

# Optimalizace

## 11. Dualita v lineárním programování

---

Tom Werner, Tom Kroupa

FEL ČVUT

# Věty o dualitě

$$\begin{array}{ll} \min & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{za podm.} & \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \max & \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\ \text{za podm.} & \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \\ & \mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c} \end{array}$$

## Věta (o slabé dualitě)

Pro každá přípustná  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  platí  $\mathbf{c}^T \mathbf{x} \geq \mathbf{b}^T \mathbf{y}$ .

**Důkaz:** Pro přípustná  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  zřejmě platí  $\mathbf{c}^T \mathbf{x} \geq \mathbf{y}^T \mathbf{Ax} \geq \mathbf{y}^T \mathbf{b}$ .

## Věta (o komplementaritě)

Nechť  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  jsou přípustná. Pak  $\mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{b}^T \mathbf{y}$  právě když

$$\begin{array}{ll} \sum_j a_{ij} x_j = b_i & \text{nebo } y_i = 0 & \forall i \\ x_j = 0 & \text{nebo } \sum_i a_{ij} y_j = c_j & \forall j \end{array}$$

**Důkaz:** Podmínky komplementarity jdou napsat jako  $\mathbf{y}^T (\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) = 0 = (\mathbf{c}^T - \mathbf{y}^T \mathbf{A}) \mathbf{x}$ .

Věta pak plyne z  $\mathbf{c}^T \mathbf{x} \geq \mathbf{y}^T \mathbf{Ax} \geq \mathbf{y}^T \mathbf{b}$ .

## Věta (o silné dualitě)

Primární úloha má optimální řešení, právě když duální úloha má optimální řešení.

Pokud  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  jsou optimální řešení, pak  $\mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{b}^T \mathbf{y}$ .

**Důkaz** neuvádíme.

## Příklad na slabou dualitu

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 9 \\ 5 = \quad & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3 \\ 4 = \quad & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 1 \\ 5 = \quad & x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 3 \\ -1 = \quad & -x_1 + x_2 - 2x_3 \geq -1 \\ 2 = \quad & x_1 \geq 0 \\ 1 = \quad & x_2 \geq 0 \\ 0 = \quad & x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & 3y_1 + y_2 + 3y_3 - y_4 = 2 \\ 0 = \quad & y_1 \geq 0 \\ 0 = \quad & y_2 \geq 0 \\ 1 = \quad & y_3 \geq 0 \\ 1 = \quad & y_4 \geq 0 \\ 0 = \quad & 2y_1 + y_2 + y_3 - y_4 \leq 2 \\ 4 = \quad & y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_4 \leq 5 \\ -1 = \quad & 2y_1 + 2y_2 + y_3 - 2y_4 \leq 6 \end{aligned}$$

## Příklad na silnou dualitu + komplementaritu

$$\begin{array}{ll} \min & 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 5.4 \\ 3 = & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3 \\ 2.4 = & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 1 \\ 3 = & x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 3 \\ -0.6 = & -x_1 + x_2 - 2x_3 \geq -1 \\ 1.2 = & x_1 \geq 0 \\ 0.6 = & x_2 \geq 0 \\ 0 = & x_3 \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \max & 3y_1 + y_2 + 3y_3 - y_4 = 5.4 \\ 0.2 = & y_1 \geq 0 \\ 0 = & y_2 \geq 0 \\ 1.6 = & y_3 \geq 0 \\ 0 = & y_4 \geq 0 \\ 2 = & 2y_1 + y_2 + y_3 - y_4 \leq 2 \\ 5 = & y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_4 \leq 5 \\ 3 = & 2y_1 + 2y_2 + y_3 - 2y_4 \leq 6 \end{array}$$

## Dovolené možnosti řešitelnosti primární a duální úlohy

primár/duál	má optimum	neomezená	nepřípustná
má optimum	✓	✗	✗
neomezená	✗	✗	✓
nepřípustná	✗	✓	✓

- Tvrzení v prvním sloupci a prvním řádku plynou ze silné duality
- Zbylá tvrzení plynou ze slabé duality

# Věta o stínových cenách

Definujme funkci

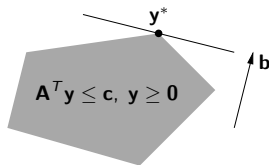
$$f(\mathbf{b}) = \min\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} = \max\{\mathbf{b}^T \mathbf{y} \mid \mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}$$

## Věta (o stínových cenách)

Nechť má duální úloha pro nějaké  $\mathbf{b}$  právě jedno optimální řešení  $\mathbf{y}^*$ .

Pak je funkce  $f$  na nějakém okolí bodu  $\mathbf{b}$  diferencovatelná a platí  $\nabla f(\mathbf{b}) = \mathbf{y}^*$ .

**Důkaz:** Duál nabývá optima v jediném extrémálním bodě  $\mathbf{y}^*$  přípustného mnohostěnu duálu:



Změníme-li nepatrně  $\mathbf{b}$ , optimální duální řešení se nezmění a zůstane jediné.

Tedy na malém okolí bodu  $\mathbf{b}$  je  $f(\mathbf{b}) = \mathbf{b}^T \mathbf{y}^*$  a  $\nabla f(\mathbf{b}) = \mathbf{y}^*$ .

## Příklad

$$\min \quad 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 5.402$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3.01$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 1$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 3$$

$$-x_1 + x_2 - 2x_3 \geq -1$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_3 \geq 0$$

$$\max \quad 3.01y_1 + y_2 + 3y_3 - y_4 = 5.402$$

$$0.2 = y_1 \geq 0$$

$$0 = y_2 \geq 0$$

$$1.6 = y_3 \geq 0$$

$$0 = y_4 \geq 0$$

$$2y_1 + y_2 + y_3 - y_4 \leq 2$$

$$y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_4 \leq 5$$

$$2y_1 + 2y_2 + y_3 - 2y_4 \leq 6$$

$$f(\mathbf{b}) = \mathbf{b}^T \mathbf{y}^* = (3.01, 1, 3, -1)^T (0.2, 0, 1.6, 0) = 5.402$$

# Duální úloha pro LP v rovnicovém tvaru

**Tvrzení:** Tyto dvě úlohy jsou navzájem duální:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{za podm.} \quad & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\ \text{za podm.} \quad & \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \\ & \mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c} \end{aligned}$$

**Důkaz:** Přepíšme úlohy jako

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{za podm.} \quad & \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \\ \text{za podm.} \quad & -\mathbf{Ax} \geq -\mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{b}^T (\mathbf{y}_+ - \mathbf{y}_-) \\ \text{za podm.} \quad & \mathbf{y}_+ \geq \mathbf{0} \\ \text{za podm.} \quad & \mathbf{y}_- \geq \mathbf{0} \\ & \mathbf{A}^T (\mathbf{y}_+ - \mathbf{y}_-) \leq \mathbf{c} \end{aligned}$$

neboli

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{za podm.} \quad & \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{A} \end{bmatrix} \mathbf{x} \geq \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ -\mathbf{b} \end{bmatrix} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & \begin{bmatrix} \mathbf{b}^T & -\mathbf{b}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_+ \\ \mathbf{y}_- \end{bmatrix} \\ \text{za podm.} \quad & \mathbf{y}_+, \mathbf{y}_- \geq \mathbf{0} \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T & -\mathbf{A}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_+ \\ \mathbf{y}_- \end{bmatrix} \leq \mathbf{c} \end{aligned}$$

O této dvojici víme, že je navzájem duální.



## Duální úloha pro LP v obecném tvaru

$\min$	$\sum_{j \in J} c_j x_j$	$\max$	$\sum_{i \in I} y_i b_i$	
za podm.	$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j = b_i$	za podm.	$y_i \in \mathbb{R}$	$\forall i \in I_0$
	$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j \geq b_i$		$y_i \geq 0$	$\forall i \in I_+$
	$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j \leq b_i$		$y_i \leq 0$	$\forall i \in I_-$
	$x_j \in \mathbb{R}$		$\sum_{i \in I} y_i a_{ij} = c_j$	$\forall j \in J_0$
	$x_j \geq 0$		$\sum_{i \in I} y_i a_{ij} \leq c_j$	$\forall j \in J_+$
	$x_j \leq 0$		$\sum_{i \in I} y_i a_{ij} \geq c_j$	$\forall j \in J_-$

kde

$$I = \{1, \dots, m\} = I_0 \cup I_+ \cup I_-$$

$$J = \{1, \dots, n\} = J_0 \cup J_+ \cup J_-$$

## Příklad:

$$\begin{array}{ll} \min & 2x_1 - 3x_3 + x_4 \\ \text{za podm.} & 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 6 \\ & -x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq 5 \\ & x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 \geq 0 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \in \mathbb{R} \\ & x_3 \geq 0 \\ & x_4 \leq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \max & 6y_1 + 5y_2 \\ \text{za podm.} & y_1 \in \mathbb{R} \\ & y_2 \leq 0 \\ & y_3 \geq 0 \\ & 2y_1 - y_2 + y_3 \leq 2 \\ & -y_1 + 2y_2 - y_3 = 0 \\ & y_1 - 3y_2 - y_3 \leq -3 \\ & 2y_1 - 3y_3 \geq 1 \end{array}$$

## Duální řešení jako certifikát optimality

Vektory  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  jsou optimální pro úlohy

$$\begin{array}{ll} \min & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{za podm.} & \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \max & \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\ \text{za podm.} & \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \\ & \mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c} \end{array}$$

právě tehdy, když splňují soustavu

$$\begin{array}{l} \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\ \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \\ \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c} \end{array}$$

Tedy přípustné duální řešení  $\mathbf{y}$  splňující  $\mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{b}^T \mathbf{y}$  je důkaz (**certifikát**) toho, že přípustné primární řešení  $\mathbf{x}$  je optimální.

## Příklady na LP dualitu

---

## Jak byste spočítali minimum z daných čísel?

$$\begin{array}{ll} \min & c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\ \text{za podm.} & x_1 + \cdots + x_n = 1 \\ & x_i \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \max & y \\ \text{za podm.} & y \in \mathbb{R} \\ & y \leq c_i \quad \forall i \end{array}$$

neboli

$$\begin{array}{ll} \min & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{za podm.} & \mathbf{1}^T \mathbf{x} = 1 \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \max & y \\ \text{za podm.} & y \in \mathbb{R} \\ & y\mathbf{1} \leq \mathbf{c} \end{array}$$

- silná dualita: optimální hodnota primáru i duálu je očividně  $\min\{c_1, \dots, c_n\}$
- slabá dualita:  $c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \geq \min\{c_1, \dots, c_n\} \geq y$
- komplementarita: optimální  $\mathbf{x}, y$  splňují

$$(x_i = 0) \vee (y = c_i) \quad \forall i$$

## Ekonomická interpretace duality

Výroba lupínků a hranolků z brambor a oleje:

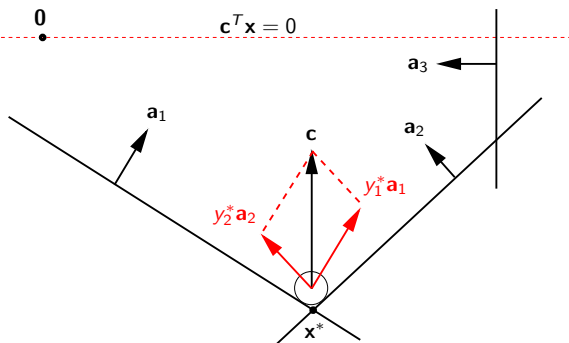
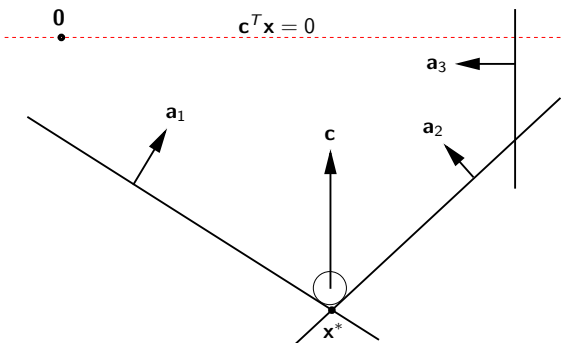
$$\begin{aligned} \max \quad & 120l + 76h \\ \text{za podm.} \quad & 2l + 1.5h \leq 100 \\ & 0.4l + 0.2h \leq 16 \\ & l \geq 0 \\ & h \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & 100a + 16b \\ \text{za podm.} \quad & a \geq 0 \\ & b \geq 0 \\ & 2a + 0.4b \geq 120 \\ & 1.5a + 0.2b \geq 76 \end{aligned}$$

Význam duální úlohy:

- $a, b$  jsou jednotkové ceny surovin (brambor a oleje)
- Překupník: Jaké nejnižší ceny mohu nabídnout, aby mi výrobce prodal své zásoby surovin?
- Optimální duální řešení je  $a = 32$  a  $b = 140$  (stínové ceny surovin).

# Míček v mnohostěnu



$$\min\{c^T x \mid Ax \geq b, x \in \mathbb{R}^n\} = \max\{b^T y \mid A^T y = c, y \geq 0\}$$

- Míček v poloze  $x$  je uvnitř mnohostěnu:  $Ax \geq b$
- Potenciální energie  $c^T x$  je minimální pro  $x = x^*$  (primární optimum)
- Rovnováha sil na míček (míček se nehýbe):  $c = \sum_i y_i^* a_i = A^T y^*$
- Síly stěn působí dovnitř mnohostěnu:  $y_i^* \geq 0$
- Když  $a_i^T x^* > b_i$  (míček se stěny  $i$  nedotýká), síla stěny na míček je  $y_i^* = 0$ .  
Proto  $y_i^* (a_i^T x^* - b_i) = 0$  (komplementarita).