
Stupně uzlů

Není-li výslovně uvedeno jinak, uvažujeme vždy konečný neorientovaný prostý graf bez smyček.

Musí být počet uzlů lichého stupně v grafu sudý nebo lichý? Proč?

Platí předchozí konstatování o součtu stupňů také obráceně, tj. může každé sudé číslo představovat součet stupňů všech uzlů nějakého grafu G ? Nebo některá sudá čísla nemohou být uvedeným součtem? Která?

Může existovat graf, jenž má méně hran než uzlů a neobsahuje vrchol stupně 1?

Když se dva účastníci konference setkají poprvé, vymění si navštívenky. Je počet navštívenek, které takto změnilo majitele během konference, sudý nebo lichý? Je sudý nebo lichý počet účastníků, kteří rozdali lichý počet navštívenek?

Turnaj hraje 8 družstev systémem každý s každým. Bylo odehráno celkem 9 zápasů. Je možné, že každé družstvo sehrálo zatím nejvýše 2 zápasy? Je možné že po odehrání celkem 17 zápasů sehrálo každé družstvo nejvýše 4 zápasy?

Mohou být všechny stupně uzlů v obyčejném grafu navzájem různá čísla?

Daný graf s n uzly má právě dva vrcholy stejného stupně. Může to být stupeň 0 nebo $n-1$?

Dokažte pomocí pokud možno co nejjednodušší konstrukce, že pro každé $n > 2$ existuje graf s n uzly, který obsahuje rovnoběžné hrany (nikoli smyčky) a jehož všechny uzly mají různý stupeň.

Najděte graf se 7 uzly, v němž právě dva uzly mají stejný stupeň. Najděte ještě jiný takový graf. Jsou navzájem svými doplňky?

Otázka, zda ve společnosti mohou být zároveň dvě trojice, kde v jedné se všichni znají a v druhé všichni neznají, je triviální. Na pozitivní odpověď stačí pět osob. Nakreslete příslušný graf.

Může mít souvislý graf méně hran než uzlů?

Může mít nesouvislý graf více hran než uzlů?

Jaký minimální počet hran je nutno odebrat z K_n , aby vznikl nesouvislý graf?

Jaký maximální počet hran lze odebrat z K_n , aby zůstala zachována souvislost grafu?

Jaký minimální počet hran je nutno odebrat z K_n , aby vznikl graf s k komponentami?

Stromy

Jsou dány tři kusy papíru. Některý z nich rozstříháme na tři kusy, některý ze všech kusů rozstříháme opět na tři kusy, atd. Kolik kusů celkem vznikne, když bylo rozstříženo celkem k kusů papíru (nezávisle na velikosti)? Řešte úlohu rovněž obecně pro m počátečních kusů a stříhání na n dílů. Interpretujte úlohu grafově.

Na stole vidíme ležet k uzavřených krabic. Kdykoli otevřeme jakoukoli krabici, bude buď prázdná nebo bude obsahovat opět k (nejspíše menších) uzavřených krabic. Kromě toho víme, že celkový počet neprázdných krabic je m . Když otevřeme všechny plné krabice, kolik uvidíme uzavřených krabic?

Turnaje ve stolním tenisu, který se hraje vylučovacím způsobem, se zúčastnilo celkem 19 hráčů. Šest vylosovaných hráčů muselo sehrát o jedno utkání více. Nakreslete graf reprezentující průběh turnaje a určete počet jeho vnitřních uzlů tj. počet utkání, která byla během turnaje sehrána. Kolik utkání by bylo nutno sehrát pro 147 hráček a hráčů?

Ve stromu s n uzly určíme každé hraně náhodnou orientaci. Jaká je pravděpodobnost, že vznikne kořenový strom?

Algoritmy a implementace

Úplný binární strom se sedmi uzly je vyvážený a uzly jsou očíslovány po patrech zleva doprava 1...7 (jako v binární haldě). Napište matici sousednosti tohoto grafu. Předpokládejme, že náš strom obsahuje $2^n - 1$ uzlů ($n > 0$), tj. má hloubku $n-1$ (kořen má hloubku 0). Popište algoritmus, jímž matici sousednosti vygenerujete přímo, bez skutečného procházení tímto stromem.

Druhá mocnina grafu G je graf G^2 , jehož množina uzlů se shoduje s množinou uzlů grafu G a jehož množina hran je určena takto: G^2 obsahuje hranu (u,v) jen a jen tehdy, pokud G obsahuje zároveň hrany (u,w) a (w,v) , kde w je libovolný uzel grafu G . Jinými slovy, G^2 vznikne z G tak, že do G přidáme hrany mezi všemi uzly spojenými cestou délky 2 a odstraníme původní hrany. Popište, jak vytvoříte G^2 , když jsou grafy zadány (a) spojovou reprezentací (b) maticí sousednosti. Která varianta bude rychlejší?

Modifikujte algoritmus (nebo váš funkční program) DFS tak, aby vypsal každou hranu grafu (každou právě jednou).

Řešte předchozí úlohu pro BFS.

Napište funkční DFS kód rekurzivně i nerekurzivně.