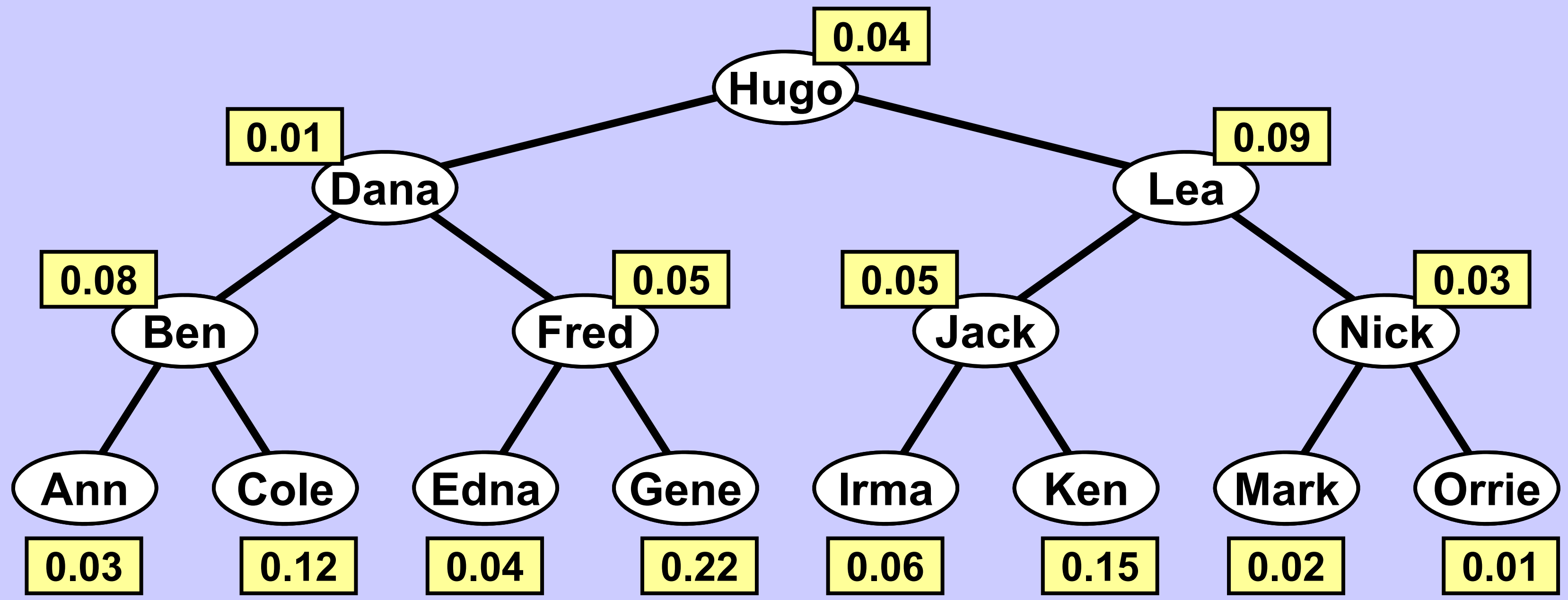
Dynamické programování

Optimální binární vyhledávací strom

Optimální binární vyhledávací strom

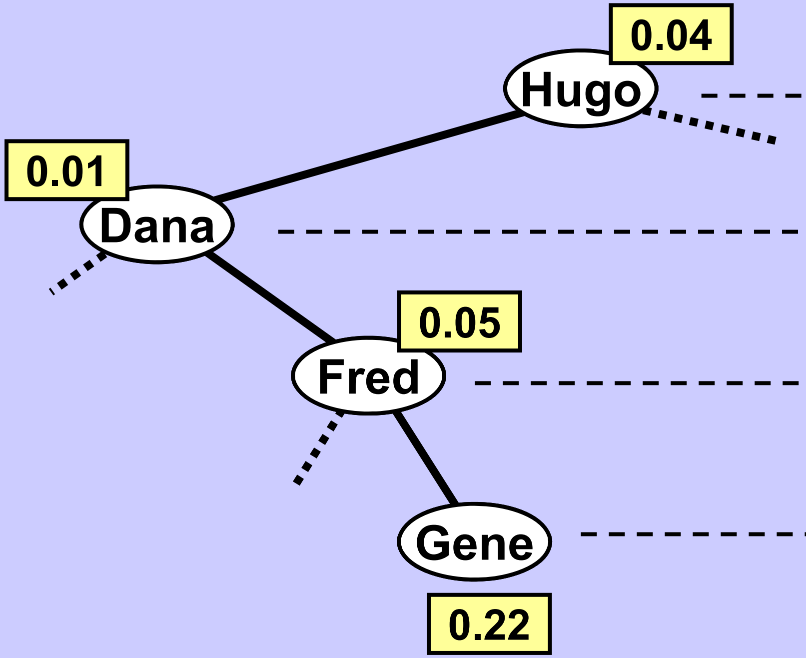
Vyvážený, ale ne optimální



Optimální binární vyhledávací strom

Cena jednotlivých uzlů v BVS

cena uzlu = **pravděpodobnost** × hloubka



hloubka	
1	$0.04 \cdot 1 = 0.04$
2	$0.01 \cdot 2 = 0.02$
3	$0.05 \cdot 3 = 0.15$
4	$0.22 \cdot 4 = 0.88$

cena uzlu = průměrný počet testů na nalezení uzlu
při jednom dotazu (Find)

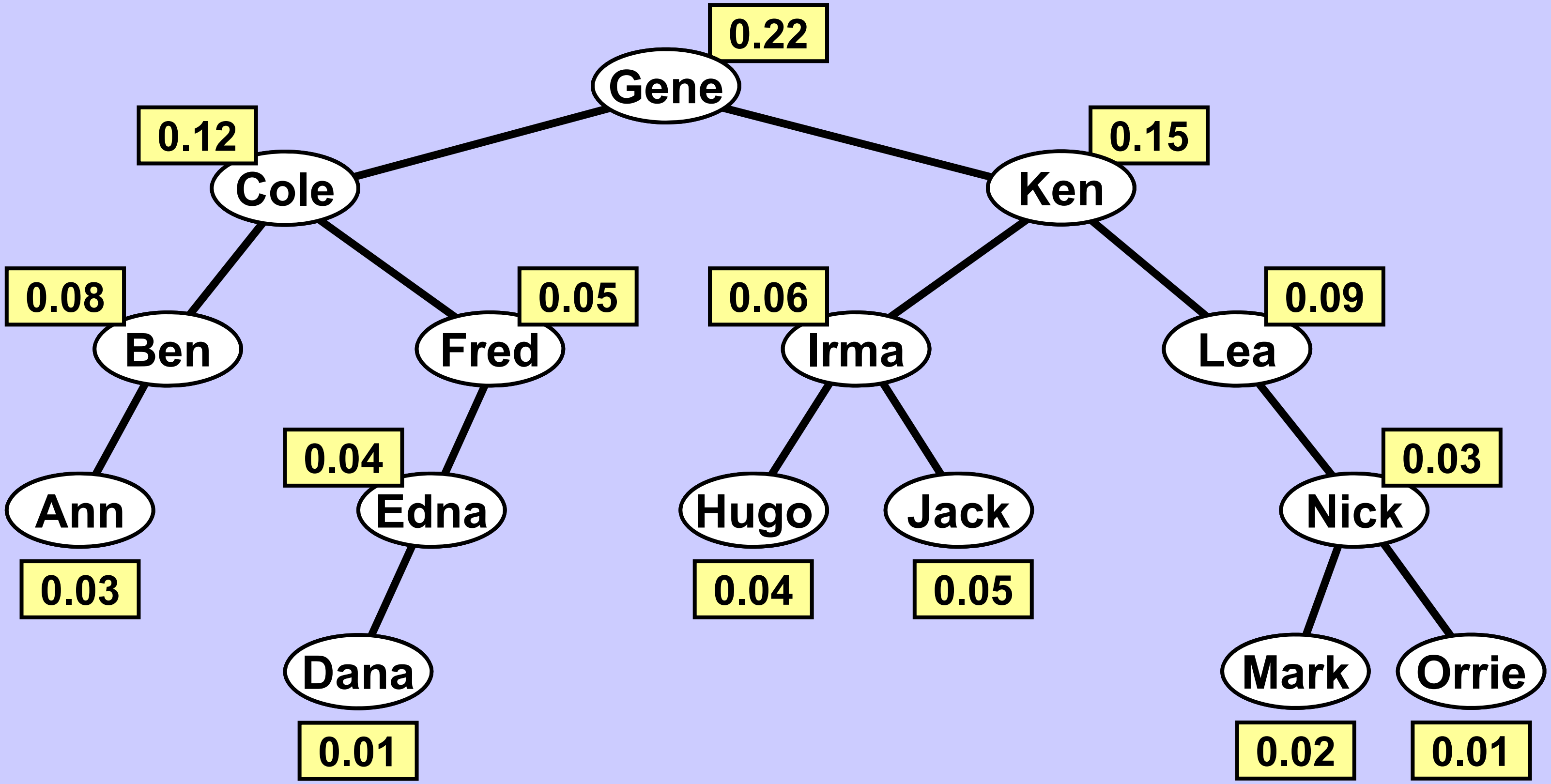
Cena vyváženého stromu

klíč	pravděp. p_k	hloubka d_k	$p_k \cdot d_k$
Ann	0.03	4	0.03 · 4 = 0.12
Ben	0.08	3	0.08 · 3 = 0.24
Cole	0.12	4	0.12 · 4 = 0.48
Dana	0.01	2	0.01 · 2 = 0.02
Edna	0.04	4	0.04 · 4 = 0.16
Fred	0.05	3	0.05 · 3 = 0.15
Gene	0.22	4	0.22 · 4 = 0.88
Hugo	0.04	1	0.04 · 1 = 0.04
Irma	0.06	4	0.06 · 4 = 0.24
Jack	0.05	3	0.05 · 3 = 0.15
Ken	0.15	4	0.15 · 4 = 0.60
Lea	0.09	2	0.09 · 2 = 0.18
Mark	0.02	4	0.02 · 4 = 0.08
Nick	0.03	3	0.03 · 3 = 0.09
Orrie	0.01	4	0.01 · 4 = 0.04
			Cena celkem: 3.47

Cena celkem = prům. poč. testů na jednu operaci Find.

Optimální BVS

Struktura optimálního BVS s danými pravděpodobnostmi

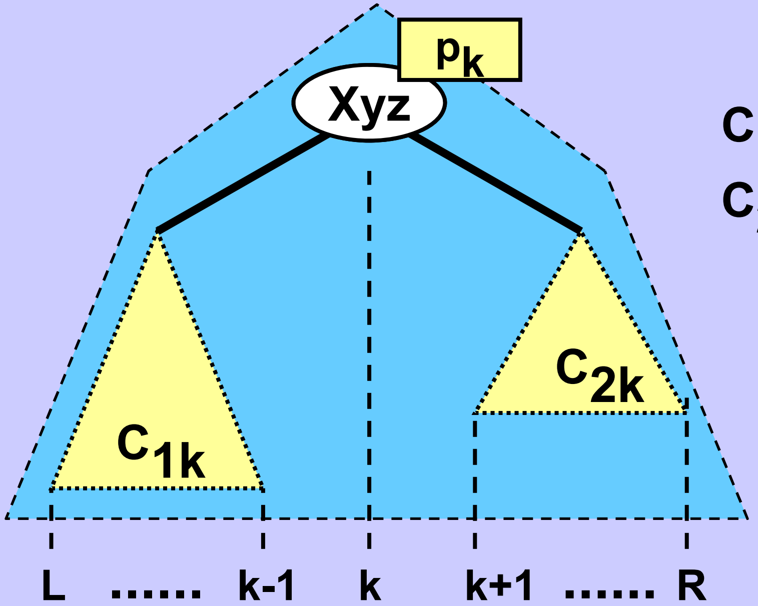


Cena optimálního BVS

klíč	pravděp. p_k	hloubka d_k	$p_k \cdot d_k$
Ann	0.03	4	$0.03 \cdot 4 = 0.12$
Ben	0.08	3	$0.08 \cdot 3 = 0.24$
Cole	0.12	2	$0.12 \cdot 2 = 0.24$
Dana	0.01	5	$0.01 \cdot 5 = 0.05$
Edna	0.04	4	$0.04 \cdot 4 = 0.16$
Fred	0.05	3	$0.05 \cdot 3 = 0.15$
Gene	0.22	1	$0.22 \cdot 1 = 0.22$
Hugo	0.04	4	$0.04 \cdot 4 = 0.16$
Irma	0.06	3	$0.06 \cdot 3 = 0.18$
Jack	0.05	4	$0.05 \cdot 4 = 0.20$
Ken	0.15	2	$0.15 \cdot 2 = 0.30$
Lea	0.09	3	$0.09 \cdot 3 = 0.27$
Mark	0.02	5	$0.02 \cdot 5 = 0.10$
Nick	0.03	4	$0.03 \cdot 4 = 0.12$
Orrie	0.01	5	$0.01 \cdot 5 = 0.05$
			Cena celkem 2.56

Zrychlení 3.47 : 2.56 = 1 : 0.74

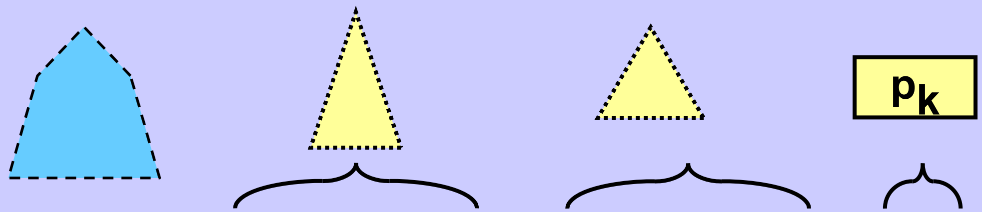
Výpočet ceny optimálního BVS



C_{1k} ..... cena levého podstromu uzlu k

C_{2k} ..... Cena pravého podstromu uzlu k

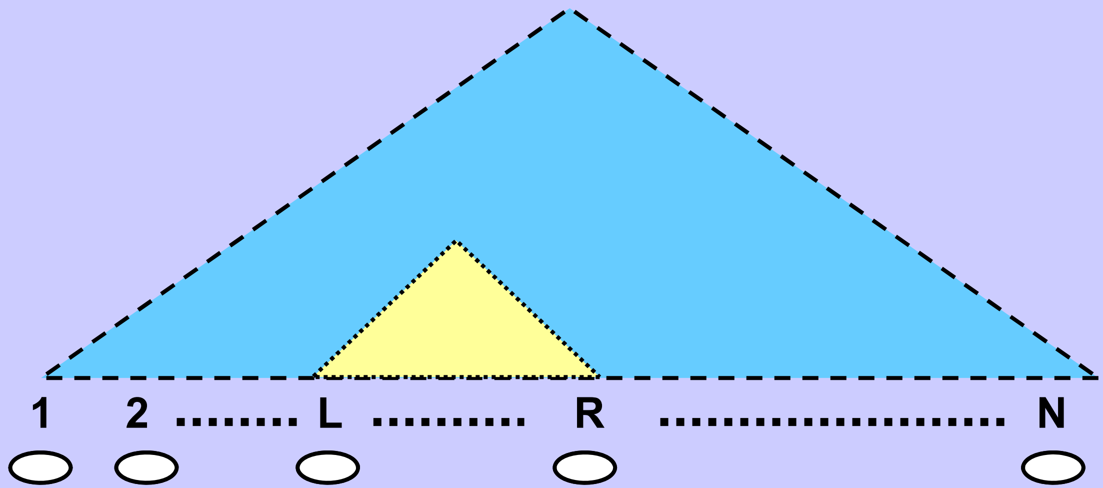
Rekurzivní myšlenka



$$\text{Cena} = C_{1k} + \sum_{i=L}^{k-1} p_i + C_{2k} + \sum_{i=k+1}^{R} p_i + p_k$$

Výpočet ceny optimálního BVS

Malé optimální podstromy



Nad prvky s indexy od L do R
lze jistě vytvořit jeden optimální podstrom.

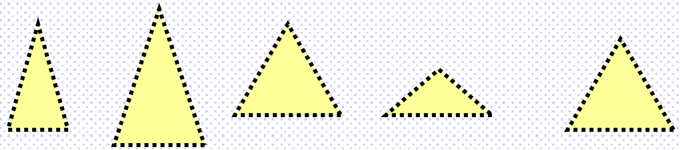
Velikost stromu
= poč. uzlů
= L-R+1

Máme	N	optimalních podstromů velikosti	1
	N-1		2
	N-2		3
	⋮		⋮
	1	podstrom	N

Celkem máme N * (N+1) /2 různých optimálních podstromů.

Minimalizace ceny BVS

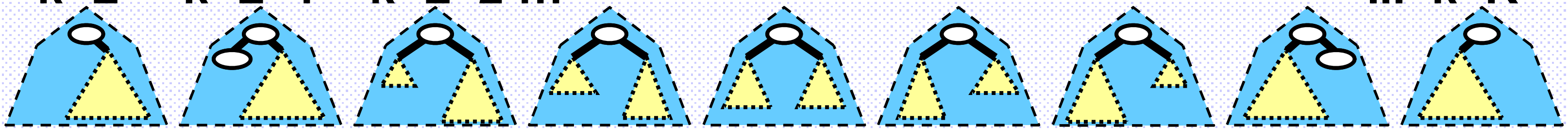
Idea rekurzivního řešení:



1. Předpoklad : Všechny menší optimální stromy jsou známy.

2. Zkus: k = L, L+1, L+2, ..., R

k=L k=L+1 k=L+2 … … k=R



3. Zaregistruj index k, který minimalizuje cenu, tj. hodnotu

$$C_{1k} + \sum_{i=L}^{k-1} p_i + C_{2k} + \sum_{i=k+1}^{R} p_i + p_k$$

4. Klíč s indexem k je kořenem optimálního stromu.

Minimalizace ceny BVS

C(L,R) ...... Cena optimálního podstromu obsahujícího klíče s indexy L, L+1, L+2, ..., R-1, R

$$C(L,R) = \min_{L \le k \le R} \{ C(L, k-1) + \sum_{i=L}^{k-1} p_i + C(k+1,R) + \sum_{i=k+1}^{R} p_i + p_k \} =$$

$$= \min_{L \le k \le R} \{ C(L, k-1) + C(k+1,R) + \sum_{i=L}^{R} p_i \} =$$

$$(*) \quad = \min_{L \le k \le R} \{ C(L, k-1) + C(k+1,R) \} + \sum_{i=L}^{R} p_i$$

Hodnota k minimalizující (*) je indexem kořenu optim. podstromu.

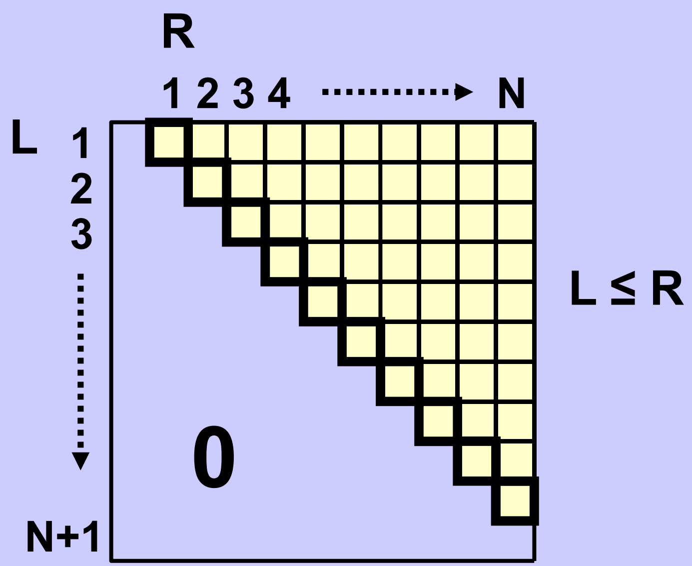
Datové struktury pro výpočet optmálního BVS

Ceny optimálních podstromů

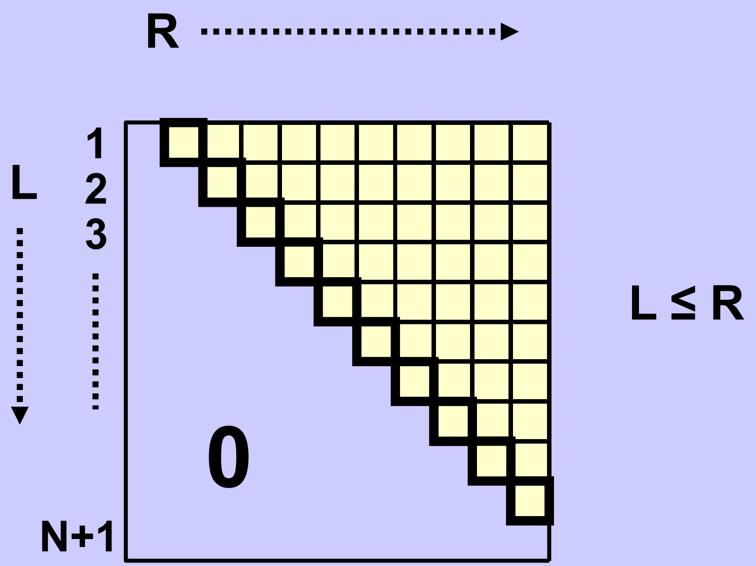
pole C [L][R] (L ≤ R)

Kořeny optimálních podstromů

pole roots [L][R] (L ≤ R)



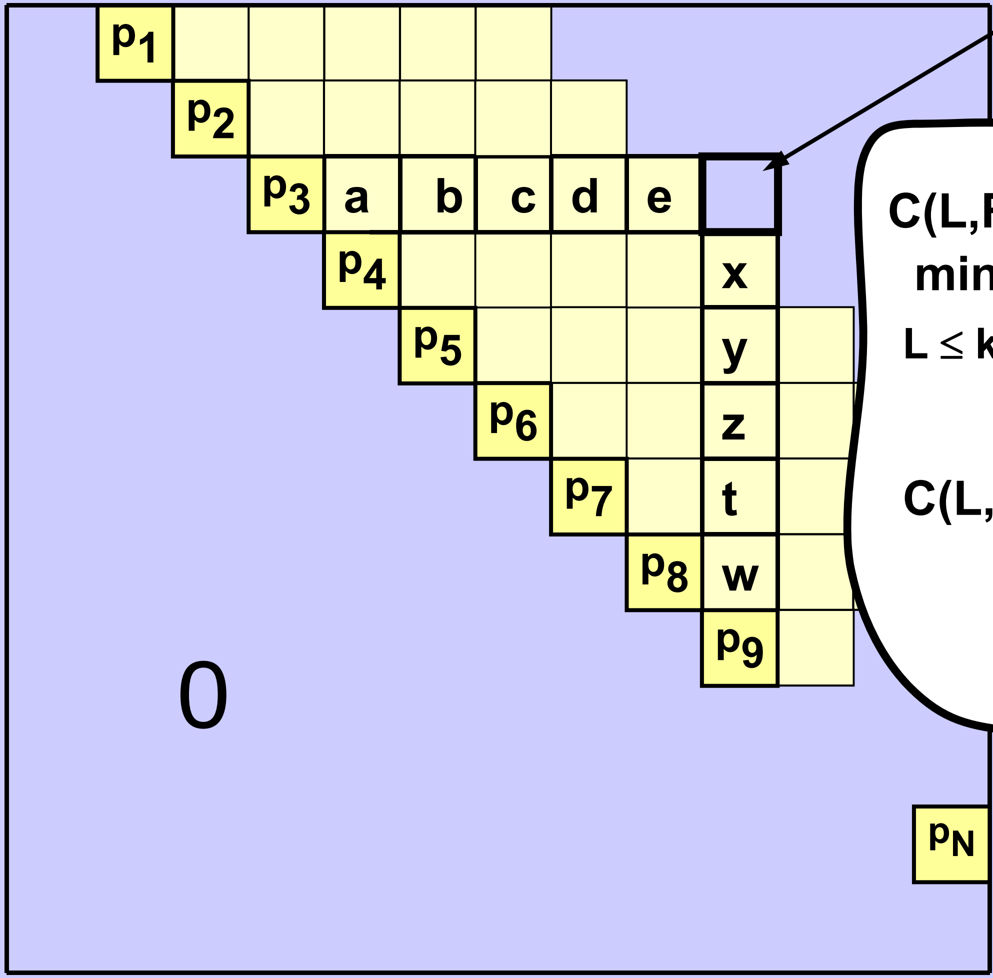
diagonála ... L= R



diagonála ... L= R

Výpočet optimálního BVS

Cena konkrétního optimálního podstromu



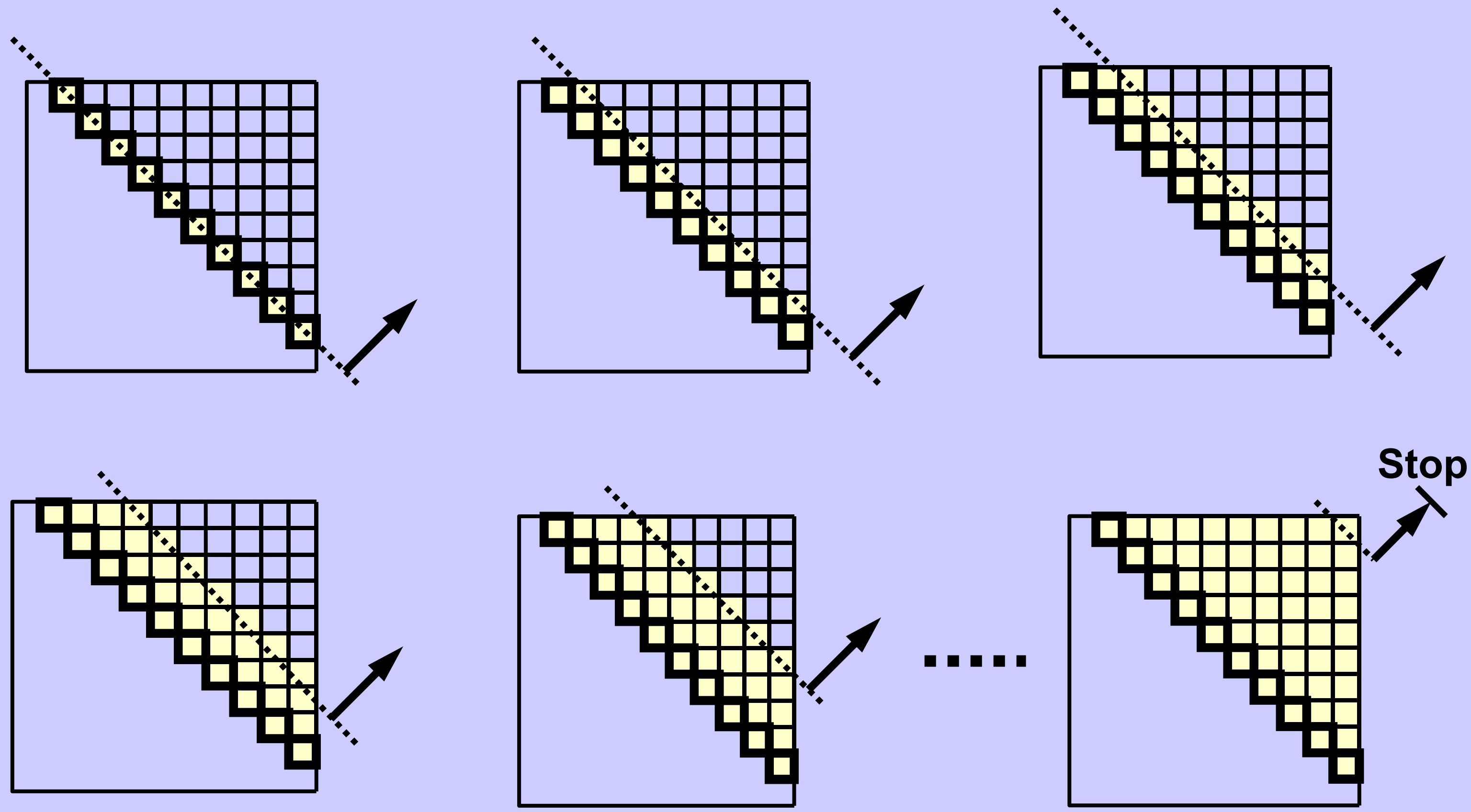
L=3, R=9

$$C(L,R) = \min_{L \le k \le R} \{ C(L, k-1) + C(k+1,R) \} + \sum_{i=L}^{R} p_i$$

$$C(L,R) = \min\{ 0+x,\ p_3+y,\ a+z,\ b+t,\ c+w,\ d+p_9,\ e+0 \} + \sum_{i=L}^{R} p_i$$

Výpočet optimálního BVS

Strategie DP
– nejprve se zpracují nejmenší podstromy, pak větší, atd…



Výpočet optimálního BVS

Výpočet DP tabulek cen a kořenů

```
void optimalTree() {
  int L, R; double min;

  // size = 1
  for( i=0; i<=N; i++ ) {
    C[i][i] = pravděpodobnost[i]; roots[i][i] = i;

  // size > 1
  for( int size = 2; size <= N; size++ ) {
    L = 1; R = size;
    while( R <= N ) {
      C[L][R] = min(C[L][k-1]+C[k+1][R], k = L..R);
      roots[L][R] = 'k minimalizující předch. řádek';
      C[L][R] += sum(C[i][i], i = L..R);
      L++; R++;
}   }   }
```

Výpočet optimálního BVS

Vybudování optimálního stromu pomocí rekonstrukční tabulky kořenů

```
void buildTree( int L, int R) {

  if (R < L) return;

  int keyIndex = roots[L][R];
  // keys ... sorted array of keys
  int key = keys[roots[L][R]];

  insert(root, key);    // standard BST insert
  buildTree( L, keyIndex -1 );
  buildTree( keyIndex +1, R );
}
```

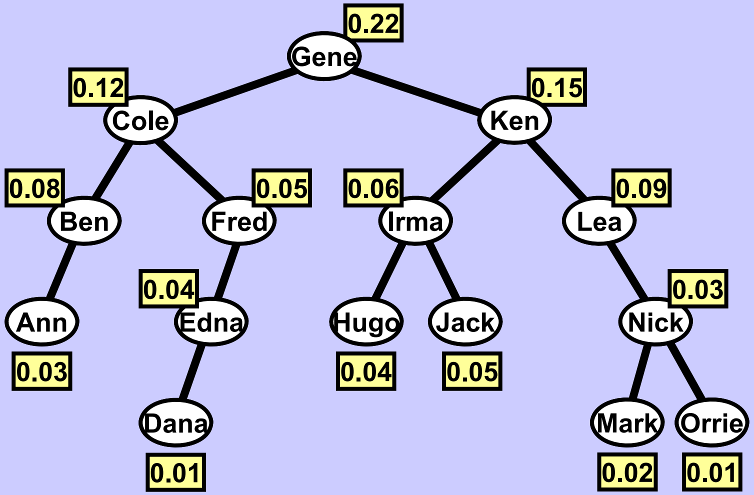
Výpočet optimálního BVS

Kořeny optimálních podstromů

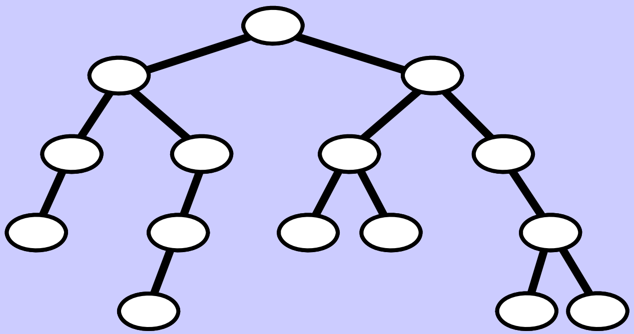
0	1	2	3	3	3	3	3	7	7	7	7	7	7	7	7
0	0	2	3	3	3	3	7	7	7	7	7	7	7	7	7
0	0	0	3	3	3	3	7	7	7	7	7	7	7	7	7
0	0	0	0	4	5	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7
0	0	0	0	0	5	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7
0	0	0	0	0	0	6	7	7	7	7	7	7	7	11	11
0	0	0	0	0	0	0	7	7	7	7	7	11	11	11	11
0	0	0	0	0	0	0	0	8	9	9	11	11	11	11	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	9	9	11	11	11	11	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	11	11	11	11	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	11	11	11	11	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12	12	12	12
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	13	14	14
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	14	14
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	15
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

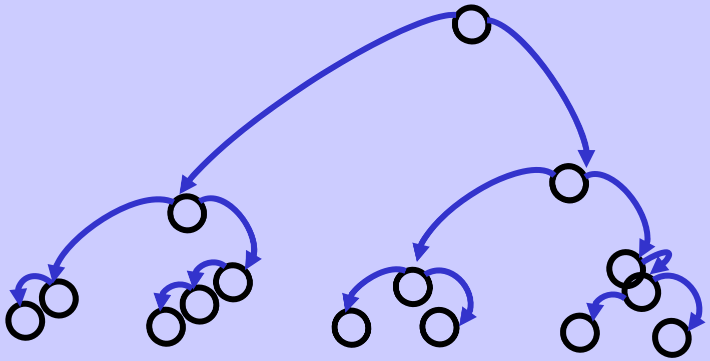
Výpočet optimálního BVS

Korespondence stromů



0	1	2	3	3	3	3	3	7	7	7	7	7	7	7	7
0	0	2	3	3	3	3	7	7	7	7	7	7	7	7	7
0	0	0	3	3	3	3	7	7	7	7	7	7	7	7	7
0	0	0	0	4	5	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7
0	0	0	0	0	5	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7
0	0	0	0	0	0	6	7	7	7	7	7	7	7	11	11
0	0	0	0	0	0	0	7	7	7	7	7	11	11	11	11
0	0	0	0	0	0	0	0	8	9	9	11	11	11	11	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	9	9	11	11	11	11	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	11	11	11	11	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	11	11	11	11	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12	12	12	12
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	13	14	14
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	14	14
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	15
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0





Výpočet optimálního BVS

Ceny optimálních podstromů

	1-A	2-B	3-C	4-D	5-E	6-F	7-G	8-H	9-I	10-J	11-K	12-L	13-M	14-N	15-O
1-A	0.03	0.14	0.37	0.39	0.48	0.63	1.17	1.26	1.42	1.57	2.02	2.29	2.37	2.51	2.56
2-B	0	0.08	0.28	0.30	0.39	0.54	1.06	1.14	1.30	1.45	1.90	2.17	2.25	2.39	2.44
3-C	0	0	0.12	0.14	0.23	0.38	0.82	0.90	1.06	1.21	1.66	1.93	2.01	2.15	2.20
4-D	0	0	0	0.01	0.06	0.16	0.48	0.56	0.72	0.87	1.32	1.59	1.67	1.81	1.86
5-E	0	0	0	0	0.04	0.13	0.44	0.52	0.68	0.83	1.28	1.55	1.63	1.77	1.82
6-F	0	0	0	0	0	0.05	0.32	0.40	0.56	0.71	1.16	1.43	1.51	1.63	1.67
7-G	0	0	0	0	0	0	0.22	0.30	0.46	0.61	1.06	1.31	1.37	1.48	1.52
8-H	0	0	0	0	0	0	0	0.04	0.14	0.24	0.54	0.72	0.78	0.89	0.93
9-I	0	0	0	0	0	0	0	0	0.06	0.16	0.42	0.60	0.66	0.77	0.81
10-J	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.05	0.25	0.43	0.49	0.60	0.64
11-K	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.15	0.33	0.39	0.50	0.54
12-L	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.09	0.13	0.21	0.24
13-M	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.02	0.07	0.09
14-N	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.03	0.05
15-O	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.01

Dynamické programování

Nejdelší společná podposloupnost

Nejdelší společná podposloupnost

Dvě posloupnosti

A: C B E A D D E A |A| = 8

B: D E C D B D A |B| = 7

Společná podposloupnost

A: C B E A D D E A

B: D E C D B D A

C: C D A |C| = 3

Nejdelší společná podposloupnost (NSP)

A: C B E A D D E A

B: D E C D B D A

C: E D D A |C| = 4

Nejdelší společná podposloupnost

A_n: $(a_1, a_2, ..., a_n)$

B_m: $(b_1, b_2, ..., b_m)$

C_k: $(c_1, c_2, ..., c_k)$

....

$C_k = LCS(A_n, B_m)$

	1	2	3	4	5	6	7	8
A_8:	C	B	E	A	D	D	E	A
B_7:	D	E	C	D	B	D	A	
C_4:	E	D	D	A				

Rekurzivní pravidla:

$$(a_n = b_m) \implies (c_k = a_n = b_m) \ \& \ (C_{k-1} = LCS(A_{n-1}, B_{m-1}))$$

	1	2	3	4	5	6	7	8
A_8:	C	B	E	A	D	D	E	A
B_7:	D	E	C	D	B	D	A	
C_4:	E	D	D	A				

	1	2	3	4	5	6	7	8
A_7:	C	B	E	A	D	D	E	A
B_6:	D	E	C	D	B	D	A	
C_3:	E	D	D	A				

Nejdelší společná podposloupnost

$(\, a_n \mathrel{!=} b_m \,)\ \&\ (c_k \mathrel{!=} a_n\,) \implies (C_k = LCS\,(A_{n-1}, B_m)\,)$

	1	2	3	4	5	6	7	8
A_7:	C	B	E	A	D	D	E	
B_6:	D	E	C	D	B	D		
C_3:	E	D	D					

	1	2	3	4	5	6	7	8
A_6:	C	B	E	A	D	D	E	
B_6:	D	E	C	D	B	D		
C_3:	E	D	D					

$(\, a_n \mathrel{!=} b_m \,)\ \&\ (c_k \mathrel{!=} b_m\,) \implies (C_k = LCS\,(A_n, B_{m-1})\,)$

	1	2	3	4	5	6	7	8
A_5:	C	B	E	A	D			
B_5:	D	E	C	D	B			
C_2:	E	D						

	1	2	3	4	5	6	7	8
A_5:	C	B	E	A	D			
B_4:	D	E	C	D	B			
C_2:	E	D						

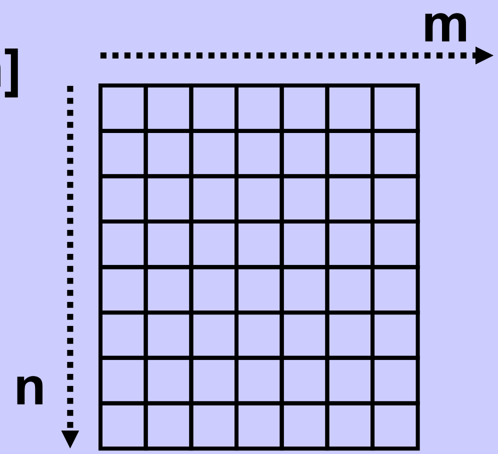
Nejdelší společná podposloupnost

Rekurzivní funkce – délka LCS

$$C(n,m) = \begin{cases} 0 & n = 0 \text{ or } m = 0 \\ C(n-1, m-1) + 1 & n > 0, m > 0, a_n = b_m \\ \max\{ C(n-1, m), C(n, m-1) \} & n > 0, m > 0, a_n \neq b_m \end{cases}$$

Strategie dynamického programování

C[n][m]




```
for( a=1; a<=n; a++ )
  for( b=1; b<=m; b++ )
    C[a][b] = .... ;
}
```

Nejdelší společná podposloupnost

Konstrukce DP tabulek pro LCS

```
void findLCS() {
  for( int a=1; a<=n; a++ )
    for( int b=1; b<=m; b++ )
      if( A[a] == B[b] ) {
         C[a][b] = C[a-1][b-1]+1;
         arrows[a][b] = DIAG;  ↖
         }
      else
        if( C[a-1][b] > C[a][b-1] ) {
           C[a][b] = C[a-1][b];
           arrows[a][b] = UP;  ↑
        }
        else {
          C[a][b] = C[a][b-1];
          arrows[a][b] = LEFT;  ←
 }      }
```

Nejdelší společná podposloupnost

Pole NSP pro "CBEADDEA" a "DECDBDA"

		C	0	1	2	3	4	5	6	7
		B:		D	E	C	D	B	D	A
	0		0	0	0	0	0	0	0	0
	1	C	0	← 0	← 0	↖ 1	← 1	← 1	← 1	← 1
	2	B	0	← 0	← 0	↑ 1	← 1	↖ 2	← 2	← 2
	3	E	0	← 0	↖ 1	← 1	← 1	↑ 2	← 2	← 2
A:	4	A	0	← 0	↑ 1	← 1	← 1	↑ 2	← 2	↖ 3
	5	D	0	↖ 1	← 1	← 1	↖ 2	← 2	↖ 3	← 3
	6	D	0	↖ 1	← 1	← 1	↖ 2	← 2	↖ 3	← 3
	7	E	0	↑ 1	↖ 2	← 2	← 2	← 2	↑ 3	← 3
	8	A	0	↑ 1	↑ 2	← 2	← 2	← 2	↑ 3	↖ 4

Nejdelší společná podposloupnost

Výpis NSP -- rekurzivně :)

```
void outLCS( int a, int b ) {
if( a ==0 || b == 0 ) return;

if( arrows[a][b]  == DIAG ) {
    outLCS(a-1, b-1);       // recursion ...
    print(A[a]);            // ... reverses the sequence!
    }
else
    if( arrows[a][b] == UP )
        outLCS(a-1,b);
    else
        outLCS(a,b-1);
}
```