Doba běhu daného algoritmu/programu

1.
Který fragment programu z následujících dvou proběhne rychleji?

```
int n = 100;
int sum = 0;
for (i = 0; i < n; i++)
   for (j = 0; j < i; j++)
      sum += i+j;
```

```
int n = 75;
int sum = 0;
for (i = 0; i < n; i++)
   for (j = 0; j < n; j++)
      sum += i+j;
```

2.
Do následujícího kódu doplňte chybějící konstantu v podmínce tak, aby byla procedura `xyz()` volána právě 2100 krát.

```
for (i=0; i < 70; i++) {
  j = 0;
  do {
    if (j > ___ ) xyz();
    j++;
  } while (j < 90);
}
```

3.
Do následujícího kódu doplňte chybějící konstantu v podmínce tak, aby byla procedura `xyz()` volána právě 2000 krát.

```
i = 50;
do {
  for (j=0; j < 70; j++)
    if (j > ___ ) xyz();
  i++;
} while (i < 150);
```

4.
Do následujícího kódu doplňte chybějící výraz v podmínce tak, aby byla procedura `uvw()` volána právě 49 krát.

```
for (i = 0; i < 7; i++) {
  j = i;
  while (j < ___) {
    uvw();
    j++;
  }
}
```

5.
Do následujícího kódu doplňte chybějící konstantu v podmínce tak, aby byla procedura `uvw()` volána právě 85 krát.

```
i = 0;
while (i < 10) {
  for (j = i; j < ___; i++)
    uvw();
  i++;
}
```

6.

Ke zpracování *k*-tého řádku matice velikosti $n \times n$ je zapotřebí 2*k* operací. Celkem je ke zpracováni matice zapotřebí operací

a) $2n^2$
b) $(n^2)/2$
c) $n(n+1)/2$
d) $n(n-1)$
e) $n(n+1)$

7.

Úloha, jejíž doba řešení je $C \cdot n^2$, kde n je rozsah vstupních dat, se řeší na počítači pro n = 5000. Je zakoupen nový počítač, který je cca 2.5 krát rychlejší. Jak je možno zvětšit rozsah vstupních dat, aby byla úloha vyřešena na novém počítači ve stejném čase?
Řešte pro různé závislosti doby řešení na rozsahu vstupních dat:
$C \cdot n^3$, $C \cdot n^{0.5}$, $C \cdot n \cdot \log_2(n)$ ...

8.

Stroj provádí 10^9 operací za sekundu. Pro výpočet je k dispozici 1 hodina. Určete, jaká může být maximální hodnota n, která určuje velikost vstupních dat, v případě že počet nezbytných instrukcí pro zpracování dat o velikosti n je: $n^{3/2}$, $n^{5/4}$, $n \cdot \log_2(n) \cdot \log_2(\log_2(n))$, $n^2 \cdot \log_2(n)$, ... a další.

9.

Metoda A potřebuje k vyřešení úlohy $n^2 + 17$ operací, Metoda B potřebuje $2n + 80$ operací, přičemž celé číslo n popisuje rozsah vstupních dat. Pro jaká n je výhodnější použít metodu A?

Asymptotická složitost

10.

Pro rostoucí spojité fukce f(x), g(x) platí $f(x) \in \Omega(g(x))$. Z toho plyne, že

a) $f(x) \in O(g(x))$
b) $f(x) \in \Theta(g(x))$
c) $g(x) \in \Theta(f(x))$
d) $g(x) \in \Omega(f(x))$
e) $g(x) \in O(f(x))$

11.
Pro rostoucí spojité fukce f(x), g(x) platí f(x) $\in$ O(g(x)). Z toho plyne, že

a) f(x) $\in \Theta$(g(x))
b) f(x) $\in \Omega$(g(x))
c) g(x) $\in \Theta$(f(x))
d) g(x) $\in \Omega$(f(x))
e) g(x) $\in$ O(f(x))

12.
Pokud funkce f roste asymptoticky rychleji než funkce g (tj. f(x) $\notin$ O(g(x))), platí následující tvrzení

a) jsou-li v bodě x definovány obě funkce, pak f(x) > g(x)
b) rozdíl f(x) - g(x) je vždy kladný
c) rozdíl f(x) - g(x) je kladný pro každé x > y, kde y je nějaké dostatečně velké číslo
d) obě funkce f i g jsou definovány jen pro nezáporné argumenty
e) nic z předchozího

13.
Pokud funkce f roste asymptoticky stejně rychle jako funkce g (tj. f(x) $\in \Theta$(g(x))), platí právě jedno následující tvrzení. Které?

a) jsou-li v bodě x definovány obě funkce, pak f(x) = g(x)
b) ani poměr f(x)/g(x) ani poměr g(x)/f(x) nekonverguje k nule s rostoucím x
c) rozdíl f(x) - g(x) je kladný pro každé x > y, kde y je nějaké dostatečně velké číslo
d) obě funkce f i g jsou definovány jen pro nezáporné argumenty
e) nic z předchozího

14.
Pro dvě spojité funkce f(*x*) a g(*x*) rostoucí na celém **R** platí f(*x*) < g(*x*) pro každé *x* $\in$ **R**. To znamená

a) f(*x*) $\notin \Omega$(g(*x*))
b) f(*x*) $\notin$ O(g(*x*))
c) je možné, že f(*x*) $\in \Omega$(g(*x*))
d) g(*x*) $\notin \Theta$(f(*x*))
e) f(*x*) roste asymptoticky pomaleji než g(*x*)

15.
Pro dvě spojité funkce f(*x*) a g(*x*) rostoucí na celém **R** platí f(*x*) $\notin \Omega$ (g(*x*)), f(*x*) $\notin \Theta$(g(*x*)). Tudíž:

a) g(*x*) $\in$ O(f(*x*))
b) g(*x*) $\in \Theta$(f(*x*))
c) f(*x*) < g(*x*) pro každé x $\in$ **R**
d) f(*x*) $\le$ g(*x*) pro každé x $\in$ **R**
e) může existovat *y* $\in$ **R** takové, že f(*y*) > g(*y*)

16.
Algoritmus A probírá postupně všechny prvky v dvourozměrném poli o velikosti $n \times n$ a s každým prvkem provádí další (nám neznámou) akci, jejíž složitost je $\Theta(\log_2(n))$. Celková asymptotická složitost algoritmu A je tedy

a) $\Theta(n \cdot \log_2(n))$
b) $\Theta(n^2)$
c) $\Theta(n^3)$
d) $\Theta(n^2+\log_2(n))$
e) $\Theta(n^2 \cdot \log_2(n))$

17.
Právě jeden z následujících výroků je nepravdivý. Označte jej.

a) $x \cdot \log_2(x) \in \mathrm{O}(x^2 - x)$
b) $x \cdot \log_2(x) \in \mathrm{O}(x^2 - \log_2(x))$
c) $x \cdot \log_2(x) \in \Omega(x^2 - \log_2(x))$
d) $x \cdot \log_2(x) \in \Omega(x + \log_2(x))$
e) $x \cdot \log_2(x) \in \Theta(x \cdot \log_2(x^2))$

18.
Algoritmus A provede jeden průchod polem s n prvky. Při zpracování prvku na pozici k provede $k+n$ operací. Operační (=asymptotická) složitost algoritmu A je tedy

a) $\Theta(k+n)$
b) $\Theta((k+n) \cdot n)$
c) $\Theta(k^2+n)$
d) $\Theta(n^2)$
e) $\Theta(n^3)$

19.
V následujících vztazích doplňte na prázdná místa (........) symboly O nebo Θ nebo Ω tak, aby vznikla pravdivá tvrzení. Je-li možností více, uveďte je všechny, nehodí-li se ani jeden symbol, prázdné místo proškrtněte.

a) $x^2 \cdot 2^x \in$ ....$((\ln(x^2))^2 + 2^x)$
b) $(\ln(x^2))^2 + 2^x \in$ ....$(x^2 + \ln(x^2))$
c) $2^x \cdot (\ln(x))^{-1} \notin$ ....$(2^x \cdot (\ln(x^2))^{-1})$

20.
V následujících vztazích doplňte na prázdná místa (........) symboly O nebo Θ nebo Ω tak, aby vznikla pravdivá tvrzení. Je-li možností více, uveďte je všechny, nehodí-li se ani jeden symbol, prázdné místo proškrtněte.
a) $x^2 \cdot \ln(x^2) \in$ ....$(x^2 + \ln(x))$
b) $x^3 + \ln(x^2) \in$ ....$(x^3 + 2^x)$
c) $x^3 \cdot \ln(x^2) \notin$ ....$(\ln(x^2) + 2^x)$

21.
Uveďte příklad tří rostoucích funkcí reálné proměnné f(x), g(x) a h(x), pro které současně platí všechny tři následující vztahy:
$f(x) \notin O(g(x))$, $g(x) \notin \Theta(h(x))$, $h(x) \notin \Omega(f(x))$
Pokud taková trojice funkcí nemůže existovat, napište krátké zdůvodnění, proč.

22.
Uveďte příklad tří rostoucích funkcí reálné proměnné f(x), g(x) a h(x), pro které současně platí všechny tři následující vztahy:
$f(x) \notin O(g(x))$, $g(x) \notin \Omega(h(x))$, $h(x) \notin \Theta(f(x))$
Pokud taková trojice funkcí nemůže existovat, napište krátké zdůvodnění, proč.