

Optimalizace

Reálné funkce a zobrazení, lokální extrémý

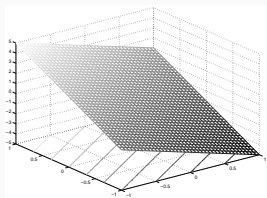
Tomáš Kroupa

FEL ČVUT

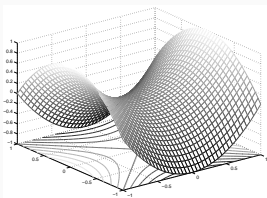
Funkce $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

- **Graf** funkce f je množina $\{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$.
- **Vrstevnice** funkce f výšky y je množina $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\mathbf{x}) = y\}$.

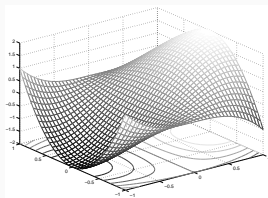
Příklady funkcí $f(x_1, x_2)$



$$-2x_1 + 3x_2$$



$$x_1^2 - x_2^2$$



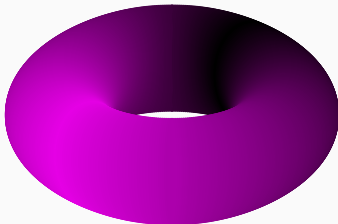
$$3x_1 - x_1^3 - 3x_1x_2^2$$

Zobrazení $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Příklady

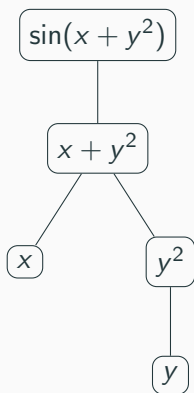
- Afinity zobrazení $f(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}$, kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$
- Vektorové pole $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$
- Parametrizace toru

$$f(u, v) = ((R + r \cos v) \cos u, (R + r \cos v) \sin u, r \sin v)$$



Spojitosť zobrazení $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ v bodě $x \in \mathbb{R}^n$

- Definice pomocí limity
- Spojitosť se zachovává **skládáním funkcí**, což vede na prakticky použitelnou postačující podmínku

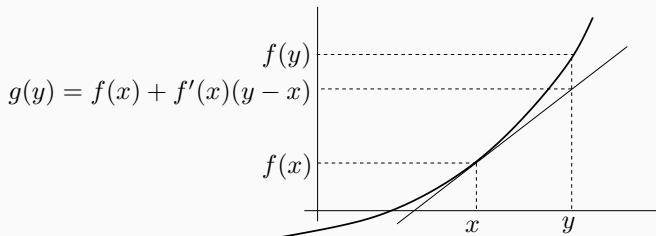


Derivace funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Funkce f je **diferencovatelná** v bodě x , pokud existuje $a \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x) - a(y - x)}{y - x} = 0.$$

Číslo $a \in \mathbb{R}$ je **derivace** funkce f a píšeme $f'(x) := a$.



Derivace zobrazení $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Definice

Zobrazení f je **diferencovatelné** v bodě \mathbf{x} , pokud existuje matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ taková, že

$$\lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}(\mathbf{y} - \mathbf{x})}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|} = \mathbf{0}.$$

V okolí bodu \mathbf{x} aproximujeme zobrazení f afinním zobrazením

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}) := \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}(\mathbf{y} - \mathbf{x}).$$

Matice \mathbf{A} se nazývá **derivace** a píšeme $\mathbf{f}'(\mathbf{x}) := \mathbf{A}$.

Existence derivace zobrazení $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Existuje-li derivace zobrazení $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$ v bodě $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, platí

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Speciální případy $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a $\mathbf{g}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$f'(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right] \quad \text{a} \quad \mathbf{g}'(x) = \left[g_1'(x) \quad \cdots \quad g_m'(x) \right]^T$$

Věta

Existují-li v bodě \mathbf{x} všechny parciální derivace $\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}$ a funkce $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ jsou v bodě \mathbf{x} spojité, potom má \mathbf{f} derivaci.

Věta o derivaci složeného zobrazení

Pro diferencovatelná zobrazení

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\mathbf{f}} & \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\mathbf{g}} & \mathbb{R}^l \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \mathbf{h} := \mathbf{g} \circ \mathbf{f} & & \end{array}$$

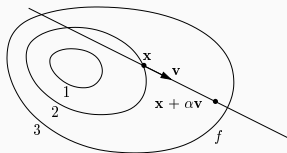
platí

$$\mathbf{h}'(\mathbf{x}) = \mathbf{g}'(\mathbf{f}(\mathbf{x}))\mathbf{f}'(\mathbf{x}).$$

Směrová derivace

Směrová derivace zobrazení $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ v bodě $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ve směru $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ je vektor

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x} + \alpha \mathbf{v}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\alpha} \in \mathbb{R}^m.$$



Tvrzení

Je-li zobrazení \mathbf{f} v bodě \mathbf{x} diferencovatelné, pak jeho směrová derivace v bodě \mathbf{x} ve směru \mathbf{v} je rovna $\mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{v}$.

Gradient funkce $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je

$$\nabla f(\mathbf{x}) := f'(\mathbf{x})^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

O čem vypovídá gradient funkce f v bodě \mathbf{x} ?

Směrová derivace $f'(\mathbf{x})\mathbf{v} = \nabla f(\mathbf{x})^T \mathbf{v}$ je

- maximální ve směru $\mathbf{v} = \frac{\nabla f(\mathbf{x})}{\|\nabla f(\mathbf{x})\|}$ a
- nulová ve směru $\mathbf{v} \perp \nabla f(\mathbf{x})$.

Parciální derivace druhého řádu

Věta

Nechť $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Jestliže druhé parciální derivace

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j}, \quad \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_j \partial x_i}$$

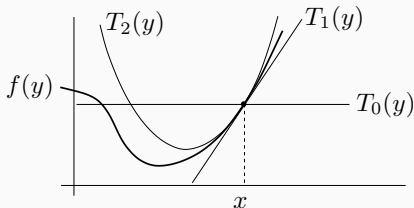
v bodě \mathbf{x} existují a jsou v bodě \mathbf{x} spojité, potom jsou si rovny.

Hessova matice je

$$f''(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Taylorův polynom pro funkci $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Hledáme polynom k -tého stupně $T_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, který má v bodě \mathbf{x} všechny parciální derivace až do řádu k stejné jako funkce f .






Taylorovy polomy v bodě \mathbf{x} do stupně dva

$$T_0(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x})$$

$$T_1(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f'(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x})$$

$$T_2(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f'(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x}) + \frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{x})^\top f''(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x})$$

-  T. Werner. *Optimalizace* (kapitola 8). Elektronická skripta. FEL ČVUT, 2020.
-  J. Hamhalter a J. Tišer. *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. FEL ČVUT, 2005.
<https://math.feld.cvut.cz/tiser/difpocet.html>
-  *Matlab Activities for Multivariable Calculus*.
<https://mse.redwoods.edu/darnold/math50c/matlab/>