Zkouška OPT 4.6.2021

Každý příklad pište na samostatnou stránku a ofoťte do samostatného souboru, jehož jméno (bez přípony) je číslo příkladu. Každý příklad musí mít nejen odpověď, ale i postup. Odpověď bez postupu se nepočítá.

1. Máme následující lineární program: $\mathbf{x}$

   (a) **(1b) Rozhodněte, zda je úloha přípustná a zdůvodněte proč.**

   (b) **(6b) Vyřešte úlohu pomocí simplexové metody. Všechny kroky pečlivě zdůvodněte (inicializace, výběr báze a pivotů, ukončení algoritmu atd.)**

   (c) **(3b) Existuje ještě jiné optimální řešení? Pokud ano, spočtěte jej.**

   (a) $(0,0,0)$ **je přípustné řešení. (b) Stačí 2 kroky simplexové metody, opt. řešení je** $(2,0,1,0,3,0)$ **a opt. hodnota** 18**. (c) Pozorování: zařadíme do nové báze nebazickou proměnnou, která má v účelovém řádku** 0**. Tak přejdeme v dalším kroku k novému optimálnímu řešení** $(0,16,1,0,7,0)$**.**

2. **Vztah mezi časem t a měřenou veličinou y je popsán přibližně jako $y \approx \alpha e^{\beta t}$, kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ jsou neznámé parametry. Naměříme data $(t_1, y_1), \dots, (t_n, y_n)$. Hledáme odhad nezmámých parametrů pomocí nelineární metody nejmenších čtverců.**

   (a) **(2b) Formulujte tuto úlohu jako optimalizační problém a její účelovou funkci vyjádřete ve tvaru součtu čtverců.**

   (b) **(4b) Napište podmínky prvního řádu a upravte je tak, aby obsahovaly jednu rovnici o jedné neznámé.**

   (c) **(4b) Původní problém minimalizace čtverců se dá řešit pomocí Gauss-Newtonovy metody, kde krok iterace k se rovná $\mathbf{A}_k^{-1}\mathbf{b}_k$ pro nějakou matici $\mathbf{A}_k$ a vektor $\mathbf{b}_k$. Napište rozměr $\mathbf{A}_k$ a $\mathbf{b}_k$. Napište tvar matice $\mathbf{A}_k$ v co nejexplicitnějším tvaru.**

   (a) $\sum_{i=1}^n (\alpha e^{\beta t_i} - y_i)^2$

   (b) Pro podminky optimality je lepsi vynasobit ucelovou funkci clenem $\frac{1}{2}$. pak podminky prvniho radu jsou $\sum_{i=1}^n (\alpha e^{\beta t_i} - y_i) e^{\beta t_i} = 0$ a $\sum_{i=1}^n (\alpha e^{\beta t_i} - y_i) e^{\beta t_i} \alpha t_i = 0$. z prvni rovnice vyjadrime $\alpha = \frac{\sum y_i e^{\beta t_i}}{\sum e^{2\beta t_i}}$ a dosadime ji do druhe podminky.

   (c) Pro stejne znaceni jako na prednasce definujme funkci $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ se souradnicemi $\alpha e^{\beta t_i} - y_i$. potom g' je matice $\mathbb{R}^{n\times 2}$, kde jednotlive radky jsou $(e^{\beta t_i}, \alpha e^{\beta t_i} t_i)$. pak matice ma tvar

   $$A = -g'^{\top} g' = -\begin{pmatrix} \sum e^{2\beta t_i} & \alpha \sum t_i e^{2\beta t_i} \\ \alpha \sum t_i e^{2\beta t_i} & \alpha^2 \sum t_i^2 e^{2\beta t_i} \end{pmatrix}.$$

   Minus tam byt nemusi, protoze se muze schovat do b_k.

3. **Řešte následující úlohy:**

   (a) **(2b) Určete funkční hodnotu $f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{v})$, kde $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{A} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$, kde $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ je symetrická a $\mathbf{v}$ je vlastní vektor matice $\mathbf{A}$ délky 3.**

   (b) **(4b) Nalezněte singulární čísla matice $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.**

   (c) **(4b) Určete vzdálenost bodu $\mathbf{a} = (-2, 3, 1)$ od lineárního prostoru generovaného vektory $(-2, 1, 0)$ a $(1, 2, 3)$.**

   (a) Jednoduše:

   $$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}) = \mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}^T \mathbf{v} = 9\lambda$$

   kde λ je příslušné vlastní číslo.

   (b) Nutně $s_2 = 0$, protože ta matice má hodnost 1. Sing. číslo $s_1 = \sqrt{8}$ spočteme jako odmocninu nenulového vlastního čísla matice $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$.

   (c) Spočteme $\mathbf{z} = \frac{\mathbf{x}\times\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\times\mathbf{y}\|}$. Pak je doplňkový prostor $\operatorname{span} \mathbf{z}$ a platí $d = \|\mathbf{z}\mathbf{z}^T\mathbf{a}\| = |\mathbf{z}^T\mathbf{a}| = \frac{7}{\sqrt{70}}$

4. **Uvažujeme funkci $f(x, y) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 + xy$.**

(a) **(4b) Napište ji ve tvaru $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x}$ a určete definitnost této kvadratické formy.**

(b) **(2b) Nalezněte minimum funkce $f(\mathbf{x})$ za podmínky $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, $\|\mathbf{x}\| = 1$, a určete argument minima.**

(c) **(4b) Jaké bude řešení úlohy $\min\{f(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 1,\ x, y \in \mathbb{R}\}$?**

(a) Matice $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ má vl. čísla 1 a 2, tedy je PD. (b) Minimum je 1 a argument minima je normalizovaný vl. vektor $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$. (c) Řešení bude stejné jako v (b). Platí totiž toto: pro $\mathbf{x}$ splňující $\|\mathbf{x}\| > 1$ uvažujme $\mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$. Pak zřejmě $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{y})$.

5. Student se chce připravit na písemku z optimalizace a přemýšlí, jak pro to nejlépe alokovat svůj čas. Může se buď učit a v tom případě bude jeho porozumění látce odpovídat čtverci času, po který se učil. Nebo se může modlit a pak jeho štěstí při písemce bude odpovídat času strávenému modlením. Celkem má na tyto aktivity student vyhrazených c hodin a chce maximalizovat součin porozumění látce a štestí.

(a) **(3b) Formulujte úlohu jako optimalizační problém.**

(b) **(5b) Vyřešte ji. *Nápověda:* zamyslete se, než začnete dosazovat do vzorečků.**

(c) **(2b) Jaké by bylo řešení, kdyby se student rozhodl minimalizovat součin porozumění látce a štestí? Vysvětlete.**

a) Ukolem je maximalizovat funkci $u^2 m$ za podminek $u, m \geq 0$ a $u + m = c$.

b) Problem jde prepsat na maximalizaci $(c - m)^2 m$ za podminky $m \in [0, c]$ (pozor, horni hranice tam byt musi). Derivace podle m da $3m^2 - 4cm + c^2 = 0$, coz ma reseni c a $\frac{1}{3}c$. Pro kompletni vypocet se musi overit funkci hodnota v techto dvou bodech a v krajnim bode 0. Reseni vyjde v $m = \frac{1}{3}c$.

c) Z predchoziho plyne $m = 0$ a $m = c$. Jde udelat i trivialne bez vypoctu.

Bodů celkem: 50