Optimalizace

16. Úvod do lineárního programování

Tomáš Kroupa   Tomáš Werner

2022 LS

Fakulta elektrotechnická
ČVUT v Praze

O čem je lineární programování (LP)

- Minimalizujeme lineární funkci při lineárních omezeních
- Často je nutné formulovat podmínky celočíselnosti
- Střetává se zde spojitá a kombinatorická optimalizace

Aplikace

- Optimalizace produkčních/dopravních kapacit
- Nejlepší přiřazení
- Toky v síti
- Teorie her
- Regrese a aproximace

Plán

1. Formulace úloh a jazyk LP
2. Množina přípustných řešení – konvexní polyedr
3. Jak nalézt řešení – simplexový algoritmus
4. Duální úlohy
5. Aplikace
6. Celočíselné LP

Základní pojmy a příklady

Definice úlohy LP a její maticový tvar

Úloha LP

$$\begin{aligned} \text{Minimalizuj} \quad & c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\ \text{za podmínek} \quad & a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i, \quad i = 1, \ldots, m \end{aligned}$$

- Soustava lineárních nerovnic určuje přípustná řešení
- Maticový zápis pro $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ a $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ je

$$\min\{\mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

- Uvedený tvar úlohy LP postihuje nerovnosti $\leq$ i rovnosti

Transformace do rovnicového tvaru

Rovnicový tvar úlohy LP

$$\min\{\mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

Každou úlohu LP převedeme do tohoto tvaru pomocí 2 úprav:

1. Přidání nezáporné slackové proměnné pro každé omezení ve tvaru nerovnosti $\leq$
2. Vyjádření neomezené reálné proměnné x jako $x = x^+ - x^-$, kde $x^+ \geq 0$ a $x^- \geq 0$

Typické úlohy

Minimalizace nákladů na mix surovin $\mathbf{x}$

- $\mathbf{c}$ je vektor jednotkových cen surovin
- $\mathbf{A}$ udává množství látky i obsažené v surovině j
- $\mathbf{b}$ udává požadované množství jednotlivých látek v mixu

Minimalizuj celkovou cenu $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ za podmínek $\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

Maximalizace zisku z vyráběných produktů $\mathbf{x}$

- $\mathbf{c}$ je vektor jednotkových zisků z prodeje produktů
- $\mathbf{A}$ udává spotřebu materiálu i při výrobě produktu j
- $\mathbf{b}$ udává disponibilní množství jednotlivých materiálů

Maximalizuj celkový zisk $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ za podmínek $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

Regresní problém s vychýlenými hodnotami

- Prokládáme data (x_i, y_i), $i = 1, \dots, m$, vhodnou lineární regresní funkcí

$$f(x, \boldsymbol{\theta}) = \theta_1 \varphi_1(x) + \cdots + \theta_n \varphi_n(x)$$

- Malá část hodnot y_i představuje outliers (vychýlené hodnoty)
- Nechceme, aby takové hodnoty příliš ovlivnily odhad $\boldsymbol{\theta}$

Úloha robustní regrese

$$\text{Minimalizuj} \quad \sum_{i=1}^{m} |y_i - f(x_i, \boldsymbol{\theta})|, \quad \text{kde } \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n$$

Minimaxový problém

- Aproximace složité funkce reálné proměnné polynomem $f(x, \boldsymbol{\theta})$ s koeficienty $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n$
- Funkci známe v bodech x_i, kde má hodnoty y_i
- Chceme garanci, že chyba aproximace v každém bodě bude nejmenší možná

Úloha na minimax

$$\text{Minimalizuj} \quad \max_{i=1}^{m} |y_i - f(x_i, \boldsymbol{\theta})|, \quad \text{kde } \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n$$

Obě předchozí úlohy lze formulovat jako hledání přibližného řešení přeurčené soustavy lineárních rovnic.

Normy

Jak měřit velikost vektoru?

Definice

Funkce

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mapsto \|\mathbf{x}\| \in [0, \infty)$$

je norma, pokud platí:

- $\|\mathbf{x}\| = 0$ právě tehdy, když $\mathbf{x} = \mathbf{0}$
- $\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|$ pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
- $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$

p-normy

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad p \geq 1$$

Tři důležité normy

Manhattanská $\|\mathbf{x}\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$

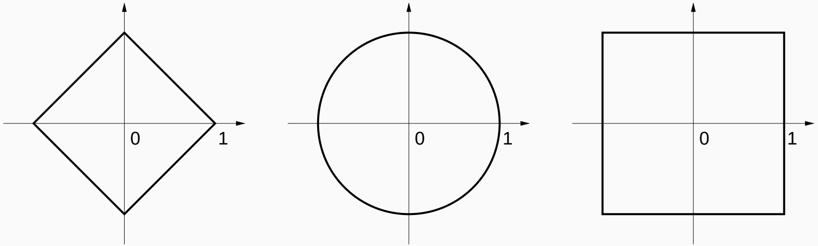
Eukleidovská $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$

Čebyševova $\|\mathbf{x}\|_\infty = \lim_{p \to \infty} \|\mathbf{x}\|_p = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$

- Platí $\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_1$
- Existují normy, které nejsou p-normy

Jednotkové sféry tří norem

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\|_p = 1\}, \quad \text{kde } p = 1, 2, \infty$$



Přibližné řešení přeurčené soustavy v různých normách

Hledejme řešení úlohy $\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_p$ pro $p = 1, 2, \infty$.

$p = 1$

Problém $\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{m} |\mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} - b_i|$ lze formulovat jako úlohu LP.

$p = 2$

Úloha má řešení ve smyslu nejmenších čtverců.

$p = \infty$

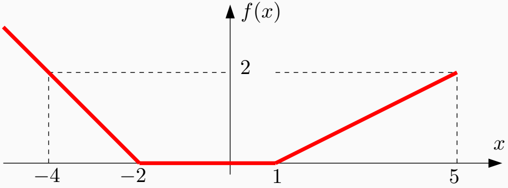
Problém $\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \max_{i=1}^{m} |\mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} - b_i|$ lze formulovat jako úlohu LP.

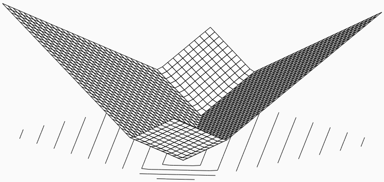
Transformace na úlohy LP

Konvexní po částech afinní funkce

Funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tvaru

$$f(\mathbf{x}) = \max_{i=1}^{k} (\mathbf{c}_i^\mathsf{T}\mathbf{x} + d_i), \qquad \mathbf{c}_i \in \mathbb{R}^n, d_i \in \mathbb{R}\,.$$





Minimalizace konvexní po částech afinní funkce

Následující dvě úlohy jsou ekvivalentní:

Úloha 1

$$\text{Minimalizuj} \quad \max_{i=1}^{k}(\mathbf{c}_i^{\mathsf{T}}\mathbf{x} + d_i) \quad \text{z.p.} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \;\; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

Úloha 2

$$\text{Minimalizuj } y \quad \text{z.p.} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b},\, \mathbf{c}_i^{\mathsf{T}}\mathbf{x} + d_i \leq y \,\forall i, \;\; (\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

Řešení přeurčené soustavy pomocí LP

Řešení úlohy $\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_p$ pro $p = 1, \infty$ se nalezne takto:

$p = \infty$

Problém $\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \max_{i=1}^{m} |\mathbf{a}_i^\mathsf{T}\mathbf{x} - b_i|$ lze formulovat jako úlohu LP:

$$\text{Minimalizuj } y \quad \text{z.p. } -y \le \mathbf{a}_i^\mathsf{T}\mathbf{x} - b_i \le y \ \ \forall i$$

$p = 1$

Problém $\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{m} |\mathbf{a}_i^\mathsf{T}\mathbf{x} - b_i|$ lze formulovat jako úlohu LP:

$$\text{Minimalizuj } \sum_{i=1}^{m} y_i \quad \text{z.p. } -y_i \le \mathbf{a}_i^\mathsf{T}\mathbf{x} - b_i \le y_i \ \ \forall i$$

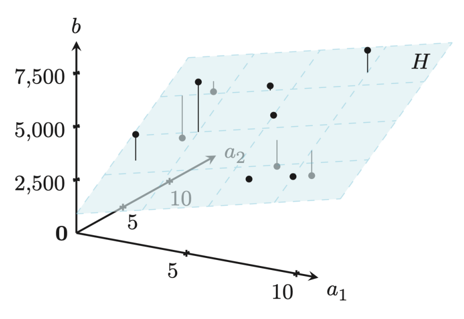
Příklad – robustní regrese (1)

Odhadujeme neznámé parametry $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^3$ lineární regresní funkce

$$f(a_1, a_2, \theta_1, \theta_2, \theta_3) = \theta_1 a_1 + \theta_2 a_2 + \theta_3$$

na základě pozorování a_{i1}, a_{i2} a b_i.

Person i	b_i	a_{i1}	a_{i2}
1	4,585	2	10
2	7,865	9	10
3	3,379	7	2
4	6,203	3	6
5	2,466	1	9
6	3,248	7	5
7	4,972	6	7
8	3,437	9	4
9	3,845	1	4
10	3,878	9	2
11	5,674	5	9



Příklad – robustní regrese (2)

Původní úloha

$$\text{Minimalizuj} \quad \sum_{i=1}^{11} |b_i - \theta_1 a_{i1} + \theta_2 a_{i2} + \theta_3| \quad \text{za podmínky } \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^3$$

Ekvivalentní LP

$$\text{Minimalizuj} \quad \sum_{i=1}^{11} y_i \quad \text{za podmínek } \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^3$$

$$-y_i \leq b_i - \theta_1 a_{i1} + \theta_2 a_{i2} + \theta_3 \leq y_i \quad i = 1, \ldots, 11$$