Optimalizace

2. Vybraná témata z lineární algebry

Tom Werner, Tom Kroupa

FEL ČVUT

Maticová algebra

Matice

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Matice

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

- čtvercová: $m = n$

Matice

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

- čtvercová: $m = n$
- obdélníková: $m \neq n$

Matice

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

- čtvercová: $m = n$
- obdélníková: $m \neq n$
    - široká: $m < n$

Matice

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

- čtvercová: $m = n$
- obdélníková: $m \neq n$
  - široká: $m < n$
  - úzká: $m > n$

Matice

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

- čtvercová: $m = n$
- obdélníková: $m \neq n$
  - široká: $m < n$
  - úzká: $m > n$
- diagonální: $a_{ij} = 0$ pro $i \neq j$ (nemusí být čtvercová!)

Matice

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

- čtvercová: $m = n$
- obdélníková: $m \neq n$
  - široká: $m < n$
  - úzká: $m > n$
- diagonální: $a_{ij} = 0$ pro $i \neq j$ (nemusí být čtvercová!)
- nulová $\mathbf{0}_{m \times n}$ (krátce jen $\mathbf{0}$): $a_{ij} = 0$ pro všechna i, j

Matice

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

- čtvercová: $m = n$
- obdélníková: $m \neq n$
  - široká: $m < n$
  - úzká: $m > n$
- diagonální: $a_{ij} = 0$ pro $i \neq j$ (nemusí být čtvercová!)
- nulová $\mathbf{0}_{m \times n}$ (krátce jen $\mathbf{0}$): $a_{ij} = 0$ pro všechna i, j
- jednotková $\mathbf{I}_n$ (krátce jen $\mathbf{I}$): čtvercová diagonální s $a_{ii} = 1$ pro všechna i

Matice

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

- čtvercová: $m = n$
- obdélníková: $m \neq n$
    - široká: $m < n$
    - úzká: $m > n$
- diagonální: $a_{ij} = 0$ pro $i \neq j$ (nemusí být čtvercová!)
- nulová $\mathbf{0}_{m \times n}$ (krátce jen $\mathbf{0}$): $a_{ij} = 0$ pro všechna i, j
- jednotková $\mathbf{I}_n$ (krátce jen $\mathbf{I}$): čtvercová diagonální s $a_{ii} = 1$ pro všechna i
- horní [dolní] trojúhelníková: $a_{ij} = 0$ pro $i > j$ [$i < j$] (nemusí být čtvercová!)

Binární operace s maticemi a skaláry

- Součin matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a skaláru $\alpha \in \mathbb{R}$ je matice $\alpha\mathbf{A} = \mathbf{A}\alpha = [\alpha a_{ij}]$.
  Pro $\alpha = -1$ píšeme $\alpha\mathbf{A} = -\mathbf{A}$.

Binární operace s maticemi a skaláry

- Součin matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a skaláru $\alpha \in \mathbb{R}$ je matice $\alpha\mathbf{A} = \mathbf{A}\alpha = [\alpha a_{ij}]$.
  Pro $\alpha = -1$ píšeme $\alpha\mathbf{A} = -\mathbf{A}$.

- Součet matic $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je matice $\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij} + b_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
  Rozdíl matic: $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$

Binární operace s maticemi a skaláry

- Součin matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a skaláru $\alpha \in \mathbb{R}$ je matice $\alpha\mathbf{A} = \mathbf{A}\alpha = [\alpha a_{ij}]$.
  Pro $\alpha = -1$ píšeme $\alpha\mathbf{A} = -\mathbf{A}$.

- Součet matic $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je matice $\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij} + b_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
  Rozdíl matic: $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$

- **Maticový součin** matic $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times p}$ a $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ je matice $\mathbf{AB} = [c_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ kde

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

Binární operace s maticemi a skaláry

- Součin matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a skaláru $\alpha \in \mathbb{R}$ je matice $\alpha\mathbf{A} = \mathbf{A}\alpha = [\alpha a_{ij}]$.
  Pro $\alpha = -1$ píšeme $\alpha\mathbf{A} = -\mathbf{A}$.

- Součet matic $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je matice $\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij} + b_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
  Rozdíl matic: $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$

- **Maticový součin** matic $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times p}$ a $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ je matice $\mathbf{AB} = [c_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ kde

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

Binární operace s maticemi a skaláry

- Součin matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a skaláru $\alpha \in \mathbb{R}$ je matice $\alpha\mathbf{A} = \mathbf{A}\alpha = [\alpha a_{ij}]$.
  Pro $\alpha = -1$ píšeme $\alpha\mathbf{A} = -\mathbf{A}$.

- Součet matic $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je matice $\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij} + b_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
  Rozdíl matic: $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$

- **Maticový součin** matic $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times p}$ a $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ je matice $\mathbf{AB} = [c_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ kde

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

  Vlastnosti maticového součinu:

  - asociativní: $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$

Binární operace s maticemi a skaláry

- Součin matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a skaláru $\alpha \in \mathbb{R}$ je matice $\alpha\mathbf{A} = \mathbf{A}\alpha = [\alpha a_{ij}]$.
  Pro $\alpha = -1$ píšeme $\alpha\mathbf{A} = -\mathbf{A}$.

- Součet matic $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je matice $\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij} + b_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$.
  Rozdíl matic: $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$

- **Maticový součin** matic $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times p}$ a $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p\times n}$ je matice $\mathbf{AB} = [c_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ kde

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

  Vlastnosti maticového součinu:

  - asociativní: $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$
  - distributivní se sčítáním: $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$ a $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$

Binární operace s maticemi a skaláry

- Součin matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a skaláru $\alpha \in \mathbb{R}$ je matice $\alpha\mathbf{A} = \mathbf{A}\alpha = [\alpha a_{ij}]$.
  Pro $\alpha = -1$ píšeme $\alpha\mathbf{A} = -\mathbf{A}$.

- Součet matic $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je matice $\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij} + b_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
  Rozdíl matic: $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$

- **Maticový součin** matic $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times p}$ a $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ je matice $\mathbf{AB} = [c_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ kde

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

  Vlastnosti maticového součinu:

  - asociativní: $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$
  - distributivní se sčítáním: $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$ a $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$
  - není komutativní (může být $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$)!

Transpozice

Transpozice matice $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je matice

$$\mathbf{A}^T = [a_{ji}] \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

- pozor: $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$

Transpozice

Transpozice matice $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je matice

$$\mathbf{A}^T = [a_{ji}] \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

- pozor: $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$
- $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$: matice $\mathbf{A}$ je **symetrická**

Transpozice

Transpozice matice $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je matice

$$\mathbf{A}^T = [a_{ji}] \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

- pozor: $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$
- $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$: matice $\mathbf{A}$ je **symetrická**
- $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$: matice $\mathbf{A}$ je **antisymetrická**

Inverze

Když matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ a $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ splňují

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{I}_n$$

tak $\mathbf{A}$ je **levá inverze** matice $\mathbf{B}$ a $\mathbf{B}$ je **pravá inverze** matice $\mathbf{A}$.

- Pravá inverze matice existuje, právě když matice má lin. nezávislé řádky.
- Levá inverze matice existuje, právě když matice má lin. nezávislé sloupce.
- Když pravá nebo levá inverze existuje, nemusí být jediná.

Když matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ a $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ splňují

$$\mathbf{AB} = \mathbf{I}_n$$

tak **A** je **levá inverze** matice **B** a **B** je **pravá inverze** matice **A**.

- Pravá inverze matice existuje, právě když matice má lin. nezávislé řádky.
- Levá inverze matice existuje, právě když matice má lin. nezávislé sloupce.
- Když pravá nebo levá inverze existuje, nemusí být jediná.

Tvrzení: Existuje-li pravá i levá inverze matice, jsou si rovny a jsou jediné.
Důkaz: $\mathbf{AB} = \mathbf{I}_n,\ \mathbf{CA} = \mathbf{I}_m \implies \mathbf{B} = \mathbf{CAB} = \mathbf{C}$

Tato (oboustranná) **inverze** se značí $\mathbf{A}^{-1}$.

Inverze

Když matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ a $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ splňují

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{I}_n$$

tak $\mathbf{A}$ je **levá inverze** matice $\mathbf{B}$ a $\mathbf{B}$ je **pravá inverze** matice $\mathbf{A}$.

- Pravá inverze matice existuje, právě když matice má lin. nezávislé řádky.
- Levá inverze matice existuje, právě když matice má lin. nezávislé sloupce.
- Když pravá nebo levá inverze existuje, nemusí být jediná.

Tvrzení: Existuje-li pravá i levá inverze matice, jsou si rovny a jsou jediné.
Důkaz: $\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{I}_n,\ \mathbf{C}\mathbf{A} = \mathbf{I}_m \implies \mathbf{B} = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{C}$

Tato (oboustranná) **inverze** se značí $\mathbf{A}^{-1}$.

- $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$

Inverze

Když matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ a $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ splňují

$$\mathbf{AB} = \mathbf{I}_n$$

tak $\mathbf{A}$ je **levá inverze** matice $\mathbf{B}$ a $\mathbf{B}$ je **pravá inverze** matice $\mathbf{A}$.

- Pravá inverze matice existuje, právě když matice má lin. nezávislé řádky.
- Levá inverze matice existuje, právě když matice má lin. nezávislé sloupce.
- Když pravá nebo levá inverze existuje, nemusí být jediná.

Tvrzení: Existuje-li pravá i levá inverze matice, jsou si rovny a jsou jediné.
Důkaz: $\mathbf{AB} = \mathbf{I}_n,\ \mathbf{CA} = \mathbf{I}_m \implies \mathbf{B} = \mathbf{CAB} = \mathbf{C}$

Tato (oboustranná) **inverze** se značí $\mathbf{A}^{-1}$.

- $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$
- matice má inverzi (= je **regulární**) $\iff$ má l.n. sloupce $\iff$ má l.n. řádky

Inverze

Když matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ a $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ splňují

$$\mathbf{AB} = \mathbf{I}_n$$

tak $\mathbf{A}$ je **levá inverze** matice $\mathbf{B}$ a $\mathbf{B}$ je **pravá inverze** matice $\mathbf{A}$.

- Pravá inverze matice existuje, právě když matice má lin. nezávislé řádky.
- Levá inverze matice existuje, právě když matice má lin. nezávislé sloupce.
- Když pravá nebo levá inverze existuje, nemusí být jediná.

Tvrzení: Existuje-li pravá i levá inverze matice, jsou si rovny a jsou jediné.
Důkaz: $\mathbf{AB} = \mathbf{I}_n,\ \mathbf{CA} = \mathbf{I}_m \implies \mathbf{B} = \mathbf{CAB} = \mathbf{C}$

Tato (oboustranná) **inverze** se značí $\mathbf{A}^{-1}$.

- $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$
- matice má inverzi (= je **regulární**) $\iff$ má l.n. sloupce $\iff$ má l.n. řádky
- $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$

Inverze

Když matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ a $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ splňují

$$\mathbf{AB} = \mathbf{I}_n$$

tak $\mathbf{A}$ je **levá inverze** matice $\mathbf{B}$ a $\mathbf{B}$ je **pravá inverze** matice $\mathbf{A}$.

- Pravá inverze matice existuje, právě když matice má lin. nezávislé řádky.
- Levá inverze matice existuje, právě když matice má lin. nezávislé sloupce.
- Když pravá nebo levá inverze existuje, nemusí být jediná.

Tvrzení: Existuje-li pravá i levá inverze matice, jsou si rovny a jsou jediné.
Důkaz: $\mathbf{AB} = \mathbf{I}_n,\ \mathbf{CA} = \mathbf{I}_m \implies \mathbf{B} = \mathbf{CAB} = \mathbf{C}$

Tato (oboustranná) **inverze** se značí $\mathbf{A}^{-1}$.

- $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$
- matice má inverzi (= je **regulární**) $\iff$ má l.n. sloupce $\iff$ má l.n. řádky
- $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$
- pozor: $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

Blokové matice

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$$

Blokové matice

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$$

Násobení blokových matic:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{m1} & \cdots & \mathbf{A}_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \cdots & \mathbf{B}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{B}_{p1} & \cdots & \mathbf{B}_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \cdots & \mathbf{C}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}_{m1} & \cdots & \mathbf{C}_{mn} \end{bmatrix}$$

kde

$$\mathbf{C}_{ij} = \sum_{k=1}^{p} \mathbf{A}_{ik}\mathbf{B}_{kj}, \qquad i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n$$

Blokové matice

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$$

Násobení blokových matic:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{m1} & \cdots & \mathbf{A}_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \cdots & \mathbf{B}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{B}_{p1} & \cdots & \mathbf{B}_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \cdots & \mathbf{C}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}_{m1} & \cdots & \mathbf{C}_{mn} \end{bmatrix}$$

kde

$$\mathbf{C}_{ij} = \sum_{k=1}^{p} \mathbf{A}_{ik} \mathbf{B}_{kj}, \qquad i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n$$

Příklady:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{AX} + \mathbf{BY} \\ \mathbf{CX} + \mathbf{DY} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{D} \end{bmatrix} = \mathbf{AC} + \mathbf{BD}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{F} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{AE} & \mathbf{AF} \\ \mathbf{CE} & \mathbf{CF} \end{bmatrix}.$$

Matice s jedním sloupcem nebo jedním řádkem

- **Sloupcový vektor** je jiný název pro matici s jediným sloupcem (prvek $\mathbb{R}^{n \times 1}$).
- **Řádkový vektor** je jiný název pro matici s jediným řádkem (prvek $\mathbb{R}^{1 \times n}$).

Matice s jedním sloupcem nebo jedním řádkem

- **Sloupcový vektor** je jiný název pro matici s jediným sloupcem (prvek $\mathbb{R}^{n\times 1}$).
- **Řádkový vektor** je jiný název pro matici s jediným řádkem (prvek $\mathbb{R}^{1\times n}$).

Úmluva

Ztotožníme prostor $\mathbb{R}^n$ s prostorem $\mathbb{R}^{n\times 1}$:

$$\mathbf{x} = \underbrace{(x_1, \ldots, x_n)}_{\text{uspořádaná } n\text{-tice}} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\text{matice } n \times 1} \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n\times 1}$$

Matice s jedním sloupcem nebo jedním řádkem

- **Sloupcový vektor** je jiný název pro matici s jediným sloupcem (prvek $\mathbb{R}^{n\times 1}$).
- **Řádkový vektor** je jiný název pro matici s jediným řádkem (prvek $\mathbb{R}^{1\times n}$).

Úmluva

Ztotožníme prostor $\mathbb{R}^n$ s prostorem $\mathbb{R}^{n\times 1}$:

$$\mathbf{x} = \underbrace{(x_1, \dots, x_n)}_{\text{uspořádaná } n\text{-tice}} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\text{matice } n \times 1} \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n\times 1}$$

Příklady:

- Pro $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ je $\mathbf{Ax} \in \mathbb{R}^m$ (lineární zobrazení $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$)

Matice s jedním sloupcem nebo jedním řádkem

- **Sloupcový vektor** je jiný název pro matici s jediným sloupcem (prvek $\mathbb{R}^{n\times 1}$).
- **Řádkový vektor** je jiný název pro matici s jediným řádkem (prvek $\mathbb{R}^{1\times n}$).

Úmluva

Ztotožníme prostor $\mathbb{R}^n$ s prostorem $\mathbb{R}^{n\times 1}$:

$$\mathbf{x} = \underbrace{(x_1, \dots, x_n)}_{\text{uspořádaná } n\text{-tice}} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\text{matice } n \times 1} \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n\times 1}$$

Příklady:

- Pro $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ je $\mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ (lineární zobrazení $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$)
- Pro $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ je $\mathbf{x}^T\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{1\times n}$

Matice s jedním sloupcem nebo jedním řádkem

- **Sloupcový vektor** je jiný název pro matici s jediným sloupcem (prvek $\mathbb{R}^{n\times 1}$).
- **Řádkový vektor** je jiný název pro matici s jediným řádkem (prvek $\mathbb{R}^{1\times n}$).

Úmluva

Ztotožníme prostor $\mathbb{R}^n$ s prostorem $\mathbb{R}^{n\times 1}$:

$$\mathbf{x} = \underbrace{(x_1, \dots, x_n)}_{\text{uspořádaná } n\text{-tice}} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\text{matice } n \times 1} \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n\times 1}$$

Příklady:

- Pro $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ je $\mathbf{Ax} \in \mathbb{R}^m$ (lineární zobrazení $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$)
- Pro $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ je $\mathbf{x}^T\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{1\times n}$
- Pro $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ je $\mathbf{x}^T\mathbf{y} = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n \in \mathbb{R}$ (standardní skalární součin)

Matice s jedním sloupcem nebo jedním řádkem

- **Sloupcový vektor** je jiný název pro matici s jediným sloupcem (prvek $\mathbb{R}^{n\times 1}$).
- **Řádkový vektor** je jiný název pro matici s jediným řádkem (prvek $\mathbb{R}^{1\times n}$).

Úmluva

Ztotožníme prostor $\mathbb{R}^n$ s prostorem $\mathbb{R}^{n\times 1}$:

$$\mathbf{x} = \underbrace{(x_1, \ldots, x_n)}_{\text{uspořádaná } n\text{-tice}} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\text{matice } n\times 1} \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n\times 1}$$

Příklady:

- Pro $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ je $\mathbf{Ax} \in \mathbb{R}^m$ (lineární zobrazení $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$)
- Pro $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ je $\mathbf{x}^T\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{1\times n}$
- Pro $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ je $\mathbf{x}^T\mathbf{y} = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n \in \mathbb{R}$ (standardní skalární součin)
- Pro $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ a $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ je $\mathbf{xy}^T \in \mathbb{R}^{m\times n}$ (vnější součin, dyáda)

Různé pohledy na součin Ax

- $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$ po složkách:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\
&\vdots \\
y_m &= a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n
\end{aligned}
$$

Různé pohledy na součin $\mathbf{Ax}$

- $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$ po složkách:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\
&\vdots \\
y_m &= a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n
\end{aligned}
$$

- Pomocí **sloupců** $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ matice $\mathbf{A}$:

$$
\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n
$$

  Vektor $\mathbf{Ax}$ je lineární kombinace sloupců $\mathbf{A}$ s koeficienty x_i.

Různé pohledy na součin $\mathbf{A}\mathbf{x}$

- $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ po složkách:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ &\vdots \\ y_m &= a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{aligned}$$

- Pomocí **sloupců** $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ matice $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n$$

  Vektor $\mathbf{A}\mathbf{x}$ je lineární kombinace sloupců $\mathbf{A}$ s koeficienty x_i.

- Pomocí **řádků** $\mathbf{b}_1^T, \ldots, \mathbf{b}_m^T$ matice $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{b}_m^T \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^T\mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{b}_m^T\mathbf{x} \end{bmatrix}$$

  Složky vektoru $\mathbf{A}\mathbf{x}$ jsou skalární součiny řádků $\mathbf{A}$ a vektoru $\mathbf{x}$.

Lineární podprostory a zobrazení

Lineární nezávislost

- **Lineární kombinace** vektorů $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ je vektor

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{x}_k$$

  pro nějaké skaláry $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$.

Lineární nezávislost

- **Lineární kombinace** vektorů $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ je vektor

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{x}_k$$

  pro nějaké skaláry $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$.

- Vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ jsou **lineárně nezávislé**, jestliže

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{x}_k = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0.$$

  Jinak jsou **lineárně závislé**

Lineární nezávislost

- **Lineární kombinace** vektorů $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ je vektor

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{x}_k$$

pro nějaké skaláry $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$.

- Vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ jsou **lineárně nezávislé**, jestliže

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{x}_k = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0.$$

Jinak jsou **lineárně závislé**

Tvrzení

Jsou-li vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ lineárně nezávislé,
pak koeficienty $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jsou vektorem $\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{x}_k$ určeny jednoznačně.

Důkaz: Nechť $\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{x}_k = \mathbf{x} = \beta_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \beta_k \mathbf{x}_k$.
Z toho plyne odečtením $\mathbf{0} = (\alpha_1 - \beta_1)\mathbf{x}_1 + \cdots + (\alpha_k - \beta_k)\mathbf{x}_k$.
Z definice lin. nezávislosti plyne $\alpha_i = \beta_i$.

Lineární podprostory

- **Lineární obal** vektorů $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ je množina všech jejich lineárních kombinací. Značíme ho

$$\operatorname{span}\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\}$$

Lineární podprostory

- **Lineární obal** vektorů $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ je množina všech jejich lineárních kombinací. Značíme ho

$$\operatorname{span}\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\}$$

- Množina $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je **(lineární) podprostor** $\mathbb{R}^n$, jestliže je uzavřená na lineární kombinace (tj. každá lineární kombinace libovolných vektorů z X patří do X).

Lineární podprostory

- **Lineární obal** vektorů $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ je množina všech jejich lineárních kombinací. Značíme ho
$$\operatorname{span}\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\}$$
- Množina $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je **(lineární) podprostor** $\mathbb{R}^n$, jestliže je uzavřená na lineární kombinace (tj. každá lineární kombinace libovolných vektorů z X patří do X).
- **Báze** podprostoru $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je lineárně nezávislá množina vektorů z X, jejichž lineární obal je X.
Trvzení: Počet vektorů báze je stejný pro každou bázi.

Lineární podprostory

- **Lineární obal** vektorů $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ je množina všech jejich lineárních kombinací. Značíme ho
$$\operatorname{span}\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\}$$

- Množina $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je **(lineární) podprostor** $\mathbb{R}^n$, jestliže je uzavřená na lineární kombinace (tj. každá lineární kombinace libovolných vektorů z X patří do X).

- **Báze** podprostoru $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je lineárně nezávislá množina vektorů z X, jejichž lineární obal je X.
Trvzení: Počet vektorů báze je stejný pro každou bázi.

- Počet vektorů báze je **dimenze** podprostoru, značíme $\dim X$.

Lineární podprostory

- **Lineární obal** vektorů $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ je množina všech jejich lineárních kombinací. Značíme ho
$$\operatorname{span}\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\}$$
- Množina $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je **(lineární) podprostor** $\mathbb{R}^n$, jestliže je uzavřená na lineární kombinace (tj. každá lineární kombinace libovolných vektorů z X patří do X).
- **Báze** podprostoru $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je lineárně nezávislá množina vektorů z X, jejichž lineární obal je X.
Trvzení: Počet vektorů báze je stejný pro každou bázi.
- Počet vektorů báze je **dimenze** podprostoru, značíme $\dim X$.
- Je-li $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ báze podprostoru $X \subseteq \mathbb{R}^n$ a
$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{x}_k = \mathbf{x} \in X,$$
pak (jednoznačně určené) skaláry $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ jsou **souřadnice** vektoru $\mathbf{x}$ v bázi $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$.

Think geometrically, prove algebraically.

— John Tate

Lineární zobrazení

Zobrazení $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je **lineární**, jestliže

$$\mathbf{f}(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k) = \alpha_1\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \cdots + \alpha_k\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$$

pro všechna $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ a $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$.

Lineární zobrazení

Zobrazení $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je **lineární**, jestliže

$$\mathbf{f}(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k) = \alpha_1\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \cdots + \alpha_k\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$$

pro všechna $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ a $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$.

Věta

Zobrazení $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je lineární, právě když

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

pro nějakou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Matice $\mathbf{A}$ je zobrazením $\mathbf{f}$ určena jednoznačně.

Důkaz $\Rightarrow$: Každé $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$ lze psát jako $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$.
Z linearity zobrazení plyne $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = x_1\mathbf{f}(\mathbf{e}_1) + \cdots + x_n\mathbf{f}(\mathbf{e}_n) = \underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{f}(\mathbf{e}_1) & \cdots & \mathbf{f}(\mathbf{e}_n)\end{bmatrix}}_{\mathbf{A}}\mathbf{x}$.

Lineární zobrazení

Zobrazení $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je **lineární**, jestliže

$$\mathbf{f}(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k) = \alpha_1\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \cdots + \alpha_k\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$$

pro všechna $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ a $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$.

Věta

Zobrazení $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je lineární, právě když

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

pro nějakou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Matice $\mathbf{A}$ je zobrazením $\mathbf{f}$ určena jednoznačně.

Důkaz $\Rightarrow$**:** Každé $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$ lze psát jako $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$.
Z linearity zobrazení plyne $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = x_1\mathbf{f}(\mathbf{e}_1) + \cdots + x_n\mathbf{f}(\mathbf{e}_n) = \underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{f}(\mathbf{e}_1) & \cdots & \mathbf{f}(\mathbf{e}_n)\end{bmatrix}}_{\mathbf{A}}\mathbf{x}$.

Věta

Matice složeného zobrazení je součinem matic jednotlivých zobrazení.

Důkaz plyne z asociativity maticového násobení: Pro $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ a $\mathbf{g}(\mathbf{y}) = \mathbf{B}\mathbf{y}$ je

$$(\mathbf{g}\circ\mathbf{f})(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = (\mathbf{B}\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{x}$$

Prostor obrazů matice

$$\operatorname{rng} \mathbf{A} = \{ \, \mathbf{A}\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \, \} \quad \subseteq \mathbb{R}^m$$

Interpretace:

- Obor hodnot (range, image) lineárního zobrazení $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$, neboli $\operatorname{rng} \mathbf{A} = \mathbf{f}(\mathbb{R}^n)$.
- Množina všech vektorů $\mathbf{y}$ takových, že soustava $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ má řešení
- Lineární obal sloupců matice $\mathbf{A}$

Hodnost matice

Hodnost matice $\mathbf{A}$ je dimenze lineárního obalu sloupců:

$$\operatorname{rank}\mathbf{A} = \dim \operatorname{rng}\mathbf{A}$$

Hodnost matice

Hodnost matice **A** je dimenze lineárního obalu sloupců:

$$\operatorname{rank} \mathbf{A} = \dim \operatorname{rng} \mathbf{A}$$

Věta (rank factorization)

Pro každou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ hodnosti r existují matice $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times r}$ a $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{r \times n}$ tak, že $\mathbf{A} = \mathbf{BC}$.

Interpretace jako komprese matice (úspora paměti pro $r \ll \min\{m, n\}$)

Hodnost matice

Hodnost matice $\mathbf{A}$ je dimenze lineárního obalu sloupců:

$$\operatorname{rank} \mathbf{A} = \dim \operatorname{rng} \mathbf{A}$$

Věta (rank factorization)

Pro každou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ hodnosti r existují matice $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times r}$ a $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{r \times n}$ tak, že $\mathbf{A} = \mathbf{BC}$.

Interpretace jako komprese matice (úspora paměti pro $r \ll \min\{m, n\}$)

Z toho se dokáže:

Věta

$\operatorname{rank} \mathbf{A} = \operatorname{rank}(\mathbf{A}^T)$

Neboli: Dimenze lin. obalu sloupců a dimenze lin. obalu sloupců jsou stejné.

Hodnost matice

Hodnost matice $\mathbf{A}$ je dimenze lineárního obalu sloupců:

$$\operatorname{rank} \mathbf{A} = \dim \operatorname{rng} \mathbf{A}$$

Věta (rank factorization)

Pro každou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ hodnosti r existují matice $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times r}$ a $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{r \times n}$ tak, že $\mathbf{A} = \mathbf{BC}$.

Interpretace jako komprese matice (úspora paměti pro $r \ll \min\{m, n\}$)

Z toho se dokáže:

Věta

$\operatorname{rank} \mathbf{A} = \operatorname{rank}(\mathbf{A}^T)$

Neboli: Dimenze lin. obalu sloupců a dimenze lin. obalu sloupců jsou stejné.

Důsledek: $\operatorname{rank} \mathbf{A} \leq \min\{m, n\}$

Nulový prostor matice

$$\operatorname{null} \mathbf{A} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \} \quad \subseteq \mathbb{R}^n$$

Interpretace:

- Množina vektorů, které se zobrazí na nulový vektor
- Množina řešení soustavy lineárních rovnic $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$
- Množina všech vektorů kolmých na každý řádek matice $\mathbf{A}$

Věta (rank-nullity theorem)

Pro každou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ platí

$$\underbrace{\dim \operatorname{rng} \mathbf{A}}_{\operatorname{rank} \mathbf{A}} + \dim \operatorname{null} \mathbf{A} = n.$$

Myšlenka *důkazu*:
Nechť $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_r$ je báze $\operatorname{rng} \mathbf{A}$. Tedy existují $\mathbf{x}_i$ tak že $\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \mathbf{y}_i$, $i = 1, \dots, r$.
Nechť $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_q$ je báze $\operatorname{null} \mathbf{A}$.
Dokáže se (hlavní část důkazu), že $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r, \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_q$ je báze prostoru $\mathbb{R}^n$. Z toho $r + q = n$.

Rank-nullity theorem

Věta (rank-nullity theorem)

Pro každou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ platí

$$\underbrace{\dim \operatorname{rng} \mathbf{A}}_{\operatorname{rank} \mathbf{A}} + \dim \operatorname{null} \mathbf{A} = n.$$

Myšlenka *důkazu*:
Nechť $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_r$ je báze $\operatorname{rng} \mathbf{A}$. Tedy existují $\mathbf{x}_i$ tak že $\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \mathbf{y}_i$, $i = 1, \dots, r$.
Nechť $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_q$ je báze $\operatorname{null} \mathbf{A}$.
Dokáže se (hlavní část důkazu), že $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r, \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_q$ je báze prostoru $\mathbb{R}^n$. Z toho $r + q = n$.

Interpretace:

- Každá dimenze na vstupu se buď objeví na výstupu nebo 'splácne' do počátku.
- $\dim \operatorname{null} \mathbf{A}$ je 'míra degenerace' lineárního zobrazení $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$

Rank-nullity theorem

Věta (rank-nullity theorem)

Pro každou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ platí

$$\underbrace{\dim \operatorname{rng} \mathbf{A}}_{\operatorname{rank} \mathbf{A}} + \dim \operatorname{null} \mathbf{A} = n.$$

Myšlenka *důkazu*:
Nechť $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_r$ je báze $\operatorname{rng} \mathbf{A}$. Tedy existují $\mathbf{x}_i$ tak že $\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \mathbf{y}_i$, $i = 1, \dots, r$.
Nechť $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_q$ je báze $\operatorname{null} \mathbf{A}$.
Dokáže se (hlavní část důkazu), že $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r, \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_q$ je báze prostoru $\mathbb{R}^n$. Z toho $r + q = n$.

Interpretace:

- Každá dimenze na vstupu se buď objeví na výstupu nebo 'splácne' do počátku.
- $\dim \operatorname{null} \mathbf{A}$ je 'míra degenerace' lineárního zobrazení $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$
- Počet lineárně nezávislých řešení soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ je $\dim \operatorname{null} \mathbf{A} = n - \operatorname{rank} \mathbf{A}$

Charakterizace matic s plnou hodností

Matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ má **plnou hodnost**, jestliže rank $\mathbf{A} = \min\{m, n\}$.

Charakterizace matic s plnou hodností

Matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ má **plnou hodnost**, jestliže $\operatorname{rank} \mathbf{A} = \min\{m, n\}$.

Věta

Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- $\operatorname{rank} \mathbf{A} = m$

Charakterizace matic s plnou hodností

Matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ má **plnou hodnost**, jestliže $\operatorname{rank} \mathbf{A} = \min\{m, n\}$.

Věta

Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- $\operatorname{rank} \mathbf{A} = m$
- $\mathbf{A}$ má lin. nezávislé řádky

Charakterizace matic s plnou hodností

Matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ má **plnou hodnost**, jestliže $\operatorname{rank} \mathbf{A} = \min\{m, n\}$.

Věta

Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- $\operatorname{rank} \mathbf{A} = m$
- $\mathbf{A}$ má lin. nezávislé řádky
- $\operatorname{rng} \mathbf{A} = \mathbb{R}^m$

Charakterizace matic s plnou hodností

Matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ má **plnou hodnost**, jestliže $\operatorname{rank} \mathbf{A} = \min\{m, n\}$.

Věta

Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- $\operatorname{rank} \mathbf{A} = m$
- $\mathbf{A}$ má lin. nezávislé řádky
- $\operatorname{rng} \mathbf{A} = \mathbb{R}^m$
- soustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ má řešení pro každé $\mathbf{y}$

Charakterizace matic s plnou hodností

Matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ má **plnou hodnost**, jestliže $\operatorname{rank} \mathbf{A} = \min\{m, n\}$.

Věta

Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- $\operatorname{rank} \mathbf{A} = m$
- $\mathbf{A}$ má lin. nezávislé řádky
- $\operatorname{rng} \mathbf{A} = \mathbb{R}^m$
- soustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ má řešení pro každé $\mathbf{y}$
- zobrazení $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$ je surjektivní

Charakterizace matic s plnou hodností

Matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ má **plnou hodnost**, jestliže $\operatorname{rank} \mathbf{A} = \min\{m, n\}$.

Věta

Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- $\operatorname{rank} \mathbf{A} = m$
- $\mathbf{A}$ má lin. nezávislé řádky
- $\operatorname{rng} \mathbf{A} = \mathbb{R}^m$
- soustava $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ má řešení pro každé $\mathbf{y}$
- zobrazení $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ je surjektivní
- $\mathbf{A}$ má pravou inverzi

Charakterizace matic s plnou hodností

Matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ má **plnou hodnost**, jestliže $\operatorname{rank} \mathbf{A} = \min\{m, n\}$.

Věta

Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- $\operatorname{rank} \mathbf{A} = m$
- $\mathbf{A}$ má lin. nezávislé řádky
- $\operatorname{rng} \mathbf{A} = \mathbb{R}^m$
- soustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ má řešení pro každé $\mathbf{y}$
- zobrazení $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$ je surjektivní
- $\mathbf{A}$ má pravou inverzi
- $\mathbf{AA}^T$ je regulární

Charakterizace matic s plnou hodností

Matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ má **plnou hodnost**, jestliže $\operatorname{rank} \mathbf{A} = \min\{m, n\}$.

Věta

Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- $\operatorname{rank} \mathbf{A} = m$
- $\mathbf{A}$ má lin. nezávislé řádky
- $\operatorname{rng} \mathbf{A} = \mathbb{R}^m$
- soustava $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ má řešení pro každé $\mathbf{y}$
- zobrazení $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ je surjektivní
- $\mathbf{A}$ má pravou inverzi
- $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ je regulární

Charakterizace matic s plnou hodností

Matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ má **plnou hodnost**, jestliže $\operatorname{rank} \mathbf{A} = \min\{m, n\}$.

Věta

Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- $\operatorname{rank} \mathbf{A} = m$
- $\mathbf{A}$ má lin. nezávislé řádky
- $\operatorname{rng} \mathbf{A} = \mathbb{R}^m$
- soustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ má řešení pro každé $\mathbf{y}$
- zobrazení $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$ je surjektivní
- $\mathbf{A}$ má pravou inverzi
- $\mathbf{AA}^T$ je regulární

Věta

Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- $\operatorname{rank} \mathbf{A} = n$
- $\mathbf{A}$ má lin. nezávislé sloupce
- $\operatorname{null} \mathbf{A} = \{\mathbf{0}\}$
- soustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ má jediné řešení $\mathbf{x} = \mathbf{0}$
- zobrazení $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$ je injektivní
- $\mathbf{A}$ má levou inverzi
- $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ je regulární

Afinní podprostory a zobrazení

Afinní kombinace a podprostory

- **Afinní kombinace** vektorů $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ je lineární kombinace

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{x}_k$$

kde $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1$.

Afinní kombinace a podprostory

- **Afinní kombinace** vektorů $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ je lineární kombinace

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{x}_k$$

kde $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1$.

- **Afinní obal**

$$\operatorname{aff}\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\}$$

vektorů $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ je množina všech jejich afinních kombinací.

Afinní kombinace a podprostory

- **Afinní kombinace** vektorů $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ je lineární kombinace

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{x}_k$$

  kde $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1$.

- **Afinní obal**

$$\operatorname{aff}\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\}$$

  vektorů $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ je množina všech jejich afinních kombinací.

- Množina $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je **afinní podprostor**, jestliže je uzavřená na afinní kombinace.

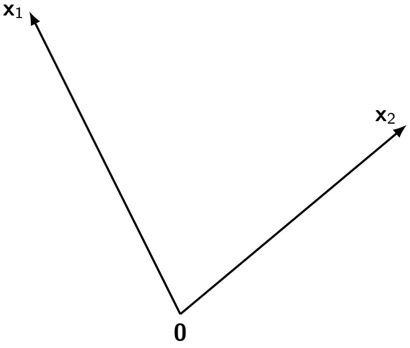
Afinní kombinace nezávisí na poloze počátku

$$\alpha_1(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) + \cdots + \alpha_k(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0) = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k - \underbrace{(\alpha_1 + \cdots + \alpha_k)}_{1}\mathbf{x}_0 = (\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k) - \mathbf{x}_0$$

Afinní kombinace nezávisí na poloze počátku

$$\alpha_1(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) + \cdots + \alpha_k(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0) = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k - \underbrace{(\alpha_1 + \cdots + \alpha_k)}_{1}\mathbf{x}_0 = (\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k) - \mathbf{x}_0$$

Příklady pro $k = 2$:

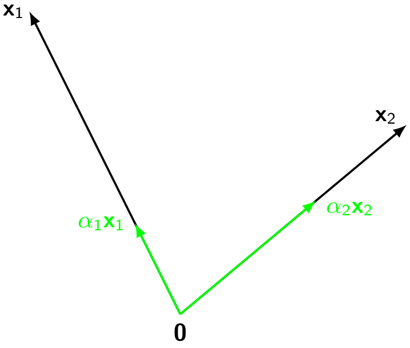


$\alpha_1 = 0.3$, $\alpha_2 = 0.6$

Afinní kombinace nezávisí na poloze počátku

$$\alpha_1(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) + \cdots + \alpha_k(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0) = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k - \underbrace{(\alpha_1 + \cdots + \alpha_k)}_{1}\mathbf{x}_0 = (\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k) - \mathbf{x}_0$$

Příklady pro $k = 2$:

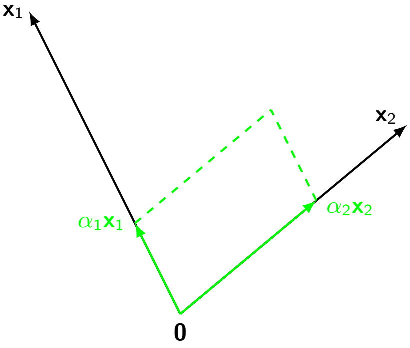


$\alpha_1 = 0.3$, $\alpha_2 = 0.6$

Afinní kombinace nezávisí na poloze počátku

$$\alpha_1(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) + \cdots + \alpha_k(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0) = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k - \underbrace{(\alpha_1 + \cdots + \alpha_k)}_{1}\mathbf{x}_0 = (\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k) - \mathbf{x}_0$$

Příklady pro $k = 2$:

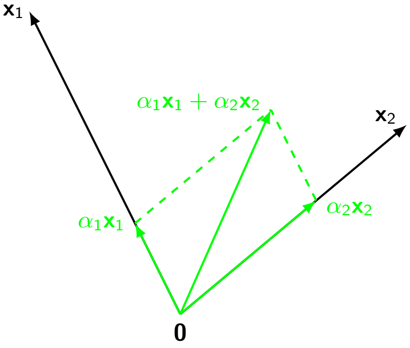


$\alpha_1 = 0.3$, $\alpha_2 = 0.6$

Afinní kombinace nezávisí na poloze počátku

$$\alpha_1(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) + \cdots + \alpha_k(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0) = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k - \underbrace{(\alpha_1 + \cdots + \alpha_k)}_{1}\mathbf{x}_0 = (\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k) - \mathbf{x}_0$$

Příklady pro $k = 2$:

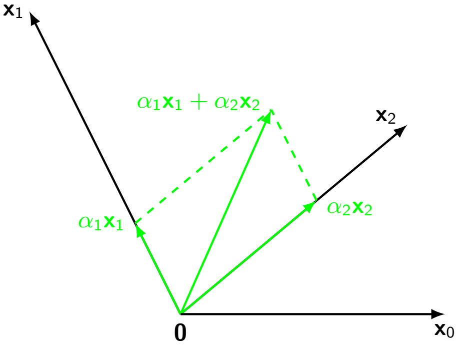


$\alpha_1 = 0.3$, $\alpha_2 = 0.6$

Afinní kombinace nezávisí na poloze počátku

$$\alpha_1(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) + \cdots + \alpha_k(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0) = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k - \underbrace{(\alpha_1 + \cdots + \alpha_k)}_{1}\mathbf{x}_0 = (\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k) - \mathbf{x}_0$$

Příklady pro $k = 2$:

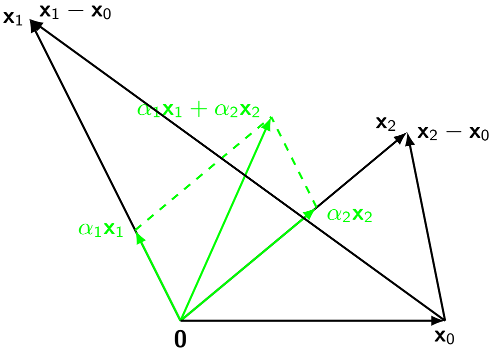


$\alpha_1 = 0.3$, $\alpha_2 = 0.6$

Afinní kombinace nezávisí na poloze počátku

$$\alpha_1(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) + \cdots + \alpha_k(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0) = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k - \underbrace{(\alpha_1 + \cdots + \alpha_k)}_{1}\mathbf{x}_0 = (\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k) - \mathbf{x}_0$$

Příklady pro $k = 2$:

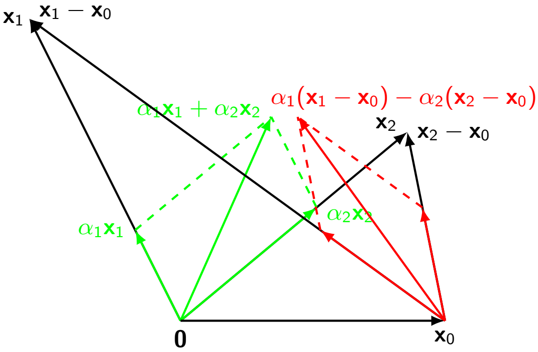


$\alpha_1 = 0.3$, $\alpha_2 = 0.6$

Afinní kombinace nezávisí na poloze počátku

$$\alpha_1(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) + \cdots + \alpha_k(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0) = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k - \underbrace{(\alpha_1 + \cdots + \alpha_k)}_{1}\mathbf{x}_0 = (\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k) - \mathbf{x}_0$$

Příklady pro $k = 2$:

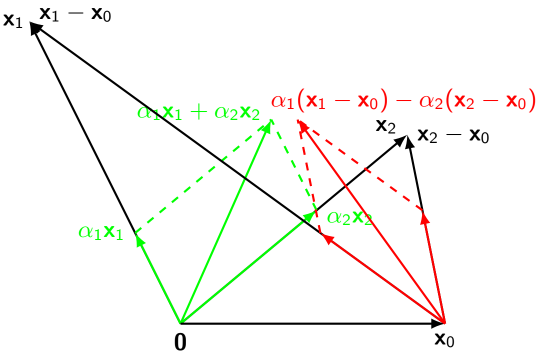


$\alpha_1 = 0.3$, $\alpha_2 = 0.6$

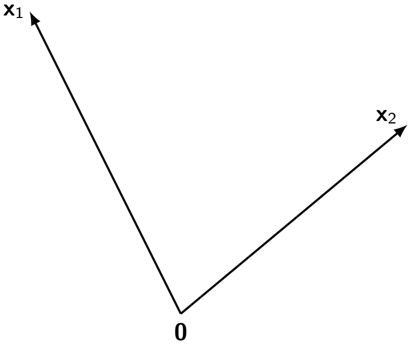
Afinní kombinace nezávisí na poloze počátku

$$\alpha_1(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) + \cdots + \alpha_k(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0) = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k - \underbrace{(\alpha_1 + \cdots + \alpha_k)}_{1}\mathbf{x}_0 = (\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k) - \mathbf{x}_0$$

Příklady pro $k = 2$:



$\alpha_1 = 0.3$, $\alpha_2 = 0.6$

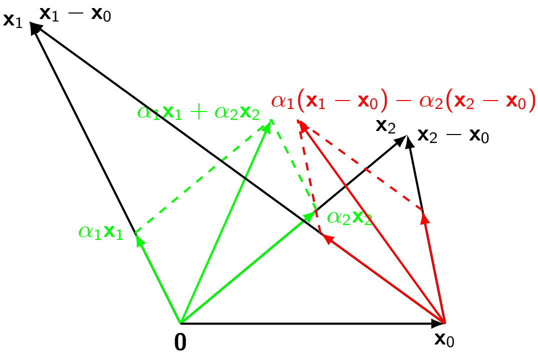


$\alpha_1 = 0.4$, $\alpha_2 = 0.6$

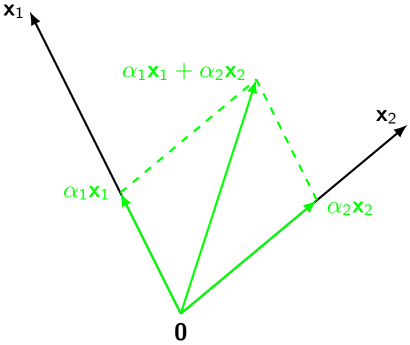
Afinní kombinace nezávisí na poloze počátku

$$\alpha_1(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) + \cdots + \alpha_k(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0) = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k - \underbrace{(\alpha_1 + \cdots + \alpha_k)}_{1}\mathbf{x}_0 = (\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k) - \mathbf{x}_0$$

Příklady pro $k = 2$:



$\alpha_1 = 0.3$, $\alpha_2 = 0.6$

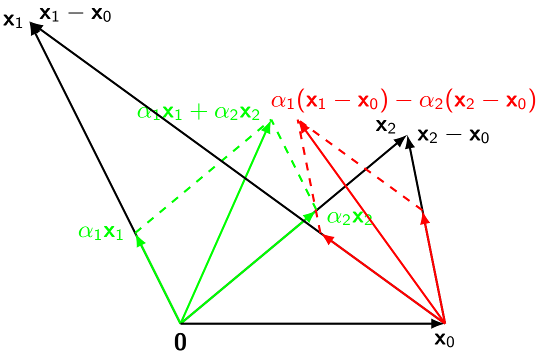


$\alpha_1 = 0.4$, $\alpha_2 = 0.6$

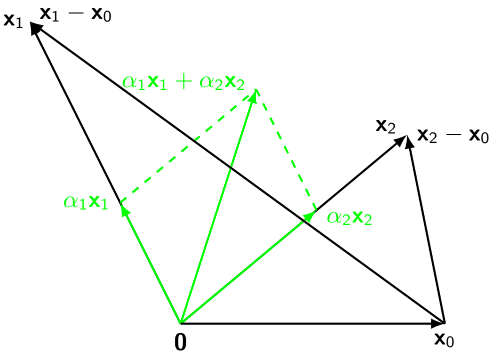
Afinní kombinace nezávisí na poloze počátku

$$\alpha_1(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) + \cdots + \alpha_k(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0) = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k - \underbrace{(\alpha_1 + \cdots + \alpha_k)}_{1}\mathbf{x}_0 = (\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k) - \mathbf{x}_0$$

Příklady pro $k = 2$:



$\alpha_1 = 0.3$, $\alpha_2 = 0.6$

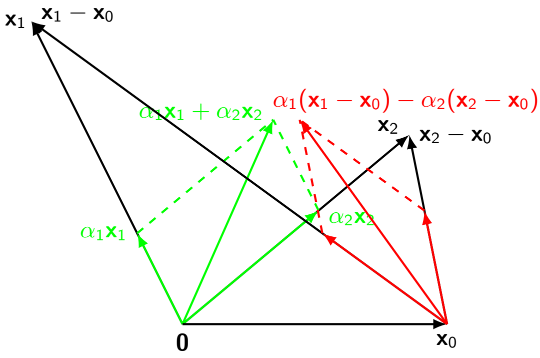


$\alpha_1 = 0.4$, $\alpha_2 = 0.6$

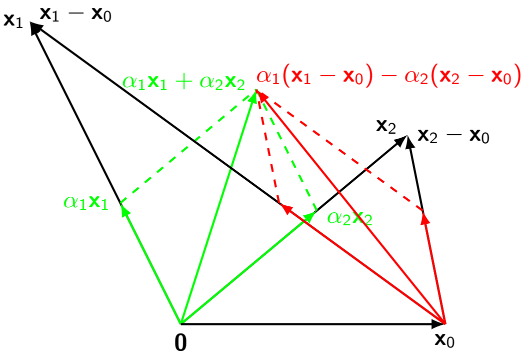
Afinní kombinace nezávisí na poloze počátku

$$\alpha_1(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) + \cdots + \alpha_k(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0) = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k - \underbrace{(\alpha_1 + \cdots + \alpha_k)}_{1}\mathbf{x}_0 = (\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k) - \mathbf{x}_0$$

Příklady pro $k = 2$:

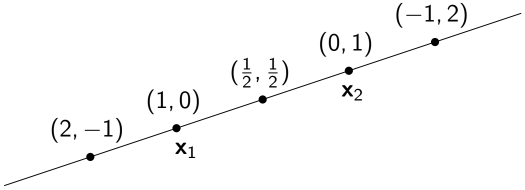


$\alpha_1 = 0.3$, $\alpha_2 = 0.6$

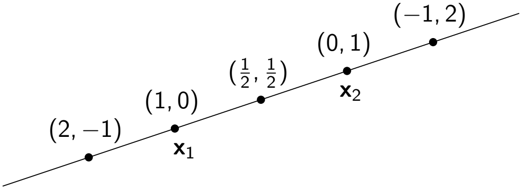


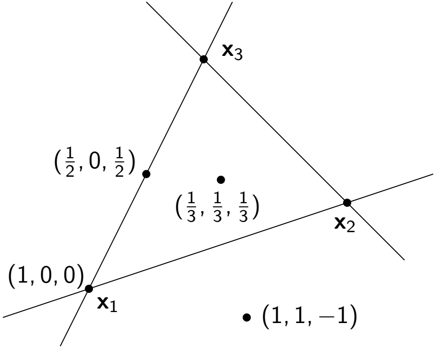
$\alpha_1 = 0.4$, $\alpha_2 = 0.6$

Příklad: afinní kombinace dvou/tří bodů



Příklad: afinní kombinace dvou/tří bodů





Charakterizace afinních podprostorů

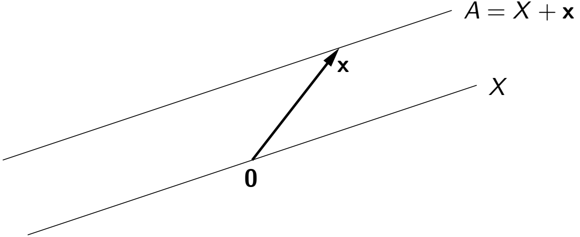
Pro $X \subseteq \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ označíme $X + \mathbf{x} = \mathbf{x} + X = \{\, \mathbf{x} + \mathbf{y} \mid \mathbf{y} \in X \,\}$.

Charakterizace afinních podprostorů

Pro $X \subseteq \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ označíme $X + \mathbf{x} = \mathbf{x} + X = \{\, \mathbf{x} + \mathbf{y} \mid \mathbf{y} \in X \,\}$.

Věta

- Je-li X lineární podprostor a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, pak $X + \mathbf{x}$ je afinní podprostor.
- Je-li A afinní podprostor a $\mathbf{x} \in A$, pak $A - \mathbf{x}$ je lineární podprostor.

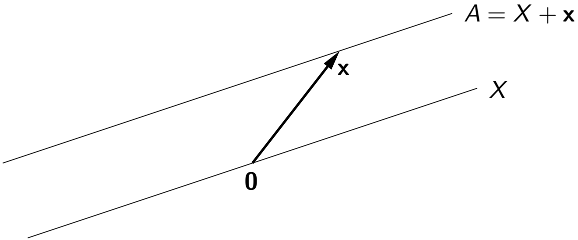


Charakterizace afinních podprostorů

Pro $X \subseteq \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ označíme $X + \mathbf{x} = \mathbf{x} + X = \{\, \mathbf{x} + \mathbf{y} \mid \mathbf{y} \in X \,\}$.

Věta

- Je-li X lineární podprostor a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, pak $X + \mathbf{x}$ je afinní podprostor.
- Je-li A afinní podprostor a $\mathbf{x} \in A$, pak $A - \mathbf{x}$ je lineární podprostor.



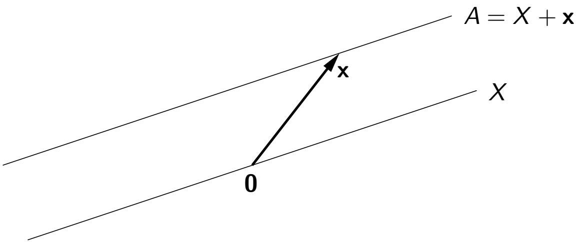
Dimenze neprázdného afinního podprostoru A je pak definována jako $\dim X$.

Charakterizace afinních podprostorů

Pro $X \subseteq \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ označíme $X + \mathbf{x} = \mathbf{x} + X = \{ \mathbf{x} + \mathbf{y} \mid \mathbf{y} \in X \}$.

Věta

- Je-li X lineární podprostor a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, pak $X + \mathbf{x}$ je afinní podprostor.
- Je-li A afinní podprostor a $\mathbf{x} \in A$, pak $A - \mathbf{x}$ je lineární podprostor.



Dimenze neprázdného afinního podprostoru A je pak definována jako $\dim X$.

Věta

Množina $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je afinní podprostor právě tehdy,
když je množinou řešení nějaké lineární soustavy, tj. $A = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \}$.

Názvy afinních podprostorů pro speciální dimenze:

- **bod** (dimenze 0) $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

Názvy afinních podprostorů pro speciální dimenze:

- **bod** (dimenze 0) $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
- **přímka** (dimenze 1) $\{\, \mathbf{x} + \alpha \mathbf{s} \mid \alpha \in \mathbb{R} \,\} = \mathbf{x} + \mathrm{span}\{\mathbf{s}\}$

Názvy afinních podprostorů pro speciální dimenze:

- **bod** (dimenze 0) $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
- **přímka** (dimenze 1) $\{\, \mathbf{x} + \alpha \mathbf{s} \mid \alpha \in \mathbb{R} \,\} = \mathbf{x} + \operatorname{span}\{\mathbf{s}\}$
- **rovina** (dimenze 2) $\{\, \mathbf{x} + \alpha \mathbf{s} + \beta \mathbf{t} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \,\} = \mathbf{x} + \operatorname{span}\{\mathbf{s}, \mathbf{t}\}$

Názvy afinních podprostorů pro speciální dimenze:

- **bod** (dimenze 0) $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
- **přímka** (dimenze 1) $\{\, \mathbf{x} + \alpha \mathbf{s} \mid \alpha \in \mathbb{R} \,\} = \mathbf{x} + \operatorname{span}\{\mathbf{s}\}$
- **rovina** (dimenze 2) $\{\, \mathbf{x} + \alpha \mathbf{s} + \beta \mathbf{t} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \,\} = \mathbf{x} + \operatorname{span}\{\mathbf{s}, \mathbf{t}\}$
- **nadrovina** (dimenze $n-1$) $\{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^T \mathbf{x} = b \,\}$

Afinní zobrazení

Zobrazení $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je **afinní**, pokud

$$\mathbf{f}(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k) = \alpha_1\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \cdots + \alpha_k\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$$

pro všechna $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1$.

Afinní zobrazení

Zobrazení $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je **afinní**, pokud

$$\mathbf{f}(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k) = \alpha_1\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \cdots + \alpha_k\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$$

pro všechna $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1$.

Věta

Zobrazení $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je afinní, právě když

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

pro nějaké $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Matice $\mathbf{A}$ a vektor $\mathbf{b}$ jsou zobrazením $\mathbf{f}$ určeny jednoznačně.

Analogie

Lineární svět	**Afinní svět**
lineární kombinace	afinní kombinace
lineární obal	afinní obal
lineární podprostor X	afinní podprostor $X + \mathbf{x}$
homogenní lin. soustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$	nehomogenní lin. soustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$
$\operatorname{null} \mathbf{A}$	$\mathbf{x} + \operatorname{null} \mathbf{A}$
lineární zobrazení $\mathbf{Ax}$	afinní zobrazení $\mathbf{Ax} + \mathbf{b}$

Ortogonalita

Délky, úhly, vzdálenosti v $\mathbb{R}^n$

Pro vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$:

- **Standardní skalární součin:** $\mathbf{x}^T\mathbf{y} = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$

Délky, úhly, vzdálenosti v $\mathbb{R}^n$

Pro vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$:

- **Standardní skalární součin:** $\mathbf{x}^T\mathbf{y} = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$
- **Eukleidovská norma** (délka vektoru): $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$

Délky, úhly, vzdálenosti v $\mathbb{R}^n$

Pro vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$:

- **Standardní skalární součin:** $\mathbf{x}^T\mathbf{y} = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$
- **Eukleidovská norma** (délka vektoru): $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$
- **Úhel** φ mezi dvěma vektory: $\cos\varphi = \dfrac{\mathbf{x}^T\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|}$

Délky, úhly, vzdálenosti v $\mathbb{R}^n$

Pro vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$:

- **Standardní skalární součin:** $\mathbf{x}^T\mathbf{y} = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$
- **Eukleidovská norma** (délka vektoru): $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$
- **Úhel** φ mezi dvěma vektory: $\cos\varphi = \dfrac{\mathbf{x}^T\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|}$

  Jestliže $\mathbf{x}^T\mathbf{y} = 0$, vektory jsou **ortogonální**, což značíme také $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$.
  Speciálně: $\mathbf{0} \perp \mathbf{x}$ pro každé $\mathbf{x}$

Délky, úhly, vzdálenosti v $\mathbb{R}^n$

Pro vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$:

- **Standardní skalární součin:** $\mathbf{x}^T\mathbf{y} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$
- **Eukleidovská norma** (délka vektoru): $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$
- **Úhel** φ mezi dvěma vektory: $\cos\varphi = \dfrac{\mathbf{x}^T\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|}$

  Jestliže $\mathbf{x}^T\mathbf{y} = 0$, vektory jsou **ortogonální**, což značíme také $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$.
  Speciálně: $\mathbf{0} \perp \mathbf{x}$ pro každé $\mathbf{x}$
- **Eukleidovská metrika** (vzdálenost bodů): $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$

Ortogonální podprostory

- Vektor $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ je ortogonální na podprostor $X \subseteq \mathbb{R}^n$ (značíme $\mathbf{y} \perp X$), jestliže $\mathbf{y} \perp \mathbf{x}$ pro všechna $\mathbf{x} \in X$.

Ortogonální podprostory

- Vektor $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ je ortogonální na podprostor $X \subseteq \mathbb{R}^n$ (značíme $\mathbf{y} \perp X$), jestliže $\mathbf{y} \perp \mathbf{x}$ pro všechna $\mathbf{x} \in X$.

- Podprostory $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ jsou ortogonální (značíme $X \perp Y$), jestliže $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ pro všechna $\mathbf{x} \in X$ a $\mathbf{y} \in Y$.

Ortogonální podprostory

- Vektor $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ je ortogonální na podprostor $X \subseteq \mathbb{R}^n$ (značíme $\mathbf{y} \perp X$), jestliže $\mathbf{y} \perp \mathbf{x}$ pro všechna $\mathbf{x} \in X$.

- Podprostory $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ jsou ortogonální (značíme $X \perp Y$), jestliže $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ pro všechna $\mathbf{x} \in X$ a $\mathbf{y} \in Y$.

- **Ortogonální doplněk** podprostoru $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je podprostor

$$X^{\perp} = \{\, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{y} \perp X \,\}$$

  všech vektorů ortogonálních na X.

Ortogonální podprostory

- Vektor $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ je ortogonální na podprostor $X \subseteq \mathbb{R}^n$ (značíme $\mathbf{y} \perp X$), jestliže $\mathbf{y} \perp \mathbf{x}$ pro všechna $\mathbf{x} \in X$.
- Podprostory $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ jsou ortogonální (značíme $X \perp Y$), jestliže $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ pro všechna $\mathbf{x} \in X$ a $\mathbf{y} \in Y$.
- **Ortogonální doplněk** podprostoru $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je podprostor
$$X^\perp = \{\, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{y} \perp X \,\}$$
všech vektorů ortogonálních na X.

Věta

Pro každý podprostor $X \subseteq \mathbb{R}^n$ platí:

- $\dim X + \dim X^\perp = n$
- $(X^\perp)^\perp = X$

Důkaz: Označíme-li $X = \operatorname{rng}(\mathbf{A}^T)$ (lin. obal řádků matice $\mathbf{A}$), pak první tvrzení je rank-nullity theorem. Druhé tvrzení celkem snadno plyne z prvního.

Vztahy mezi čtyřmi základními podprostory matice

Čtyři **základní podprostory** matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

- $\operatorname{rng} \mathbf{A} = \{ \mathbf{A}\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \} \subseteq \mathbb{R}^m$ lineární obal sloupců
- $\operatorname{null} \mathbf{A} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \} \subseteq \mathbb{R}^n$ všechny vektory kolmé na všechny řádky
- $\operatorname{rng}(\mathbf{A}^T) = \{ \mathbf{A}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \} \subseteq \mathbb{R}^n$ lineární obal řádků
- $\operatorname{null}(\mathbf{A}^T) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{A}^T\mathbf{x} = \mathbf{0} \} \subseteq \mathbb{R}^m$ všechny vektory kolmé na všechny sloupce

Vztahy mezi čtyřmi základními podprostory matice

Čtyři **základní podprostory** matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

- $\operatorname{rng} \mathbf{A} = \{ \mathbf{A}\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \} \subseteq \mathbb{R}^m$ — lineární obal sloupců
- $\operatorname{null} \mathbf{A} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \} \subseteq \mathbb{R}^n$ — všechny vektory kolmé na všechny řádky
- $\operatorname{rng}(\mathbf{A}^T) = \{ \mathbf{A}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \} \subseteq \mathbb{R}^n$ — lineární obal řádků
- $\operatorname{null}(\mathbf{A}^T) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{A}^T\mathbf{x} = \mathbf{0} \} \subseteq \mathbb{R}^m$ — všechny vektory kolmé na všechny sloupce

Věta

- $(\operatorname{rng} \mathbf{A})^\perp = \operatorname{null}(\mathbf{A}^T)$
- $(\operatorname{null} \mathbf{A})^\perp = \operatorname{rng}(\mathbf{A}^T)$

Důkaz plyne okamžitě z definic podprostorů a z rovnosti $(X^\perp)^\perp = X$.

Ortonormální množina vektorů

- Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ je **normalizovaný**, jestliže $\|\mathbf{x}\| = 1 = \mathbf{x}^T\mathbf{x}$.
- Množina vektorů $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ je **ortonormální**, jestliže

$$\mathbf{x}_i^T\mathbf{x}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq j \\ 1 & \text{pro } i = j \end{cases}$$

Ortonormální množina vektorů

- Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ je **normalizovaný**, jestliže $\|\mathbf{x}\| = 1 = \mathbf{x}^T\mathbf{x}$.
- Množina vektorů $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\}$ je **ortonormální**, jestliže

$$\mathbf{x}_i^T\mathbf{x}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq j \\ 1 & \text{pro } i = j \end{cases}$$

Věta

Ortonormální množina vektorů je lineárně nezávislá.

Důkaz: Vynásobení rovnosti $\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$ skalárně vektorem $\mathbf{x}_i$ dá $\alpha_i = 0$.

Ortonormální množina vektorů

- Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ je **normalizovaný**, jestliže $\|\mathbf{x}\| = 1 = \mathbf{x}^T\mathbf{x}$.
- Množina vektorů $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ je **ortonormální**, jestliže

$$\mathbf{x}_i^T\mathbf{x}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq j \\ 1 & \text{pro } i = j \end{cases}$$

Věta

Ortonormální množina vektorů je lineárně nezávislá.

Důkaz: Vynásobení rovnosti $\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$ skalárně vektorem $\mathbf{x}_i$ dá $\alpha_i = 0$.

Věta (souřadnice v ortonormální bázi)

Nechť jsou $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ ortonormální. Nechť $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k$. Pak $\alpha_i = \mathbf{x}_i^T\mathbf{x}$.
Neboli

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1^T\mathbf{x})\mathbf{x}_1 + \cdots + (\mathbf{x}_k^T\mathbf{x})\mathbf{x}_k$$

Důkaz: Vynásob rovnost $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k$ skalárně vektorem $\mathbf{x}_i$.

Souřadnice α_i je délka ortogonálního průmětu vektoru $\mathbf{x}$ na přímku $\operatorname{span}\{\mathbf{x}_i\}$.

Matice s ortonormálními sloupci

Když vektory $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$ tvoří sloupce matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, pak

$$\mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_j = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq j \\ 1 & \text{pro } i = j \end{cases} \qquad \text{je totéž jako} \qquad \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

Matice s ortonormálními sloupci

Když vektory $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$ tvoří sloupce matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, pak

$$\mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_j = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq j \\ 1 & \text{pro } i = j \end{cases} \qquad \text{je totéž jako} \qquad \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

Jestliže $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}$, pak lineární zobrazení $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ zachovává skalární součin:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x})^T \mathbf{f}(\mathbf{y}) = (\mathbf{A}\mathbf{x})^T (\mathbf{A}\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$$

Tedy zobrazení $\mathbf{f}$ zachovává délky, úhly a vzdálenosti $\Rightarrow$ je to (lineární) **isometrie**.

Ortogonální matice

Věta

Pro každou čtvercovou matici $\mathbf{A}$ jsou tato tvrzení ekvivalentní:

- $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}$ (tj. $\mathbf{A}$ má ortonormální sloupce)
- $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}$ (tj. $\mathbf{A}$ má ortonormální řádky)
- $\mathbf{A}$ je regulární a splňuje $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$

Čtvercová matice s ortonormálními sloupci se nazývá **ortogonální** matice.

Ortogonální matice

Věta

Pro každou čtvercovou matici $\mathbf{A}$ jsou tato tvrzení ekvivalentní:

- $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}$ (tj. $\mathbf{A}$ má ortonormální sloupce)
- $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}$ (tj. $\mathbf{A}$ má ortonormální řádky)
- $\mathbf{A}$ je regulární a splňuje $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$

Čtvercová matice s ortonormálními sloupci se nazývá **ortogonální** matice.

Protože

$$\det(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) = (\det \mathbf{A}^T)(\det \mathbf{A}) = (\det \mathbf{A})^2 = \det \mathbf{I} = 1$$

jsou jen dvě možnosti pro $\det \mathbf{A}$:

Ortogonální matice

Věta

Pro každou čtvercovou matici $\mathbf{A}$ jsou tato tvrzení ekvivalentní:

- $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}$ (tj. $\mathbf{A}$ má ortonormální sloupce)
- $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}$ (tj. $\mathbf{A}$ má ortonormální řádky)
- $\mathbf{A}$ je regulární a splňuje $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$

Čtvercová matice s ortonormálními sloupci se nazývá **ortogonální** matice.

Protože

$$\det(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) = (\det \mathbf{A}^T)(\det \mathbf{A}) = (\det \mathbf{A})^2 = \det \mathbf{I} = 1$$

jsou jen dvě možnosti pro $\det \mathbf{A}$:

- $\det \mathbf{A} = +1$: zobrazení $\mathbf{f}$ je **rotace**, matice $\mathbf{A}$ se nazývá **rotační** nebo **speciální ortogonální**

Ortogonální matice

Věta

Pro každou čtvercovou matici $\mathbf{A}$ jsou tato tvrzení ekvivalentní:

- $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}$ (tj. $\mathbf{A}$ má ortonormální sloupce)
- $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}$ (tj. $\mathbf{A}$ má ortonormální řádky)
- $\mathbf{A}$ je regulární a splňuje $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$

Čtvercová matice s ortonormálními sloupci se nazývá **ortogonální** matice.

Protože

$$\det(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) = (\det \mathbf{A}^T)(\det \mathbf{A}) = (\det \mathbf{A})^2 = \det \mathbf{I} = 1$$

jsou jen dvě možnosti pro $\det \mathbf{A}$:

- $\det \mathbf{A} = +1$: zobrazení $\mathbf{f}$ je **rotace**, matice $\mathbf{A}$ se nazývá **rotační** nebo **speciální ortogonální**
- $\det \mathbf{A} = -1$: zobrazení $\mathbf{f}$ je složení rotace a zrcadlení (reflexe)

Příklady ortogonálních matic:

- **Rotační matice v $\mathbb{R}^2$**

  Rotace kolem počátku o úhel φ proti směru hodinových ručiček:

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

Příklady ortogonálních matic:

- **Rotační matice v $\mathbb{R}^2$**
  Rotace kolem počátku o úhel φ proti směru hodinových ručiček:
  $$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

- **Householderova matice** (elementární reflektor)
  Zrcadlení podle nadroviny procházející počátkem s normálou $\mathbf{u}$ kde $\|\mathbf{u}\| = 1$:
  $$\mathbf{H} = \mathbf{I} - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T$$

Příklady ortogonálních matic:

- **Rotační matice v $\mathbb{R}^2$**

  Rotace kolem počátku o úhel φ proti směru hodinových ručiček:

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

- **Householderova matice** (elementární reflektor)

  Zrcadlení podle nadroviny procházející počátkem s normálou $\mathbf{u}$ kde $\|\mathbf{u}\| = 1$:

$$\mathbf{H} = \mathbf{I} - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T$$

- **Permutační matice**

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  Její determinant je rovný znaménku permutace.

Jak parametrizovat rotace v $\mathbb{R}^n$? [nepovinné]

Maticová exponenciála: $e^{\mathbf{A}} = \dfrac{\mathbf{A}^0}{0!} + \dfrac{\mathbf{A}^1}{1!} + \dfrac{\mathbf{A}^2}{2!} + \cdots$ (v Matlabu: `expm(A)`)

Jak parametrizovat rotace v $\mathbb{R}^n$? [nepovinné]

Maticová exponenciála: $$e^{\mathbf{A}} = \frac{\mathbf{A}^0}{0!} + \frac{\mathbf{A}^1}{1!} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \cdots$$ (v Matlabu: `expm(A)`)

Věta

Matice $\mathbf{A}$ je rotační, právě když existuje antisymetrická matice $\mathbf{S}$ tak, že $\mathbf{A} = e^{\mathbf{S}}$.

Jak parametrizovat rotace v $\mathbb{R}^n$? [nepovinné]

Maticová exponenciála: $e^{\mathbf{A}} = \frac{\mathbf{A}^0}{0!} + \frac{\mathbf{A}^1}{1!} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \cdots$ (v Matlabu: `expm(A)`)

Věta

Matice $\mathbf{A}$ je rotační, právě když existuje antisymetrická matice $\mathbf{S}$ tak, že $\mathbf{A} = e^{\mathbf{S}}$.

- Pro $n = 2$ a $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & s \\ -s & 0 \end{bmatrix}$ je $e^{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{bmatrix}$

Jak parametrizovat rotace v $\mathbb{R}^n$? [nepovinné]

Maticová exponenciála: $\quad e^{\mathbf{A}} = \dfrac{\mathbf{A}^0}{0!} + \dfrac{\mathbf{A}^1}{1!} + \dfrac{\mathbf{A}^2}{2!} + \cdots \qquad$ (v Matlabu: `expm(A)`)

Věta

Matice **A** je rotační, právě když existuje antisymetrická matice **S** tak, že $\mathbf{A} = e^{\mathbf{S}}$.

- Pro $n = 2$ a $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & s \\ -s & 0 \end{bmatrix}$ je $e^{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{bmatrix}$
- Pro $n = 3$ a $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & -s_3 & s_2 \\ s_3 & 0 & -s_1 \\ -s_2 & s_1 & 0 \end{bmatrix}$

  Tvrzení: Každá rotace v $\mathbb{R}^3$ kolem počátku je rotace kolem nějaké přímky procházející počátkem o nějaký úhel (axis-angle representation).

  Označíme-li $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$, pak přímka má normálu $\mathbf{s}/\|\mathbf{s}\|$ a úhel je $\|\mathbf{s}\|$.

Jak parametrizovat rotace v $\mathbb{R}^n$? [nepovinné]

Maticová exponenciála: $\quad e^{\mathbf{A}} = \frac{\mathbf{A}^0}{0!} + \frac{\mathbf{A}^1}{1!} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \cdots \qquad$ (v Matlabu: `expm(A)`)

Věta

Matice $\mathbf{A}$ je rotační, právě když existuje antisymetrická matice $\mathbf{S}$ tak, že $\mathbf{A} = e^{\mathbf{S}}$.

- Pro $n = 2$ a $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & s \\ -s & 0 \end{bmatrix}$ je $e^{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{bmatrix}$
- Pro $n = 3$ a $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & -s_3 & s_2 \\ s_3 & 0 & -s_1 \\ -s_2 & s_1 & 0 \end{bmatrix}$

  Tvrzení: Každá rotace v $\mathbb{R}^3$ kolem počátku je rotace kolem nějaké přímky procházející počátkem o nějaký úhel (axis-angle representation).

  Označíme-li $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$, pak přímka má normálu $\mathbf{s}/\|\mathbf{s}\|$ a úhel je $\|\mathbf{s}\|$.

Zájemci, studujte *matrix exponential, Lie groups, Rodriguez rotation formula, ...*

Čtěte např. skripta Motl+Zahradník: Pěstujeme lineární algebru (MFF UK)!

Gram-Schmidtova ortonormalizace

Pro dané lin. nezávislé vektory $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ najdi vektory $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n$ tak, že

- $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n$ jsou ortonormální,
- pro každé $k \leq n$ platí $\operatorname{span}\{\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_k\} = \operatorname{span}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k\}$.

Gram-Schmidtova ortonormalizace

Pro dané lin. nezávislé vektory $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ najdi vektory $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n$ tak, že

- $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n$ jsou ortonormální,
- pro každé $k \leq n$ platí $\operatorname{span}\{\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_k\} = \operatorname{span}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k\}$.

Algoritmus: Pro $k = 1, \ldots, n$ opakuj iteraci

$$\mathbf{q}_k' = \mathbf{a}_k - \sum_{i=1}^{k-1} (\mathbf{q}_i^T \mathbf{a}_k)\mathbf{q}_i, \qquad \mathbf{q}_k = \frac{\mathbf{q}_k'}{\|\mathbf{q}_k'\|}$$

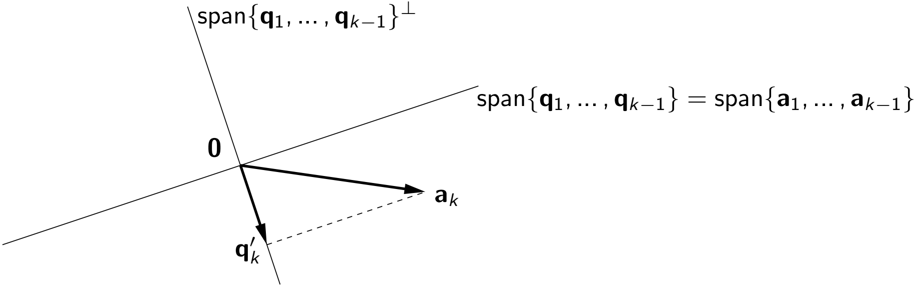
Gram-Schmidtova ortonormalizace

Pro dané lin. nezávislé vektory $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ najdi vektory $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n$ tak, že

- $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n$ jsou ortonormální,
- pro každé $k \leq n$ platí $\operatorname{span}\{\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_k\} = \operatorname{span}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k\}$.

Algoritmus: Pro $k = 1, \ldots, n$ opakuj iteraci

$$\mathbf{q}'_k = \mathbf{a}_k - \sum_{i=1}^{k-1} (\mathbf{q}_i^T \mathbf{a}_k)\mathbf{q}_i, \qquad \mathbf{q}_k = \frac{\mathbf{q}'_k}{\|\mathbf{q}'_k\|}$$



QR rozklad matice

Věta (Plný QR rozklad)

Každou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ lze rozložit na součin

$$\mathbf{A} = \mathbf{QR}$$

kde $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ je ortogonální a $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je horní trojúhelníková.

Důkaz: pomocí algoritmu. (Algoritmy na QR rozklad jsou založeny buď na Gram-Schmidtově ortogonalizaci nebo Givensových rotacích nebo Householderových reflexích.)

- V Matlabu: `[Q,R]=qr(A)`

QR rozklad matice

Věta (Plný QR rozklad)

Každou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ lze rozložit na součin

$$\mathbf{A} = \mathbf{QR}$$

kde $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ je ortogonální a $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je horní trojúhelníková.

Důkaz: pomocí algoritmu. (Algoritmy na QR rozklad jsou založeny buď na Gram-Schmidtově ortogonalizaci nebo Givensových rotacích nebo Householderových reflexích.)

- V Matlabu: `[Q,R]=qr(A)`

Redukovaný QR rozklad: $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ má ortonorm. sloupce a $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je horní trojúhelníková.

- V Matlabu: `[Q,R]=qr(A,0)`

QR rozklad matice

Věta (Plný QR rozklad)

Každou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ lze rozložit na součin

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{R}$$

kde $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ je ortogonální a $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je horní trojúhelníková.

Důkaz: pomocí algoritmu. (Algoritmy na QR rozklad jsou založeny buď na Gram-Schmidtově ortogonalizaci nebo Givensových rotacích nebo Householderových reflexích.)

- V Matlabu: `[Q,R]=qr(A)`

Redukovaný QR rozklad: $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ má ortonorm. sloupce a $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je horní trojúhelníková.

- V Matlabu: `[Q,R]=qr(A,0)`

Použití na soustavu lin. rovnic (**A** je čtvercová):

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{Q}\mathbf{R}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{R}\mathbf{x} &= \mathbf{Q}^T\mathbf{b} \end{aligned}$$