**Splay tree**

**1.**

Splay tree obsahuje 7 klíčů 1, 2, ..., 7. a je ideálně vyvážený, to jest má hloubku 2. Po vyhledání prvku s klíčem 1 se tento prvek přesune do kořene stromu. Jakou hloubku bude mít výsledný strom?

**Řešení** Hloubka bude 4, výsledný strom je znázorněn na schématu.

[1]\_\_

 [2]\_\_\_\_

 \_\_[4]\_\_\_\_

 [3] \_\_[6]\_\_

 [5] [7]

**2.**

Řešte předchozí úlohu pro jednotlivé hodnoty klíčů 1, 2, ..., 7. Vždy předpokládejte, že strom je zcela vyvážený.

**Řešení** Pro klíč s hodnotou 4, který je v kořeni, se strom nezmění. Přístup k prvku s klíčem 7 bude mít analogické následky jako přístup k prvku s klíčem 1, proces a výsledek bude zrcadlově shodný s přístupem k prvku s klíčem 1.

Podobně stačí prozkoumat změny po přístupu k prvku s klíčem 2 a 3, přístup k prvkům s klíčem 5 a 6 bude opět zrcadlově shodný. Po přístupu k prvku s klíčem 2 provedeme pouze operaci zig, to jest pravou jednoduchou rotaci v kořeni, chcete-li. Výsledný strom je na schématu

 \_\_[2]\_\_\_\_

[1] \_\_[4]\_\_\_\_

 [3] \_\_[6]\_\_

 [5] [7]

Přístup k prvku s klíčem 3 znamená provést operaci zig-zag, to jest LR dvojotou rotaci v kořeni v kořeni, chcete-li. Výsledný strom je na schématu

 \_\_[3]\_\_

 \_\_[2] [4]\_\_\_\_

[1] \_\_[6]\_\_

 [5] [7]

**3.**

Předpokládejme, že perfektně vyvážený splay tree má hloubku h > 0. Po přístupu k prvku s nejmenším klíčem ve stromu se strom změní a vzroste jeho hloubka. Jaká bude nová hloubka stromu? Řešte zvlášť

pro sudé a liché h.

Řešení Předpokládejme h sudé. Posun zkoumaného prvku do kořene stromu pak představuje určitý počet zig-zig rotací (neboli RR rotací v AVL terminologii). Každá zig-zig rotace v uzlu u sníží hloubku levého podstromu o 2 a zároveň zvýší hloubku pravého podstromu o 2. Jak uzel s nejmenším klíčem postupuje vzhůru stromem, postupně každý pravý podstrom jeho prarodiče (v němž rotace probíhá) zvýší svou hloubkku, ale v příští operaci zig-zig už je podstromem levým, a svou hlobku opět sníží takže nakonec po provedení poslední zig-zig rotace v koření se hloubka pravého podstromu zvýší o 2, levý podstrom kořene bude prázdný a celková hloubka stromu tak bude h+2. Nyní předpokládejme h liché.

Levý podstrom kořene je stromem se sudou hloubkou, na něj můžeme použít výsledek pravého odstavce a zjistíme, že poté, co se prvek s nejmenším líčem stane levým potomkem kořene, bude mít pravý podstrom levého potomka (označme jej T) hloubku h+2. Poslední rotace zig v koření zvýší hloubku pravého podstromu kořene o 1, ale nezmění hloubku podstromu T, takže nakonec bude nová hloubka opět rovna h+2.

**4.**

Do nejprve prázdného stromu splay tree vkládejte postupně klíče 2, 7, 1, 4, 3, 9, 5, 6. Nakreslete strom po každém vložení.

**Řešení** je patro z následujících schémat.

[2]

[2]\_\_

 [7]

[1]\_\_

 [2]\_\_

 [7]

 \_\_\_\_[4]\_\_

[1]\_\_ [7]

 [2]

 \_\_[3]\_\_

 \_\_[2] [4]\_\_

[1] [7]

 \_\_\_\_\_\_\_\_[9]

 \_\_[3]\_\_\_

 \_\_[2] \_\_[7]

[1] [4]

 \_\_\_\_\_[5]\_\_\_\_\_

 \_\_[3]\_\_ \_\_[9]

 \_\_[2] [4] [7]

[1]

 \_\_[6]\_\_

 \_\_[5] [7]\_\_

 \_\_[3]\_\_ [9]

 \_\_[2] [4]

[1]

**RB tree**

Červenočerný strom má řadu vlastností, které je nutno si pamatovat, odvozují se špatně.

Citujme z přednášky:

1. Every node is either red or black

2. Every leaf (nil) is black

3. If a node is red, then both its children are black

4. Every simple path from a node to a descendant leaf contains the same number of black nodes

(5. Root is black)

**1.**

Stromy nad danou množinou n klíčů:

1. AVL strom je vždy ideálně vyvážený
2. RB strom má stejnou hloubku všech listů, které obsahují klíče
3. AVL strom n uzly se vyvažuje v nejhorším případě za použití log2(n) rotací
4. RB strom s pouze černými uzly je pravidelný

**Řešení** AVL strom se běžně vyvažuje rotacemi, takže zřejmě není pokaždé ideálně vyvážený, což znamená, že varianta a) neplatí. Přiklady v přednášce (i jinde) ukazují RB stromy s různou hloubkou listů. Varianta b) tedy také neplatí. Vyvažování stromu se děje v čase úměrném konstantě, tudíž i varianta c) odpadá. Zbývá tak jen poslední varianta d). RB strom je vždy pravidelný, nezávisle na barvě uzlů.

**2.**

Červenočerný strom

1. má maximální výšku rovnou 2/3 své černé výšky
2. má červené listy
3. následníci červeného uzlu jsou vždy černí a jsou tři
4. udržuje ve všech větvích stejnou černou výšku

**Řešení** Podmínka 3. říká, že v žádné cestě z kořene do listu nemůže být více červených uzlů než černých, výška stromu tedy nepřekročí dvojnásobek jeho černé výšky. Prostřídáme-li ve vyváženém stromu červené a černé vrstvy, vidíme, že lze tohoto maxima téměř dosáhnout. Varianta a) neplatí. Varianta b) je vyloučena podmínkou 2., varianta c) nepravdivě sugeruje, že strom je ternární (Následník ve smyslu uspořádání zleva doprava může být jen jeden). Platí varianta d) totožná s podmínkou 4.

**3.**

Červenočerný strom

1. má maximální výšku rovnou dvojnásobku své černé výšky
2. má ve všech větvích stejný počet uzlů
3. má tři typy uzlů: černé, červené a bílé
4. následníci černého uzlu jsou vždy červení

**Řešení** Variantu d) vyvrací strom se dvěma uzly. Jeden je kořenem, druhý je listem. Podle podmínek 2. a 5. Jsou oba černí. Varianta c) je zřejmý nesmysl, variantu b) vyvrací předchozí příklad se dvěma uzly. Zbývá jen správná varianta a). .

**4.**

Abychom získali RB-strom s černou výškou 2, musíme obarvit uzly takto:

1. A,C,G červené a ostatní černé
2. B,D,G červené a ostatní černé
3. A,C,D červené a ostatní černé
4. B,F,D červené a ostatní černé

**Řešení** c).

**5.**

Abychom získali RB-strom s černou výškou 2, musíme obarvit uzly takto:

:

1. A,C,D,G červené a ostatní černé
2. B,D,G červené a ostatní černé
3. B,F,D červené a ostatní černé
4. A,C,G červené a ostatní černé

**Řešení** b).

**6.**

nil

nil

nil

nil

nil

nil

nil

Červenočerný strom je často používanou strukturou. Jaké barvy mají označené uzly, aby strom na obrázku opravdu byl červenočerným stromem?

1. A červený, B červený, C černý, D černý, E černý
2. A černý, B červený, C černý, D černý, E černý
3. A červený, B černý, C červený, D černý, E červený
4. A černý, B červený, C černý, D červený, E černý

**Řešení** Jedna z vlastností červenočerného stromu je ta, že cesta z kořene do libovolného listu obsahuje stejný počet černých uzlů. Ve větvi DC nemohou být oba uzly červené, další vlastností červenočerného stromu je totiž to, že červený uzel není nikdy bezprostředním potomkem červeného uzlu. Na cestě z kořene do levého potomka uzlu D však musí být stejný počet černých uzlů jako na cestě z kořene do potomka uzlu E. To lze zajistit pouze tak, že uzel D bude černý a uzel E bude červený. Když si nyní prohlédneme nabízené varianty, vidíme, že tuto kombinaci obsahuje pouze varianta c). Ještě ji ověřme. Na cestě z kořene do libovolného listu tedy máme mít (podle rozboru větve DE) vždy jen jediný černý uzel (nepočítaje kořen a list). To lze v levém podstromu kořene zajistit buď tak, že uzly A a C budou černé a uzel B červený, nebo naopak tak, že B bude černý a A a C červené. Tato poslední možnost je vskutku obsažena i ve variantě c).

nil

nil

nil

nil

nil

nil

**7.**

Červenočerný strom je často používanou strukturou. Jaké barvy mají mít označené uzly, aby strom na obrázku opravdu byl červenočerným stromem?

1. A červený, B červený, C černý, D černý
2. A červený, B černý, C červený, D černý
3. A černý, B červený, C černý, D černý
4. A černý, B červený, C černý, D červený

**Řešení** Jedna z vlastností červenočerného stromu je ta, že cesta z kořene do libovolného listu obsahuje stejný počet černých uzlů. Ve větvi DC nemohou být oba uzly červené, další vlastností červenočerného stromu je totiž to, že červený uzel není nikdy bezprostředním potomkem červeného uzlu. Na cestě z kořene do pravého potomka uzlu D však musí být stejný počet černých uzlů jako na cestě z kořene do potomka uzlu C. To lze zajistit pouze tak, že uzel D bude černý a uzel C bude červený. Když analogickou úvahu aplikujeme na větev BA, zjistíme, že uzel B musí být černý a uzel A červený. Celkem tak vychází právě odpověď ve variantě b).