Příjmení a jméno: _____

Úloha	1	2	3	4	5	*Celkem*
Maximum	10	10	10	10	10	50
Počet bodů						

1. Jsou dány vektory $\mathbf{x} = (1, 1, 1, 1), \mathbf{y} = (1, 0, -1, 0)$ v $\mathbb{R}^4$ a nechť $X = \text{span}\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$.
   (a) (2 b) Najděte bázi ortogonálního doplňku prostoru X.
   (b) (2 b) Najděte ortonormální bázi ortogonálního doplňku prostoru X takovou, že jeden vektor této báze leží ve směru $(0, 1, 0, -1)$.
   (c) (3 b) Najděte matici ortogonání projekce na podprostor X.
   (d) (3 b) Najděte matici ortogonální projekce na podprostor $X^\perp$.

Řešení:

(a) Při označení $\mathbf{A} = [\mathbf{x}\ \mathbf{y}]$ řešíme soustavu $\mathbf{A}^T\mathbf{u} = \mathbf{0}$ a báze řešení je báze $X^\perp$. Například $(0, 1, 0, -1), (1, -2, 1, 0)$.

(b) Ortogonální báze $X^\perp$ je například $(0, 1, 0, -1), (1, -1, 1, -1)$. Je třeba ji ještě normalizovat, tj. první vektor vydělit $\sqrt{2}$ a druhý vydělit dvěma.

(c) Při označení $\mathbf{U} = [\mathbf{x}/2\ \ \mathbf{y}/\sqrt{2}]$ je matice projekce na X rovna $\mathbf{U}\mathbf{U}^T = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(d) Analogicky projektor na $X^\perp$ má matici $\mathbf{V}\mathbf{V}^T$, kde matice $\mathbf{V}$ má ve sloupcích bázi z úlohy (b). Vyjde $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

2. V následující soustavě

$$\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{a} + \mathbf{C}\mathbf{z}$$
$$\mathbf{D}\mathbf{y} + \mathbf{z} = \mathbf{1}$$

jsou $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ a $\mathbf{D}$ matice, $\mathbf{a}$ je vektor konstant, $\mathbf{1}$ je vektor obsahující jedničky a $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ jsou vektory neznámých.
   (a) (3 b) Určete nejobecnější rozměry matic a vektorů tak, aby všechny operace a rovnosti v soustavě měly smysl.
   (b) (5 b) Vyjádřete uvedenou soustavu ve tvaru $\mathbf{P}\mathbf{u} = \mathbf{q}$ pro nějakou matici $\mathbf{P}$, vektor konstant $\mathbf{q}$ a vektor proměnných $\mathbf{u}$. Jaké rozměry má matice $\mathbf{P}$ a vektory $\mathbf{q}$, $\mathbf{u}$?
   (c) (2 b) Může se stát, aby soustava měla jediné řešení?

Řešení:

(a),(b) Soustavu lze napsat ve tvaru

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & -\mathbf{C} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n\times q}$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^q$, $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^q$, $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{q\times p}$.

(c) Soustava může mít jediné řešení: když $m + p = n$, je matice $\mathbf{P}$ čtvercová a může být regulární.

3. Rozhodněte, zda je zadaný optimalizační problém konvexní a odpověď zdůvodněte.
   (a) (2 b) Minimalizuj $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ za podmínek $\|\mathbf{x}\|^2 = 1$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je symetrická.
   (b) (2 b) Minimalizuj $x + y$ za podmínek $y \leq x^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
   (c) (2 b) Minimalizuj $3x - y + z$ za podmínek $x + y - z \leq 2$, $y - z \geq -1$, $x, y, z \geq 0$.
   (d) (2 b) Minimalizuj $\|\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{b}\|$ za podmínky $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, kde $\|.\|$ je norma, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.
   (e) (2 b) Maximalizuj $x^2 + y^2$ za podmínek $x + y \leq 1$, $x, y \geq 0$.

Řešení:

(a) Není, protože jednotková sféra není konvexní množina. Alternativně: účelová funkce nemusí být konvexní, pokud $\mathbf{A}$ není pozitivně semidefinitní.

(b) Není, protože podmínka $y \leq x^2$ definuje nekonvexní množinu v rovině (body pod parabolou).

(c) Je, protože jde o úlohu lineárního programování.

(d) Je, protože norma je konvexní funkce a složená funkce $\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$ je také konvexní.

(e) Není, hledáme maximum (a nikoli minimum) konvexní funkce na konvexní množině.

4. Firma maximalizuje zisk z prodeje vyráběného hnojiva a pracího prášku. Zisk z tuny prodaného hnojiva je 2 a z tuny prodaného pracího prášku je 5. Přitom není možno vyrábět více než 5 tun hnojiva, více než 4 tuny pracího prášku a další omezení dané společnou výrobní linkou je 3·(množství hnojiva [t])+množství pracího prášku [t] ≤ 16.
   (a) (2 b) Formulujte výše uvedený problém jako úlohu lineárního programování.
   (b) (4 b) Vyřešte úlohu z bodu (a).
   (c) (3 b) Napište duální program a jeho optimální hodnotu.
   (d) (1 b) Jsou všechny hodnoty duálních proměnných v optimu nenulové?

Řešení:

(a) Maximalizujeme $2x+5y$ za omezení $x \leq 5$, $y \leq 4$, $3x+y \leq 16$ a podmínek nezápornosti $x, y \geq 0$.

(b) Množina přípustných řešení tvoří omezený konvexní polyedr s vrcholy $(0,0)$, $(0,4)$, $(4,4)$, $(5,1)$, $(5,1)$. To lze snadno nahlédnout graficky nebo řešením příslušných soustav lineárních rovnic. Maximální hodnoty 28 se nabývá ve vrcholu $(4,4)$.

(c) Duální lineární program: minimalizuj $5t+4u+16v$ za podmínek $t+3v \geq 2$, $u+v \geq 5$ a podmínek nezápornosti $t, u, v \geq 0$. Podle věty o silné dualitě musí být hodnota v optimu stejná jako v primárním programu, tedy 28.

(d) Nemohou. V optimu $(4,4)$ není omezení $x \leq 5$ aktivní a proto musí být podle podmínky komplementarity odpovídající duální proměnná $t = 0$.

5. Minimalizujeme funkci $f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} - y_i)^2$, kde $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$ a $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ jsou zadána. Dále předpokládejme, že lineární obal vektorů $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ je celý prostor $\mathbb{R}^m$.
   (a) (2 b) Napište problém maticově. Co jsme schopni říct o hodnosti vzniklé matice?
   (b) (2 b) Napište iteraci gradientní metody pro řešení výše uvedeného problému.
   (c) (3 b) Napište iteraci Newtonovy metody pro řešení výše uvedeného problému.
   (d) (3 b) Pro které počáteční body Newtonova metoda selže v první iteraci, a pro které počáteční body v jedné iteraci zkonverguje do optima?

Řešení:

(a) Maticový zápis je minimalizace $\|\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2$, kde řádky $\mathbf{A}$ jsou $\mathbf{a}_i$. Předpoklad na lineární obal říká, že matice $\mathbf{A}$ má lineárně nezávislé sloupce, a tedy její hodnost je m. Současně je $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ je invertovatelná.

(b) První derivace je

$$2(\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{y})^T\mathbf{A} = 2\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{a}_i^T\mathbf{x}-y_i)\mathbf{a}_i^T$$

a druhá derivace je matice

$$2\mathbf{A}^T\mathbf{A} = 2\sum_{i=1}^{n}\mathbf{a}_i\mathbf{a}_i^T$$

Gradientní metoda má tvar $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - 2\alpha\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{x}^k - \mathbf{y})$.

(c) Newtonova metoda má krok

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - (2\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}2\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{x}^k - \mathbf{y}) = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{y}.$$

Vzhledem k tomu, že toto je optimální hodnota nejmenších čtverců, tak Newtonova metoda vždy konverguje do optimálního řešení v první iteraci.