Zkouška OPT 23.6.2021

Každý příklad pište na samostatnou stránku a ofoťte do samostatného souboru, jehož jméno (bez přípony) je číslo příkladu. Každý příklad musí mít nejen odpověď, ale i postup. Odpověď bez postupu se nepočítá.

1. Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu 4 a $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ je její plný QR rozklad. Navíc předpokládáme, že $r_{ii} \neq 0$ pro $i = 1, 2, 3$ a $r_{44} = 0$. Nechť d je norma prvního sloupce matice $\mathbf{A}$.

   (a) **(2b)** Je možné z těchto údajů zjistit absolutní hodnotu prvku r_{11}? Pokud ano, jak?

   (b) **(3b)** Dá se pomocí řádků nebo sloupců matice $\mathbf{Q}$ vyjádřit $\operatorname{null} \mathbf{A}^\top$ a $\operatorname{rng} \mathbf{A}$? Pokud ano, jak?

   (c) **(3b)** Nechť $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ je daný vektor. Zapište jeho ortogonální projekci na $\operatorname{rng} \mathbf{A}$ pomocí údajů matice $\mathbf{Q}$.

   (d) **(2b)** Zapište matici $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$ jen pomocí údajů z matice $\mathbf{R}$.

   (a) Ano, je to d. (b) $\operatorname{rng} A$ je obal prvních tří sloupců matice Q, $\operatorname{null} A^T$ je obal posledního sloupce matice Q. (c) $x' = Q'Q'^T x$, kde Q' jsou první tři sloupce matice Q. (d) $R^T R$

2. Uvažujme následující soustavu rovnic:

$$\sin x = 0$$
$$\cos x + y = 0.$$

   (a) **(2b)** Najděte všechna řešení této soustavy.

   (b) **(3b)** Napište jednu iteraci Newtonovy metody. Výraz upravte tak, aby neobsahoval inverzi matice.

   (c) **(3b)** Najděte body, které nejsou řešením soustavy, a ze kterých Newtonova metoda selže po jedné iteraci. Zdůvodněte.

   (d) **(2b)** Napište alespoň jeden bod, který není řešením soustavy, a z kterého Newtonova metoda konverguje do řešení po jedné iteraci. Zdůvodněte.

   (a) z prvni rovnice dostaneme $x = k\pi$ pro $k \in \mathbb{Z}$, z druhe pak $y = -\cos k\pi$. druhy clen je vzdy ± 1, ale to neni nutne. (b) newtonova metoda provadi iteraci

$$\begin{pmatrix} x^{k+1} \\ y^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^k \\ y^k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos x^k & 0 \\ -\sin x^k & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sin x^k \\ \cos x^k + y^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^k \\ y^k \end{pmatrix} - \frac{1}{\cos x^k} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sin x^k & \cos x^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin x^k \\ \cos x^k + y^k \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x^k \\ y^k \end{pmatrix} - \frac{1}{\cos x^k} \begin{pmatrix} \sin x^k \\ 1 + y^k \end{pmatrix}.$$

   (c) Newtona metoda selze, pokud je matice singularni; tedy $\cos x^0 = 0$. (d) Je treba uhodnout pocatecni iteraci $x^0 = 2k\pi$. pote se z predchoziho dostane

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 + y^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 + y^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k\pi \\ -1 \end{pmatrix},$$

   coz je reseni soustavy. Tedy y^0 muze byt libovolne krome reseni -1. Jde udelat podobne i pro $x^0 = \pi + 2k\pi$.

3. Minimalizujeme funkci $f(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2$ za podmínek $x_1 - 2x_2 \leq 4$, $-4x_1 + 2x_2 \leq 8$ a $x_1, x_2 \geq 0$.

   (a) **(3b)** Nalezněte všechny extremální body množiny přípustných řešení.

   (b) **(2b)** Řešte uvedenou úlohu.

   (c) **(3b)** Formulujte duální program a ten vyřešte.

   (d) **(1b)** Modifikujte původní lineární program tak, aby měl nekonečně mnoho řešení, ale nebyla to všechna přípustná řešení.

   (e) **(1b)** Modifikujte původní lineární program tak, aby byl neomezený.

   (a) Je to neomezený polyedr s vrcholy $(0,0), (4,0), (0,4)$. (b) $(0,0)$ (c) $\max 4y_1 + 8y_2$ z.p. $y_1 - 4y_2 \leq 3$, $-2y_1 + 2y_2 \leq 4$, kde $y_i \leq 0$. Podle slabé duality hned plyne, že $(0,0)$ je i řešením duálu. (d) Např. účelová funkce $g(x_1, x_2) = x_1$. (e) $\min -3x_1 - 4x_2$

4. Řešte následující úlohy.

   (a) **(2b)** Je zobrazení $f(x, y, z) = (2x - y + 3z + 1, y - z)$ afinní? Pokud ano, dokažte, že ho lze psát ve tvaru $f(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}$ pro nějakou matici $\mathbf{A}$ a vektor $\mathbf{b}$.

(b) **(2b)** Určete všechny argumenty maxima funkce $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x}$, kde $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.

(c) **(2b)** Najděte funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která má minimum právě ve dvou bodech a v nich neexistuje derivace.

(d) **(4b)** Nechť $\mathbf{A}$ je ortogonální matice a $\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{A}^\top - 2\mathbf{x}\mathbf{x}^\top$, kde $\mathbf{x}$ je jednotkový vektor. Je $\mathbf{B}$ ortogonální matice? Zdůvodněte.

(a) Ano. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = (1, 0)$ (b) Body na přímce $x_1 = -x_2$. (c) $f(x) = \min\{|x|, |x-1|\}$. (d) Ano, je to vlastně Householder.

5. Máme rotační kužel o známé výšce v a známém poloměru podstavy r. Do kužele je vložen (rotační) válec, jehož podstava leží na podstavě rotačního kuželu. Tento válec je plně obsažen v rotačním kuželi.

(a) **(3b)** Zformulujte optimalizační úlohu nalezení rozměrů válce tak, aby byly splněny výše uvedené podmínky, a aby byl objem válce byl maximalizován.

(b) **(5b)** Úlohu vyřešte.

(c) **(2b)** Napište, jak by vypadal optimalizační problém, v němž by se kromě válce měly najít i optimální rozměry rotačního kužele, který má jednotkový objem (objem rotačního kužele je $\frac{1}{3}\pi r^2 v$). Zdůrazněte, co jsou optimalizační proměnné. Napište, jak byste problém řešili (samotné řešení počítat nemusíte).

(a) optimalizacni promenne: x polomer valce, y vyska valce. objem valce je $\pi x^2 y$. podminky $0 \le x \le r$ a $0 \le y \le v$. podminka na obsazeni valce v kuzeli je $y \le v - v\frac{x}{r}$. (b) uvedomime si, ze vzhledem k tomu, ze chceme maximalizovat objem, tak posledni nerovnost bude splnena s rovnosti, tedy $y = v - v\frac{x}{r}$. dosadime do ucelove funkce, kde maximalizujeme $\pi v x^2(1 - \frac{x}{r})$ za podminek $0 \le x \le r$ a z podminky na y vypadne $0 \le v(1 - \frac{x}{r}) \le v$. tyto podminky jsou stejne, takze tu druhou muzeme zahodit. ucelove funkce je az na konstantu rovna $x^2(r - x)$. derivaci ucelove funkce dostaneme potencialni extremy $x = 0$ a $x = \frac{2}{3}r$. overenim techto dvou bodu a krajniho bodu $x = r$ dostaneme, ze polomer valce jsou dve tretiny polomeru kuzelu. (c) bude dalsi optimalizacni promenne budou x a v. obe musi byt nezaporne a dalsi podminka bude na objem. pro reseni bych vycislil obe podminky na rovnosti, dosadil do ucelove funkci, cimz se dostane optimalizaci nejake funkce za podminek $0 \le x \le r$. vyresim pro $x = 0$ (rovnost, dosadim), pro $x - r = 0$ (rovnost, dosadim nebo Lagrangian) a jako problem bez omezeni.

Bodů celkem: 50