

Příjmení a jméno: _____

Úloha	1	2	3	4	5	Celkem
Maximum	10	10	10	10	10	50
Počet bodů						

1. Uvažujme množinu $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 = y^2 + z^2\}$.
- (1 b) Načrtněte množinu M .
 - (2 b) Hledáme vzdálenost bodu $(1, 3, 4)$ od M . Formulujte tuto úlohu jako optimalizační problém a rozhodněte, zda je to konvexní úloha.
 - (7 b) Vyřešte úlohu (b) pomocí Lagrangeových multiplikátorů a napište hledanou vzdálenost bodu od množiny.

Řešení:

- Jedná se o sjednocení dvou kuželů zrotovaný kolem osy x .
- Minimalizujeme $\|\mathbf{x} - (1, 3, 4)\|_2$ za podmínky $\mathbf{x} \in M$. Jelikož M není konvexní množina, nejde o konvexní úlohu.
- Pro nalezení vzdálenosti potřebujeme najít nejbližší bod, tedy minimalizujeme $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 4)^2$. Lagrangeián má tvar

$$L(x; \lambda) = (x - 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 4)^2 + \lambda(y^2 + z^2 - x^2).$$

Derivacemi dostaneme podmínky $2(x - 1) = 2\lambda x$, $2(y - 3) = -2\lambda y$ a $2(z - 4) = -2\lambda z$. Z tohoto plyne $\lambda \neq \pm 1$ a $x = \frac{1}{1 - \lambda}$, $y = \frac{3}{1 + \lambda}$ a $z = \frac{4}{1 + \lambda}$. Dosazením do rovnici kužele dostaneme

$$\frac{1}{(1 - \lambda)^2} = \frac{9}{(1 + \lambda)^2} + \frac{16}{(1 + \lambda)^2},$$

což má řešení $\lambda_1 = \frac{2}{3}$ a $\lambda_2 = \frac{3}{2}$. To odpovídá bodům $(3, \frac{9}{5}, \frac{12}{5})$ a $(-2, \frac{6}{5}, \frac{8}{5})$. První bod má vzdálenost $\sqrt{8}$, druhý $\sqrt{18}$. Řešení je tedy první bod.

2. Rozhodněte, zda je zadaná množina K konvexní a odpověď zdůvodněte.
- (2 b) K je množina všech bodů $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ splňujících $\|\mathbf{x}\|_2 \geq \alpha$, kde $\alpha > 0$.
 - (2 b) $K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq 1, x_2 \leq x_1^2, x_2 \leq 2x_1 - 1\}$.
 - (2 b) $K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 - 1 + e^{x_2} \leq 2\}$.
 - (2 b) K je množina všech nezáporných řešení $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

(e) (2 b) K je množina všech $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ splňujících $x^2 + 2xy = -y^2$.

Řešení:

(a) Není konvexní, protože je to množina vektorů délky větší než α . Např. pro $n = 2$ je to doplněk kruhu.

(b) Je to konvexní polyedr, protože podmínka $x_2 \leq x_1^2$ definující nekonvexní množinu je redundatní.

(c) K je subkontura součtu konvexních funkcí, je tedy konvexní množina.

(d) K je konvexní, neboť jde o průnik afinního podrostoru a konvexního polyedru.

(e) K je konvexní, protože $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2 = 0$ právě tehdy, když platí $y = -x$, což zadává přímku.

3. Máme funkci $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_1x_2 + 11x_2 + 11$.

(a) (1 b) Vyjádřete f ve tvaru $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c$, kde \mathbf{A} je symetrická matice, \mathbf{b} je vektor a $c \in \mathbb{R}$.

(b) (6 b) Nalezněte globální extrém funkce f na množině \mathbb{R}^2 , pokud existuje, a stanovte, zda jde o globální maximum nebo globální minimum.

(c) (3 b) Nalezněte Taylorův polynom 1. řádu funkce f v bodě $(0, 1)$ a vyjádřete ho ve tvaru $\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma$ pro nějaká $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Řešení:

(a) Zřejmě $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = (0, 11)$, $c = 11$.

(b) $f'(\mathbf{x}) = (2x_1 + x_2, x_1 + 6x_2 + 11)$ a Hessián je $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ je pozitivně definitní. Proto je v bodě $(1, -2)$ globální minimum. Globální maximum neexistuje, protože f není shora omezená – např. hodnoty f rostou do ∞ na polopřímce $x_1 = 0, x_2 \geq 0$.

Alternativně: doplněním na čtverec dostaneme

$$f(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - (1, -2))^T \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} (\mathbf{x} - (1, -2)) = (\mathbf{x} - (1, -2))^T \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 3 \end{bmatrix} (\mathbf{x} - (1, -2)).$$

Jelikož je matice $\begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 3 \end{bmatrix}$ pozitivně definitní, funkce f má globální minimum v bodě $(1, -2)$.

(c) Taylorův polynom prvního řádu funkce f v bodě $(0, 1)$ je

$$T_1(\mathbf{x}) = f(0, 1) + f'(0, 1)(\mathbf{x} - (0, 1)).$$

Protože $f(0, 1) = 25$ a $f'(0, 1) = (1, 17)$, dostaneme

$$T_1(\mathbf{x}) = x_1 + 17x_2 + 8.$$

4. Máme data $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ a snažíme se zjistit jejich závislost pomocí $y \approx f(x; \mathbf{w})$, kde $f(x; \mathbf{w}) = xe^{w_1} + x^2w_2$. Ve výsledcích nesmí být obecné derivace (například g'), ale musí být spočteny. Případné inverze matic se počítat nemusí.
- (a) (2 b) Formulujte hledání neznámých parametrů jako úlohu nelineárních nejmenších čtverců.
- (b) (5 b) Napište iterace gradientní a Newtonovy metody.
- (c) (1 b) Napište, za jaké podmínky selže Newtonova metoda v první iteraci.
- (d) (2 b) Napište konkrétní data (tedy specifikujte n a poté $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$) a počáteční iteraci, pro které Newtonova metoda selže v první iteraci.

Řešení:

(a) Jedná se o minimalizaci $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i e^{w_1} + x_i^2 w_2 - y_i)^2$.

(b) Pro tyto metody potřebujeme spočítat derivaci a Hessián. Derivace má tvar

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n (x_i e^{w_1} + x_i^2 w_2 - y_i) x_i e^{w_1} \\ \sum_{i=1}^n (x_i e^{w_1} + x_i^2 w_2 - y_i) x_i^2 \end{bmatrix}$$

a Hessián se rovná

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n (2x_i e^{w_1} + x_i^2 w_2 - y_i) x_i e^{w_1} & e^{w_1} \sum_{i=1}^n x_i^3 \\ e^{w_1} \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n x_i^4 \end{bmatrix}.$$

Při updatech je nutno myslet na to, že se dělají pro \mathbf{w} a ne pro x .

(c) Newtonova metoda selže, pokud je Hessián singulární.

(d) Což nastane například pro $n = 1$ a $x_1 = 0$.

5. Máme data $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{500} \in \mathbb{R}^3$. Hledáme rovinu procházející počátkem, která minimalizuje součet čtverců vzdáleností k těm bodům. Uvažujeme matici $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{500}] \in \mathbb{R}^{3 \times 500}$ a víme, že matice $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ má vlastní čísla $\sqrt{6}, 1, 3$ a jim odpovídající jednotkové vlastní vektory $\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)$, $\frac{1}{\sqrt{6}}(2, 1, -1)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)$.

- (a) (3 b) Formulujte tuto úlohu jako optimalizační problém.
- (b) (6 b) Nalezněte hledanou rovinu a popište ji pomocí báze.
- (c) (1 b) Jaká bude optimální hodnota úlohy (chyba proložení)?

Řešení:

(a) Prokládáme body lineárním podprostorem kodimenze 1. Tedy úlohu můžeme vyjádřit jako minimalizaci $\sum_{i=1}^{500} |\mathbf{x}^T \mathbf{a}_i|^2 = \|\mathbf{x}^T \mathbf{A}\|^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{A}^T \mathbf{x}$, kde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ splňuje $\|\mathbf{x}\| = 1$. Zde \mathbf{x} vyjadřuje směr přímky, která je ortogonálním doplňkem hledané roviny.

(b) Spektrální rozklad $\mathbf{A} \mathbf{A}^T = \mathbf{V} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^T$, kde $\lambda_1 = 1 \leq \lambda_2 = \sqrt{6} \leq \lambda_3 = 3$ a odpovídající sloupce \mathbf{V} jsou podle toho seřazeny. Řešením \mathbf{x} je vlastní vektor $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, 1, -1)$ odpovídající nejmenšímu vlastnímu číslu. Hledaná rovina je popsána ortonormální bází $(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = (\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1), \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1))$.

(c) Chyba je optimální hodnota $\mathbf{v}_1^T \mathbf{A} \mathbf{A}^T \mathbf{v}_1 = \lambda_1 = 1$.