Optimalizace **Semestrální test** 29. 4. 2022

Příjmení a jméno: ____________________

Úloha	1	2	3	4	5	6	*Celkem*
Maximum	5	5	5	5	5	5	30
Počet bodů							

Všechny odpovědi musí být zdůvodněné. Napsání odpovědi bez vysvětlení nebude uznáno. Doporučujeme psát k řešení krátké slovní komentáře a ne pouze číselné mezivýsledky.

1. Uvažujme $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ a $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Zobrazení f je definováno jako $f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$.
   (a) (1 b) Je f afinní nebo lineární zobrazení?
   (b) (2 b) Pokud lze, vyjádřete f ve tvaru $f(\mathbf{x}) = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{d}$.
   (c) (2 b) Pokud lze, vyjádřete f ve tvaru $f(\mathbf{x}) = (g(\mathbf{x}), h(\mathbf{x}))$.

Řešení:

Je to afinní zobrazení $f(\mathbf{x}) = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{d}$, kde $\mathbf{C} = \mathbf{A}$ a $\mathbf{d} = (3, 3)$.

Platí $f(\mathbf{x}) = (-x_1 + 2x_2 + 3, 3x_2 + 3)$.

2. (5 b) Nalezněte ortogonální projekci vektoru $\mathbf{a} = (1, 1, 1)$ na rovinu $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$.

Řešení:

Ta rovina je lineární prostor dimenze 2 určený např. bází $\mathbf{x} = (3, 0, -1)$ a $\mathbf{y} = (2, -1, 0)$. Pomocí Gram-Schmidtovy ortogonalizace nalezneme ortonormální bázi tvořenou vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$. Platí

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{1}{\sqrt{10}}(3, 0, -1), \quad \mathbf{v}' = \mathbf{y} - (\mathbf{y}^T\mathbf{u})\mathbf{u} = (\tfrac{1}{5}, -1, \tfrac{3}{5}), \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}'}{\|\mathbf{v}'\|} = \sqrt{\tfrac{5}{7}}(\tfrac{1}{5}, -1, \tfrac{3}{5}).$$

Hledaná projekce je potom

$$(\mathbf{a}^T\mathbf{u})\mathbf{u} + (\mathbf{a}^T\mathbf{v})\mathbf{v} = (\tfrac{4}{7}, \tfrac{1}{7}, -\tfrac{2}{7}).$$

3. Máme 1000 pozorování tvaru (i, y_i), kde $i = 1, \dots, 1000$ a $y_i \in \mathbb{R}$. Hledáme optimální regresní funkci $y = \theta_1 \ln i + \theta_2$, kde $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ jsou hledané parametry.
   (a) (1 b) Rozhodněte, zda jde o lineární regresní model a zdůvodněte odpověď.
   (b) (2 b) Formulujte v maticovém tvaru úlohu nejmenších čtverců pro odhad θ_1 a θ_2.
   (c) (1 b) Kolik existuje řešení této úlohy a proč?
   (d) (1 b) Napište (pokud možno co nejjedodušší) tvar řešení této úlohy v maticovém tvaru.

Řešení:

Lineární regrese, matice $\mathbf{A}$ typu 1000×2 vyjádřená řádky $(\ln i, 1)$ a vektor $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_{1000})$. Hledáme $\theta \in \mathbb{R}^2$ minimalizující $\|\mathbf{A}\theta - \mathbf{y}\|^2$. To je to samé, jako řešit soustavu normálních rovnic $\mathbf{A}^T\mathbf{A}\theta = \mathbf{A}^T\mathbf{y}$, což je soustava 2 lineárních rovnic o 2 neznámých. Matice soustavy $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ je regulární, protože má $\mathbf{A}$ lineárně nezávislé sloupce. Tedy existuje jediné řešení, $(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{y}$.

4. Pro reálnou matici $\mathbf{A}$ platí $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$.
   - (a) (1 b) O jaký rozklad matice $\mathbf{A}$ jde?
   - (b) (1 b) Je matice $\mathbf{A}$ symetrická?
   - (c) (1 b) Co jsou čísla na diagonále diagonální matice uprostřed?
   - (d) (2 b) Spočtěte $\mathbf{Ax}$, kde $\mathbf{x} = (-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

Řešení:

Spektrální rozklad a proto je $\mathbf{A}$ symetrická. Na diagonále vlastní čísla. Protože $\mathbf{x}$ je vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu 9, platí $\mathbf{Ax} = 9\mathbf{x} = (-6, -3, 6)$.

5. Uvažujme funkci $f(\mathbf{x}) = \sqrt{(\sin x_1)^2 + \cdots + (\sin x_n)^2}$.
   - (a) (1 b) Zderivujte f.
   - (b) (1 b) Napište, ve kterých bodech je f diferencovatelná a zdůvodněte.
   - (c) (1 b) Ve kterých bodech má f minimum?
   - (d) (2 b) Ve kterých bodech má minimum Taylorův polynom 1. řádu T_1 v okolí $(\frac{\pi}{4}, \dots, \frac{\pi}{4})$?

Řešení:

Parciální derivace mají tvar $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{1}{2f(\mathbf{x})} 2 \sin x_i \cos x_i$ a derivace $f'(\mathbf{x})$ je řádkový vektor složený z těchto prvků. Díky zlomku tato derivace existuje všude kromě $\mathbf{x}$ se složkami $x_i = k_i\pi$ pro $k_i \in \mathbb{Z}$. Minimum je přesně v těchto bodech. Taylorův polynom je lineární s nenulovou směrnicí, a tedy minimum neexistuje (infimum je $-\infty$).

6. Vyřešte následující úkoly:
   - (a) (2 b) Newtonovou metodou řešíme soustavu rovnic $g(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Může tato metoda v nějaké iteraci k vygenerovat bod $\mathbf{x}^k$, který splňuje $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k$, přičemž $g(\mathbf{x}^k) \neq \mathbf{0}$? Proč?
   - (b) (2 b) Uvažujme rovnici $g(x) = 0$, kde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pro jaké g osciluje Newtonova metoda mezi dvěma body, tedy $x^0 = x^2 = \dots$ a $x^1 = x^3 = \dots$ a $x^0 \neq x^1$? Načrtněte ideu.
   - (c) (1 b) Napište funkční předpis pro g z předchozí části.

Řešení:

Pevný bod Newtonovy metody znamená $g(\mathbf{x}^k)^{-1}g(\mathbf{x}^k) = \mathbf{0}$. Vzhledem k tomu, že inverze existuje, matice je regulární, a tedy $g(\mathbf{x}^k) = \mathbf{0}$. Tedy pevný bod Newtonovy metody nemůže být mimo řešení.

Pro druhou část volíme například $g(x) = ax^2 + b$ a body $x^0 = 1$ a $x^1 = -1$. Aby mezi těmito body Newtonova metoda oscilovala, musí být

$$2 = \frac{g(x^0)}{g'(x^0)} = \frac{a+b}{2a},$$

což splňuje například funkce $g(x) = x^2 + 3$.