{y}^T\mathbf{b} + \min_{\mathbf{x}\in[0,1]^n} \sum_j (c_j - \mathbf{y}^T\mathbf{a}_j)x_j \\ &= \mathbf{y}^T\mathbf{b} + \sum_j \min_{x\in[0,1]} (c_j - \mathbf{y}^T\mathbf{a}_j)x = \mathbf{y}^T\mathbf{b} + \sum_j \min\{c_j - \mathbf{y}^T\mathbf{a}_j, 0\} \end{aligned}$$

protože $\min_{x\in[0,1]} dx = \min\{d,0\}$.

Duální úloha je $\max_{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^m} G(\mathbf{y})$.

Příklad: 0-1 LP

Napišme duální úlohu k úloze celočíselného LP

$$\min\{\, \mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \{0,1\}^n,\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \,\}$$

Zvolíme

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad X = \{0,1\}^n, \quad Y = \mathbb{R}^m.$$

Duální úloha vyjde stejná jako minule, protože

$$\min_{x\in\{0,1\}} dx = \min_{x\in[0,1]} dx = \min\{d, 0\}.$$

Příklad: Řešení lineární soustavy s nejmenší normou

Napišme duální úlohu k úloze

$$\min\{\, \tfrac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\,\}.$$

Zvolíme

$$f(\mathbf{x}) = \tfrac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{x}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad X = \mathbb{R}^n, \quad Y = \mathbb{R}^m.$$

Lagrangeova funkce je

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \tfrac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{x} + \mathbf{y}^T(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}) = \tfrac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{x} - \mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{y}^T\mathbf{b}.$$

Duální účelová funkce je

$$G(\mathbf{y}) = \min_{\mathbf{x}\in X} L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n}(\tfrac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{x} - \mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{y}^T\mathbf{b}).$$

Stacionární podmínka $\partial L(\mathbf{x}, \mathbf{y})/\partial\mathbf{x} = \mathbf{0}$ dá $\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{y}$. Po dosazení dostaneme

$$G(\mathbf{y}) = L(\mathbf{A}^T\mathbf{y}, \mathbf{y}) = \tfrac{1}{2}\mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{A}^T\mathbf{y} - \mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{A}^T\mathbf{y} + \mathbf{y}^T\mathbf{b} = \mathbf{y}^T\mathbf{b} - \tfrac{1}{2}\mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{A}^T\mathbf{y}.$$

Duální úloha je $\max\limits_{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^m} G(\mathbf{y})$.

Podmínky komplementarity

Máme úlohu

$$\min\{\, f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in X,\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) \le \mathbf{0} \,\}$$

a k ní Lagrangeovu funkci

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + \mathbf{y}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}).$$

Věta

Nechť $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \in X \times \mathbb{R}^m_+$ je sedlový bod Lagrangeovy funkce. Pak platí **podmínky komplementarity**

$$y_i^* g_i(\mathbf{x}^*) = 0 \qquad \forall i = 1, \ldots, m.$$

Důkaz. Platí

$$f(\mathbf{x}^*) = \max_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m_+} L(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) = \min_{\mathbf{x} \in X} L(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \le L(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \le f(\mathbf{x}^*)$$

Tedy $L(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = f(\mathbf{x}^*)$, z toho $\mathbf{y}^{*T} \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$, což je totéž jako $y_i^* g_i(\mathbf{x}^*) = 0\ \forall i$.

Postačující podmínka pro silnou dualitu

Uvažujme primární úlohu

$$\min\{\, f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in X,\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \,\}$$

Věta

Nechť

- množina X je konvexní,
- funkce $f, g_1, \ldots, g_m$ jsou konvexní na X,
- funkce $g_1, \ldots, g_m$ splňují tzv. **constraint qualifications**.

Pak platí silná dualita.

Často užívaná constraint qualification (**Slaterova podmínka**):
Přípustná množina $\{\, \mathbf{x} \in X \mid \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \,\}$ má aspoň jeden vnitřní bod.