Příjmení a jméno: ______________________

Úloha	1	2	3	4	5	6	*Celkem*
Maximum	5	5	5	5	5	5	30
Počet bodů							

1. Máme dáno zobrazení $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (x_1 - 2x_2, x_1 + x_3, x_1 - 3x_2 + 2x_3)$, kde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.
   (a) (2 b) Vyjádřete $\mathbf{f}$ ve tvaru $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$.
   (b) (2 b) Určete dimenzi nulového prostoru matice $\mathbf{A}$.
   (c) (1 b) Je $\mathbf{f}$ lineární zobrazení?

Řešení:

Je to lineární zobrazení, kde $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ a $\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Soustava $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ má jen triviální řešení, tudíž $\dim \operatorname{null} \mathbf{A} = 0$.

2. Máme 500 pozorování tvaru $(x_1, y_1), \ldots, (x_{500}, y_{500}) \in \mathbb{R}^2$, kde $x_1 > x_2 > \cdots > x_{500}$. Hledáme optimální regresní funkci $y = \theta_1 e^x + \theta_2$, kde $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ jsou hledané parametry.
   (a) (2 b) Formulujte v maticovém tvaru úlohu nejmenších čtverců pro odhad θ_1 a θ_2.
   (b) (1 b) Kolik existuje řešení této úlohy a proč?
   (c) (1 b) Napište (pokud možno co nejjednodušší) tvar řešení této úlohy v maticovém tvaru.
   (d) (1 b) Napište účelovou funkci z této úlohy nejmenších čtverců ve tvaru součtu čtverců.

Řešení:

Lineární regrese, matice $\mathbf{A}$ typu 500×2 vyjádřená řádky $(e^{x_i}, 1)$ a vektor $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_{500})$. Hledáme $\theta \in \mathbb{R}^2$ minimalizující $\|\mathbf{A}\theta - \mathbf{y}\|^2$. To je to samé, jako řešit soustavu normálních rovnic $\mathbf{A}^T\mathbf{A}\theta = \mathbf{A}^T\mathbf{y}$, což je soustava 2 lineárních rovnic o 2 neznámých. Matice soustavy $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ je regulární, protože má $\mathbf{A}$ lineárně nezávislé sloupce. Tedy existuje jediné řešení, $(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{y}$. Dále platí

$$\|\mathbf{A}\theta - \mathbf{y}\|^2 = \sum_{i=1}^{500} (\theta_1 e^{x_i} + \theta_2 - y_i)^2.$$

3. Reálná matice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{5} \\ 2 & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$ typu 2×3 má singulární čísla $s_1 = \sqrt{6}$ a $s_2 = 1$. Těm odpovídají pravé singulární vektory $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{30}}(5, -2, 1)$ a $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, 1, 2)$.

(a) (2 b) Spočtěte levé singulární vektory $\mathbf{u}_1$ a $\mathbf{u}_2$.

(b) (2 b) Napište redukované SVD matice $\mathbf{A}$.

(c) (1 b) Pomocí hodnot s_1 a s_2 odvoďte, jaká je hodnost matice $\mathbf{A}$.

Řešení:

Využijeme vztah $\mathbf{u}_i = \frac{\mathbf{A}\mathbf{v}_i}{s_i}$ a dostaneme matici

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2] = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Redukované SVD je tak $\mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T$, kde $\mathbf{S} = diag(s_1, s_2)$ a $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2]$. Hodnost $\mathbf{A}$ je rovna počtu všech nenulových singulárních čísel, tedy 2.

4. Hledáme nejmenší (ve smyslu Eukleidovské normy) vektor v $\mathbb{R}^3$, který je řešením soustavy rovnic $-2x_1 + x_2 = 1$, $x_1 + x_3 = 4$.

(a) (2 b) Zformulujte tento problém jako optimalizační úlohu v maticové podobě.

(b) (2 b) Nalezněte vektory, které jsou přípustným řešením této úlohy.

(c) (1 b) Napište, v jakém tvaru toto řešení hledáme (nemusíte roznásobit maticové výrazy).

Řešení:

Minimalizujeme $\|\mathbf{x}\|^2$ z.p. $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ a $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kde $\mathbf{A}$ má řádky $(-2, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$ a $\mathbf{b} = (1, 4)$. Přípustná řešení jsou právě řešení soustavy rovnic $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Vypadají takto:

$$\mathbf{x} = (4, 9, 0) + t(-1, -2, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Jediné řešení je tvaru

$$\mathbf{A}^+\mathbf{b} = \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{b}.$$

5. Nechť A je množina všech iracionálních čísel.

(a) (1 b) Určete vnitřek množiny $A \times A \times A$.

(b) (1 b) Určete hranici množiny $A \times A \times A$.

(c) (1 b) Určete minimum funkce $f(x) = x^2$ na množině A.

(d) (2 b) Uvažujte množinu $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$. Napište ekvivalentní podmínku, za které má tato množina neprázdný vnitřek.

Řešení:

Vnitřek je prázdná množina a hranice je $\mathbb{R}^3$. Minimum by bylo v nule, ale protože ta do A nepatří, tak minimum neexistuje. Množina $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ popisuje afinní podprostor. Ten má vždy prázdný vnitřek s vyjímkou, kdy se jedná o celý prostor. Tedy musí být $\mathbf{B} = 0$ a $\mathbf{b} = 0$.

6. Uvažujte funkci $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definovanou jako $f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$.
   (a) (1 b) Zderivujte funkci f.
   (b) (2 b) Je v bodě $(1, 1, -1)$ lokální maximum, lokální minimum nebo ani jedno? Zdůvodněte.
   (c) (2 b) Napište Taylorův polynom druhého řádu kolem bodu $(1, 1, -1)$.

Řešení:

Označme matici za zadání jako $\mathbf{A}$ a její první sloupec jako $\mathbf{b}$. Potom $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x}$. Derivace je tedy $f'(x) = \mathbf{x}^T (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) + \mathbf{b}^T$. V zadaném bodě není ani lokální maximum ani lokální minimum, protože derivace není nula. Taylorův polynom druhého řádu se rovná f, protože f je kvadratická.