Optimalizace

Typy extrémů a volné lokální extrémy

Tomáš Kroupa, Lukáš Adam

FEL ČVUT

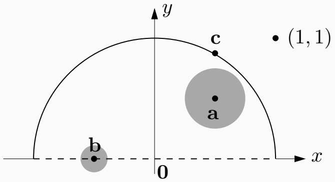
Vnitřek a hranice množiny

Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Bod $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ je její

- vnitřní bod, pokud existuje $\epsilon > 0$ takové, že $B_\epsilon(\mathbf{x}) \subseteq X$,
- hraniční bod, pokud pro každé $\epsilon > 0$ je $B_\epsilon(\mathbf{x}) \cap X \neq \emptyset$ a $B_\epsilon(\mathbf{x}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus X) \neq \emptyset$.

Které body jsou vnitřní a které hraniční?

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ y > 0\} \ \cup \ \{(1, 1)\}$$



Otevřené a uzavřené množiny

Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Potom X je

- otevřená množina, pokud každý bod X je vnitřní bod X.
- uzavřená množina, pokud každý hradiční bod X leží v X.

Které množiny jsou otevřené a které uzavřené?

$$X = [0,1], \qquad X = (0,1), \qquad X = [0,1).$$

Uzavřené množiny se zachovávají jako vzory spojitých funkcí:

- Nechť f je spojitá funkce a nechť B je uzavřená množina. Potom následující množina je uzavřená

$$\{\mathbf{x} \mid f(\mathbf{x}) \in B\}.$$

- Například $\{\mathbf{x} \mid f(\mathbf{x}) \leq 0\}$ nebo $\{\mathbf{x} \mid f(\mathbf{x}) = 0\}$.

Extrémy funkce na množině

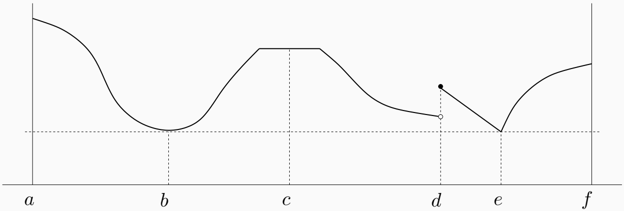
Funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nabývá na množině $X \subseteq \mathbb{R}^n$ v bodě $\mathbf{x} \in X$

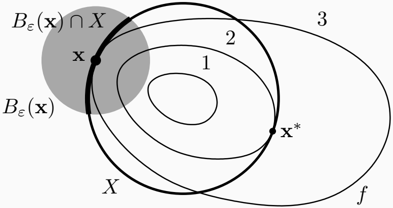
- minima, pokud $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}')$ pro všechna $\mathbf{x}' \in X$,
- lokálního minima, pokud existuje $\epsilon > 0$ tak, že $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}')$ pro všechna $\mathbf{x}' \in X \cap B_\epsilon(\mathbf{x})$.

(Lokální) minimum v bodě $\mathbf{x}$ je

- volné, pokud $\mathbf{x}$ je vnitřním bodem množiny X,
- vázané, pokud $\mathbf{x}$ je hraničním bodem množiny X.

Extrémy funkce na množině – příklady





Podmínka prvního řádu

Věta

Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in X$ je vnitřní bod množiny X a $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná v $\mathbf{x}$. Je-li $\mathbf{x}$ lokální extrém funkce f na X, platí

$$f'(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

Stacionární bod $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ splňuje $f'(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

Podmínky druhého řádu

Věta

Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in X$ je vnitřní bod množiny X a $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je dvakrát diferencovatelná v $\mathbf{x}$. Je-li $\mathbf{x}$ stacionární bod, platí:

- Pokud je $\mathbf{x}$ lokální minimum, pak je Hessova matice $f''(\mathbf{x})$ pozitivně semidefinitní.
- Pokud je $f''(\mathbf{x})$ pozitivně definitní, pak je $\mathbf{x}$ ostré lokální minimum.
- Pokud je $f''(\mathbf{x})$ indefinitní, pak $\mathbf{x}$ není lokální extrém.

Sedlový bod $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je stacionární bod takový, že $f''(\mathbf{x})$ je indefinitní.

Reference

T. Werner. *Optimalizace* (kapitoly 8 a 9). Elektronická skripta. FEL ČVUT, 2020.