Definice
Nechť $k \leq n \in \mathbb{N}_0$. Definujeme jejich **kombinační číslo** nebo **binomický koeficient** jako

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Čteme to „n nad k“.

Fakt 11a.4.
(i) Pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ platí $\binom{n}{0} = 1$.
(ii) Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $\binom{n}{1} = n$.
(iii) Nechť $k \leq n \in \mathbb{N}_0$. Pak platí $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Fakt 11c.1. (Pascalova identita, Pascal's identity)
Pro všechna $k \leq n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

Věta 11c.3. (binomická věta, binomial theorem)
Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \\ &= x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}y^2 + \cdots + \frac{n(n-1)}{2} x^2 y^{n-2} + nxy^{n-1} + y^n.\end{aligned}$$

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1

1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1

1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1

1 14 91 364 1001 2002 3003 3432 3003 2002 1001 364 91 14 1

1 15 105 455 1365 3003 5005 6435 6435 5005 3003 1365 455 105 15 1

Důsledek 11c.7.
Nechť $n \in \mathbb{N}$. Pak platí

(i) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$;

(ii) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

Fakt 11c.9. (Vandermondeho identita)
Pro všechna $k, m, n \in \mathbb{N}_0$ taková, že $k \leq m$ a $k \leq n$, platí $\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} = \binom{m+n}{k}$.

Důsledek 11c.10.
Pro $n \in \mathbb{N}_0$ platí $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$.

Fakt 11c.8.
Nechť $k \leq n \in \mathbb{N}_0$. Pak $\sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}$.

Věta 11a.5.
Uvažujme množinu o n různých prvcích.
(i) Je $n!$ způsobů, jak je seřadit (neboli je $n!$ permutací).
(ii) Jestliže na pořadí záleží a opakování není povoleno, pak je $\frac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k} \cdot k!$ různých způsobů, jak vybrat k prvků z této množiny.
(iii) Jestliže na pořadí záleží a opakování je povoleno, pak je n^k různých způsobů, jak vybrat k prvků z této množiny.
(iv) Jestliže na pořadí nezáleží a opakování není povoleno, pak je $\binom{n}{k}$ různých způsobů, jak vybrat k prvků z této množiny.
(v) Jestliže na pořadí nezáleží a opakování je povoleno, pak je $\binom{n+k-1}{k}$ různých způsobů, jak vybrat k prvků z této množiny.

	bez opakování	s opakováním
s pořadím (variace)	$\frac{n!}{(n-k)!}$	n^k
bez pořadí (kombinace)	$\binom{n}{k}$	$\binom{n+k-1}{k}$

Věta 11a.6.
Mějme n objektů, z toho n_1 je typu 1 (jsou nerozlišitelné), n_2 typu 2 až n_k je typu k, tedy $\sum\limits_{i=0}^{k} n_i = n$.

Pak je $\dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_k!}$ různých permutací těchto objektů.

Věta 11b.1. (Princip inkluze a exkluze, principle of inclusion and exclusion)
Jsou-li A_i pro $i = 1, 2, \dots, n$ konečné množiny, pak

$$\Big|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n-1}\Big|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\Big|$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}|.$$

11b.4. Dirichletův šuplíkový princip (Pidgeonhole principle)
Jestliže je alespoň $k+1$ objektů rozděleno do k krabiček, tak musí být krabička obsahující alespoň dva objekty.

Fakt 11b.5.
Nechť $c, k \in \mathbb{N}$. Je-li alespoň $ck+1$ objektů umístěno do k krabiček, pak existuje krabička, která má více než c objektů.

Fakt 11b.6.
Je-li N objektů umístěno do k krabiček, pak existuje krabička, která má alespoň $\lceil \frac{N}{k} \rceil$ objektů.