Zkouška OPT 24.5.2021

Každý příklad piště na samostatnou stránku a ofoťte do samostatného souboru, jehož jméno (bez přípony) je číslo příkladu. Každý příklad musí mít nejen odpověď, ale i postup. Odpověď bez postupu se nepočítá.

1. Máme funkci $f(x,y) = x^2 - 6xy - 18x + y^2 + 22y + 49$.

   (a) **(4b)** Napište funkci ve tvaru $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \alpha$, kde $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ je symetrická a $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (b) **(2b)** Najděte spektrální rozklad matice $\mathbf{A}$.

   (c) **(2b)** Rozhodněte, zda má funkce f globální minimum/maximum a svou odpověď zdůvodněte.

   (d) **(2b)** Určete funkční hodnotu $f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{v})$, kde $\mathbf{v}$ je jednotkový vlastní vektor matice $\mathbf{A}$.

   $\mathbf{x}_0 = (3, -2), \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha = 0.$

   Vl. čísla $\lambda_1 = -2$ a $\lambda_2 = 4$, vl. vektory $\mathbf{v}_1 = -(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ a $\mathbf{v}_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, tedy správný tvar výsledku je

   $$\mathbf{A} = [\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} [\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2]^T.$$

   Minimum ani maximum neexistuje, protože matice $\mathbf{A}$ je indefinitní.

   Jednoduše:

   $$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}) = \mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}^T \mathbf{v} = \lambda$$

   kde λ je příslušné vlastní číslo.

2. Firma vyrábí 2 druhy hnojiva, jejichž prodejní ceny jsou 30 000 a 20 000 korun za tunu. Při výrobě tuny prvního hnojiva se spotřebuje jednotka množství každé ze tří surovin (A,B,C), zatímco pro výrobu tuny druhého hnojiva je potřeba jednotka suroviny A a 3 jednotky suroviny C. Na skladě je 8 jednotek suroviny A, 6 jednotek suroviny B a 18 jednotek suroviny C. Cílem je určit kolik vyrábět každého hnojiva, aby byla celková prodejní cena maximální.

   (a) **(2b)** Napište matematickou formulaci úlohy.

   (b) **(6b)** Posuďte, zda má optimální řešení. Pokud ano, spočtěte ho (grafické řešení musí mít dostačující popis, náčrtek nestačí).

   (c) **(2b)** Pozměňte prodejní ceny tak, aby zůstaly pozitivní, a aby měla úloha nekonečně mnoho řešení. Tyto řešení popište.

   Maximalizuj $3x_1 + 2x_2$ z.p. $x_1 + x_2 \leq 8$, $x_1 \leq 6$, $x_1 + 3x_2 \leq 18$, $x_i \geq 0$.

   Snadno nalezneme, že množina přípustných řešení je konvexní polygon s vrcholy $(0,0), (0,6), (3,5), (6,2), (6,0)$. Optimum je v bodě $(6,2)$ o hodnotě 22. Tady by měli být schopni získat ty vrcholy jako řešení soustav lin. rovnic.

   Stačí, aby účelová funkce byla tvaru $x_1 + x_2$. Potom jsou optimální řešení body na úsečce spojující $(3,5)$ a $(6,2)$.

3. Maximalizujeme lineární funkci $x_1 - 2x_2$ při omezeních $x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \geq 0$, $4x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 \leq 3$, $-x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1$, kde proměnné x_1, x_4 jsou neomezené a proměnné x_2, x_3 jsou nezáporné.

   (a) **(4b)** Napište tuto úlohu jako lineární program (P) a najděte k němu duální úlohu (D).

   (b) **(2b)** Pokud víte jen to, že úloha (P) je přípustná, lze z toho usoudit, že i úloha (D) je přípustná?

   (c) **(2b)** Optimální hodnota (P) je 2.5. Jaký je vztah mezi číslem 2.5 a hodnotou účelové funkce úlohy (D) pro její libovolné přípustné řešení? Může někdy nastat rovnost?

   (d) **(2b)** Optimální řešení úlohy (P) je $(2.5, 0, 0, 3.5)$. Existuje optimální řešení úlohy (D)? Musí mít optimální řešení úlohy (D) aspoň jednu složku nulovou?

Duál má proměnné $y_1 \leq 0$, $y_2 \geq 0$ a $y_3 \in \mathbb{R}$. Účelová funkce pro minimalizaci je $3y_2 + y_3$ a omezení jsou $y_1 + 4y_2 - y_3 = 1$, $2y_1 + 3y2 - y_3 \geq -2$, $-y_1 + 4y_2 + 2y_3 \geq 0$ a $y_1 - 2y_2 + y_3 = 0$.

Pokud víme jen, že (P) je přípustná, může být (P) neomezená a (D) může být nepřípustný.

Hodnota 2.5 omezuje zdola funkční hodnoty duální úlohy a rovnost nastane v optimech obou úloh.

Existuje optimální řešení úlohy (D). Komplementarita: z prvního omezení (P) máme v optimu $6 > 0$, proto je odpovídající duální proměnná nulová.

4. Řešte následující úlohy:

   (a) **(1b)** Je funkce $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definovaná jako $f(\mathbf{x}) = |x_1 + 2x_3| + |x_2 - x_3|$ norma?

   (b) **(1b)** Je funkce $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definovaná jako $f(\mathbf{x}) = |x_1 + x_2| + |x_1 + x_3| + |x_2 + x_3|$ norma?

   (c) **(2b)** Spočítali jsme redukovaný SVD matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3000\times 5000}$. Matici $\mathbf{A}$ aproximujeme maticí
   $$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^{100} s_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T,$$
   kde s_i jsou singulární čísla a $\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i$ singulární vektory. Jak jde spočítat $\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|$ bez toho, abychom počítali normu nebo stopu nějaké matice?

   (d) **(3b)** Vztah mezi veličinami x a y modelujeme lineární regresní funkcí
   $$y \approx f(x; p_1, p_2) = p_1 e^{-x} + p_2 e^{-3x},$$
   kde $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$ jsou neznámé parametry. Máme data $(x_1, y_1), \ldots, (x_{100}, y_{100})$. Přesně formulujte úlohu na hledání neznámých parametrů metodou nejmenších čtverců a napište tvar řešení v závislosti na datech.

   (e) **(3b)** Máme funkci $f(x_1, x_2) = \min\{x_1 - x_2, -2x_1 + x_2\}$ a hledáme její maximum na množině
   $$M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1, x_2 \geq 0, x_1 + 2x_2 \geq 3\}.$$
   Lze takovou úlohu formulovat jako lineární program? Pokud ano, napište ho.

a) Není. $f(-2, 1, 1) = 0$

b) Ano. Triviálně z vlastností abs. hodnoty nebo si všimneme, že $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_1$, kde $\mathbf{A}$ má plnou sloupcovou hodnost.

c) Chyba aproximace $\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\| = \sqrt{\sum_{i=101}^{3000} s_i^2}$ se okamžitě spočte z již vypočítaného SVD. Výpočet dle definice normy není uznáván.

d) $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_{100}), \mathbf{p} = (p_1, p_2), \mathbf{A} = \begin{bmatrix} e^{-x_i} & e^{-3x_i} \end{bmatrix}_i \in \mathbb{R}^{100\times 2}$. Úloha $\min \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{p}\|^2$ s proměnnými $\mathbf{p}$ a řešením (za předpokladu LN sloupců) $(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{y}$.

e) Ano. $\max y$ z.p. $\mathbf{x} \in M$ a $y \leq x_1 - x_2$, $y \leq -2x_1 + x_2$.

5. Uvažujme bod $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, symetrickou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a třikrát spojitě diferencovatelné zobrazení $\mathbf{h} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Definujme množinu $M = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0\}$.

   (a) **(4b)** Uvažujme minimalizaci funkce $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{a})^T \mathbf{A} (\mathbf{x} - \mathbf{a})$ na množině M. Napište podmínky optimality. Jaký je vztah mezi optimalizačním problémem a podmínkami optimality? Neformulujte obecně, ale za podmínek na $\mathbf{a}$, $\mathbf{A}$ a $\mathbf{h}$.

   (b) **(2b)** Jak se změní podmínky optimality, když $\mathbf{A}$ nebude symetrická?

   (c) **(2b)** Uvažujme $m = 1$ a $h(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 1$ a bod $\mathbf{a} = (2, 1)$. Pokud je $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ jednotková matice, který bod z množiny M minimalizuje funkci f? Vysvětlete.

   (d) **(2b)** Uvažujme $m = 1$ a $h(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 1$ a bod $\mathbf{a} = (2, 1)$. Najděte nějakou matici $\mathbf{A}$, pro kterou je $\mathbf{x} = (-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}})$ globální minimum funkce f na množině M. Vysvětlete.

a) Podmínky optimality jsou $2\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla h_i(\mathbf{x}) = 0$, případně maticově $2(\mathbf{x} - \mathbf{a})\mathbf{A} + \boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{h}'(\mathbf{x}) = 0$. Podmínka $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0$ musí být uvedena. Pro lineární oomezení platí ekvivalence. Pro nelineární omezení platí jedna implikace za podmínky regularity. Podmínky druhého řádu nejsou vyžadovány.

b) $2\mathbf{A}$ se změní na $\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top$.

c) Jedna se o projekci $\mathbf{a}$ na jednotkovou sferu. Reseni je znormalizovany vektor $\mathbf{a}$.

d) Minimum je pro $\mathbf{A} = -\mathbf{I}$. Buď grafické řešení nebo odvození z podmínek optimality a argumentace, že to je maximum a ne minimum.

Bodů celkem: 50