# Optimalizace

10. Konvexní množiny a mnohostěny

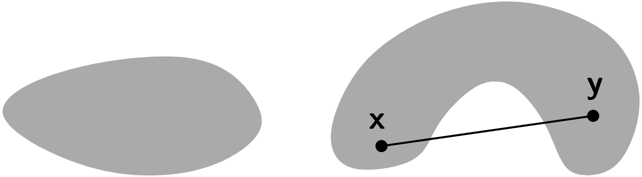
Tom Werner, Tom Kroupa

FEL ČVUT

# Konvexní množiny

Množina $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je **konvexní**, jestliže

$$\mathbf{x} \in X, \ \ \mathbf{y} \in X, \ \ 0 \le \alpha \le 1 \quad \Longrightarrow \quad (1-\alpha)\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y} \in X.$$




- **Konvexní kombinace** bodů $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ je bod $\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k$, kde

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_k \ge 0.$$

  **Tvrzení:** Množina $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní, právě když je uzavřená na konvexní kombinace.

- **Konvexní obal** bodů $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ je množina všech jejich konvexních kombinací:

$$\operatorname{conv}\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\} = \{\, \alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k \mid \alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1,\ \alpha_1, \dots, \alpha_k \ge 0 \,\}.$$

  Obecněji: **konvexní obal množiny** $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je průnik všech konvexních množin, které množinu $X$ obsahují. Značíme $\operatorname{conv} X$.

# Příbuzné kombinace, obaly a množiny

Lineární kombinace $\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k$ vektorů $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ se nazývá jejich

| | | | |
|---|---|---|---|
| **afinní kombinace**, | jestliže | $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1$. | |
| **nezáporná kombinace**, | jestliže | | $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \geq 0$. |
| **konvexní kombinace**, | jestliže | $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1$, | $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \geq 0$. |

Množina, která je uzavřená na

| | | |
|---|---|---|
| lineární kombinace, | se nazývá | **lineární podprostor**. |
| afinní kombinace, | se nazývá | **afinní podprostor**. |
| nezáporné kombinace, | se nazývá | **konvexní kužel**. |
| konvexné kombinace, | se nazývá | **konvexní množina**. |

## Některé operace zachovávající konvexitu množin

- **Průnik.** Průnik konvexních množin je konvexní množina.
- **Afinní zobrazení.** Nechť $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je afinní zobrazení, tj.

  $$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}.$$

  Jestliže $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní množina, pak

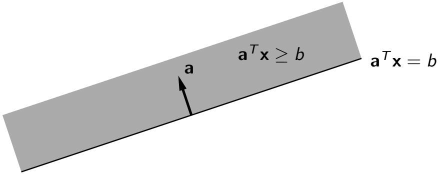
  $$\mathbf{f}(X) = \{\, \mathbf{f}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in X \,\}$$

  je také konvexní množina.

Důkazy obou tvrzení jsou snadné.

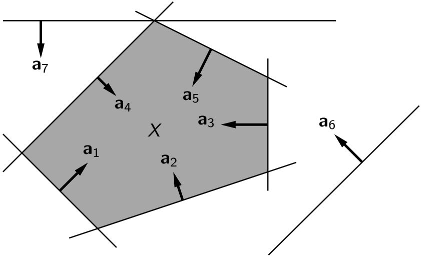
# Konvexní mnohostěny

- **Nadrovina** je množina $\{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^T\mathbf{x} = b \,\}$, kde $\mathbf{0} \neq \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$.
- (Uzavřený) **poloprostor** je množina $\{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^T\mathbf{x} \geq b \,\}$




- **Konvexní mnohostěn** je průnik konečně mnoha poloprostorů

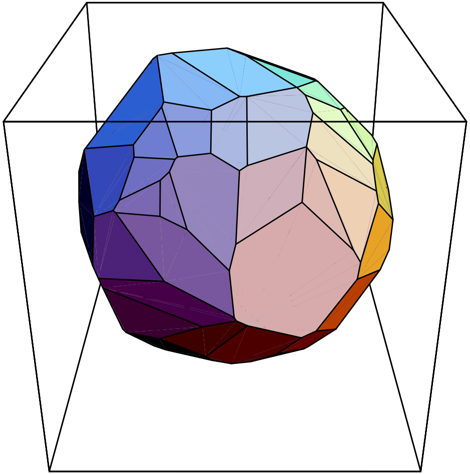
$$X = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \geq b_i \;\; \forall i = 1, \ldots, m \,\} = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \,\}$$




**Dimenze konvexního mnohostěnu** $X$ se definuje jako $\dim X = \dim \operatorname{aff} X$.

Náhodný omezený konvexní mnohostěn v $\mathbb{R}^3$:

(From Wolfram Mathworld)



**Příklady** jednoduchých konvexních mnohostěnů v $\mathbb{R}^n$:

- $\emptyset$, $\mathbb{R}^n$
- afinní podprostor (bod, přímka, rovina, nadrovina, ...)
- polopřímka $\{\, \mathbf{x} + \alpha \mathbf{v} \mid \alpha \geq 0 \,\}$
- poloprostor
- hyperkrychle $[a, b]^n = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid a \leq x_i \leq b \;\forall i \,\}$
- hyperkvádr *(box)* $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i \;\forall i \,\}$
- simplex: konvexní obal afinně nezávislé množiny bodů
  - jednotkový simplex $\{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^n x_i \leq 1 \,\}$
  - standardní ($=$ pravděpodobnostní) simplex $\{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \,\}$
- křížový polytop *(cross-polytope)* $\{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \leq 1 \,\}$
- polyhedrální konvexní kužel (je zároveň konvexní kužel a konvexní mnohostěn)
- nezáporný kužel $\mathbb{R}^n_+$ (kde $\mathbb{R}_+$ je množina nezáporných reálných čísel)

**Příklady** konvexních množin, které nejsou mnohostěny:

- Koule $\{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\|_2 \leq 1 \,\}$ pro $n \geq 2$ (průnik nekonečně mnoha poloprostorů)
- otevřený poloprostor $\{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^T \mathbf{x} > b \,\}$

# Extremální body

### Definice

Bod $\mathbf{x} \in X$ je **extremální bod** konvexní množiny $X$, jestliže

$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X, \;\; \mathbf{x} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$$

**Tvrzení:** Bod $\mathbf{x} \in X$ je vrchol, právě když je to extremální bod.

**Pozorování:** Počet extremálních bodů některých mnohostěnů je exponenciální v $m$.

## Charakterizace extremálních bodů mnohostěnu

$$X = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \geq b_i \ \ \forall i = 1, \ldots, m \,\} = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \,\}$$

Pro $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ označme jako $\mathbf{A}_I$ řádky matice $\mathbf{A}$ s indexy $I$. Podobně pro $\mathbf{b}_I$.

### Věta

Nechť $\mathbf{x} \in X$ a $I = \{\, i \mid \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} = b_i \,\}$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- Bod $\mathbf{x}$ je extremální bod mnohostěnu $X$.
- Matice $\mathbf{A}_I$ má lin. nezávislé sloupce (tj. soustava $\mathbf{A}_I \mathbf{x} = \mathbf{b}_I$ má jediné řešení).

**Důkaz $\Rightarrow$:**

Je $\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} > b_i$ pro všechna $i \notin I$. Tedy existuje $\epsilon > 0$ tak, že $\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \pm \epsilon \geq b_i$ pro všechna $i \notin I$.
Předpokládej, že sloupce $\mathbf{A}_I$ jsou lineárně závislé, tj. $\mathbf{A}_I \mathbf{v} = \mathbf{0}$ pro nějaké $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.
Pak $\mathbf{A}(\mathbf{x} \pm \epsilon \mathbf{v}) \geq \mathbf{b}$ neboli $\mathbf{x} \pm \epsilon \mathbf{v} \in X$. Protože $\mathbf{x} = \frac{1}{2}((\mathbf{x} - \epsilon \mathbf{v}) + (\mathbf{x} + \epsilon \mathbf{v}))$, máme spor.

**Důkaz $\Leftarrow$:**

Nechť $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$ a $\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)$, tedy

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_I \mathbf{x}_1 &\geq \mathbf{b}_I \\ \mathbf{A}_I \mathbf{x}_2 &\geq \mathbf{b}_I \\ \mathbf{A}_I \mathbf{x} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{A}_I \mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_I \mathbf{x}_2) &= \mathbf{b}_I \end{aligned}$$

Tedy $\mathbf{A}_I \mathbf{x}_1 \geq \frac{1}{2}(\mathbf{A}_I \mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_I \mathbf{x}_2) \leq \mathbf{A}_I \mathbf{x}_2$. Z toho plyne $\mathbf{A}_I \mathbf{x}_1 = \mathbf{A}_I \mathbf{x}_2$.
Protože $\mathbf{A}_I$ má l.n. sloupce, plyne z toho $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$.

# Nalezení všech extremálních bodů mnohostěnu

Z Věty plyne **algoritmus:** Pro každou neprázdnou $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ otestuj:

- Má soustava $\mathbf{A}_I \mathbf{x} = \mathbf{b}_I$ právě jedno řešení?
- Splňuje toto řešení $\mathbf{x}$ soustavu $\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$?

**Příklad:** $X = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \,\}$ kde $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Zkoumejme neprázdné podmnožiny $I \subseteq \{1, 2, 3\}$:

- $I = \{1\}$ a $I = \{2\}$: soustava $\mathbf{A}_I \mathbf{x} = \mathbf{b}_I$ má nekonečně mnoho řešení.
- $I = \{1, 2\}$: soustava $\mathbf{A}_I \mathbf{x} = \mathbf{b}_I$ má jediné řešení $\mathbf{x} = (0, 0)$, které nesplňuje $\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$.
- $I = \{1, 3\}$: soustava $\mathbf{A}_I \mathbf{x} = \mathbf{b}_I$ má jediné řešení $\mathbf{x} = (0, 1)$, které splňuje $\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$.
- $I = \{2, 3\}$: soustava $\mathbf{A}_I \mathbf{x} = \mathbf{b}_I$ má jediné řešení $\mathbf{x} = (1, 0)$, které splňuje $\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$.
- $I = \{1, 2, 3\}$: soustava $\mathbf{A}_I \mathbf{x} = \mathbf{b}_I$ nemá řešení.

Závěr: Mnohostěn má dva extremální body $(0, 1)$ a $(1, 0)$.

# Minimum lineární funkce na mnohostěnu

**Věta**

Neprázdný konvexní mnohostěn má extremální bod, právě když neobsahuje přímku.

Příklady mnohostěnů obsahujících přímku:

- ‘panel’ $\{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid b \leq \mathbf{a}^T\mathbf{x} \leq c \,\}$
- $\{\, \mathbf{x} + t\mathbf{v} \mid \mathbf{x} \in X,\ \ t \in \mathbb{R} \,\}$ kde $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je mnohostěn a $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$

**Věta**

Nechť konvexní mnohostěn $X$ neobsahuje přímku. Nechť lineární funkce $f$ nabývá na $X$ minima. Potom existuje extremální bod $X$, v němž $f$ nabývá na $X$ minima.

**Simplexový algorithmus** na řešení LP (Dantzig, 1947):

- Začne z nějakého extremálního bodu mnohostěnu.
- V každé iteraci přejde (po hraně) k jinému extremálnímu bodu s lepší (nebo stejnou) hodnotou $f$.

## Algoritmy vnitřního bodu (Interior Point Algorithms, IPM)

Druhá (kromě simplexové metody) široce užívaná třída algoritmů na řešení LP.

Pro postupně se zmenšující $\mu > 0$ řešíme posloupnost úloh

$$\min\{\, \mathbf{c}^T\mathbf{x} - \mu \textstyle\sum_j \log x_j \;\big|\; \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\; \mathbf{x} \ge \mathbf{0} \,\}$$

kde $-\sum_j \log x_j$ je **bariérová funkce**.

- Pro $\mu \to 0$ je úloha ekvivalentní původnímu LP.
- Pro $\mu \to \infty$ je člen $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ zanedbatelný.
  Optimální řešení $\mathbf{x}$ se nazývá **analytický střed** soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$.

Lagrangeova funkce:

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} - \mu \sum_j \log x_j + \mathbf{y}^T(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x})$$

Podmínka stacionarity:

$$\mu / x_j + \mathbf{a}_j^T \mathbf{y} = c_j \quad \forall j$$
$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Tuto soustavu rovnic řešíme Newtonovou metodou.

Podmínky $x_j > 0$ jsou zajištěny implicitně.