# Optimalizace

## 4. Ortogonální projekce

Tomáš Kroupa Tomáš Werner

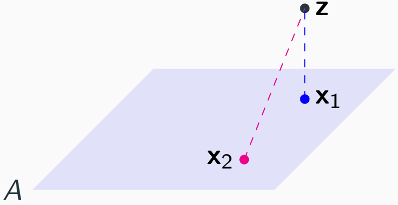
2022 LS

Fakulta elektrotechnická
ČVUT v Praze

# Jak určit vzdálenost bodu od afinního podprostoru?

Uvažujme bod $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ a afinní podprostor $A \subseteq \mathbb{R}^m$.

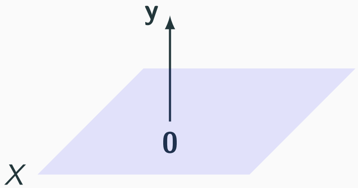
- Minimalizujeme funkci $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{z} - \mathbf{x}\|$ za omezení $\mathbf{x} \in A$
- To je úloha spojité optimalizace, protože omezení $\mathbf{x} \in A$ říká, že $A$ je množinou řešení nějaké soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$
- Vzdálenost bodu $\mathbf{z}$ od $A$ je optimální hodnota této úlohy



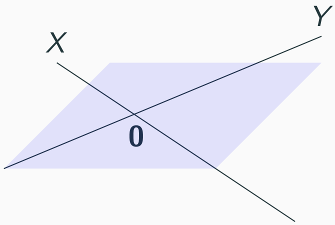

Úlohu nejprve vyřešíme pro lineární podprostor $A$.

# Ortogonalita podprostorů

Vektor $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ je ortogonální na podprostor $X \subseteq \mathbb{R}^m$, je-li $\mathbf{y} \perp \mathbf{x}$ pro každé $\mathbf{x} \in X$. Píšeme $\mathbf{y} \perp X$.




Podprostory $X, Y \subseteq \mathbb{R}^m$ jsou ortogonální, je-li $\mathbf{y} \perp X$ pro všechna $\mathbf{y} \in Y$. Píšeme $X \perp Y$.




**Postřehy**

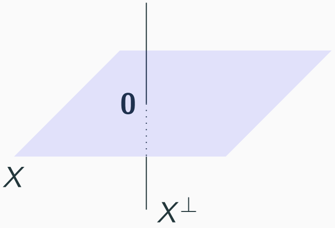
- Pokud $X \perp Y$, potom $X \cap Y = \{\mathbf{0}\}$
- $\mathrm{span}(X \cup Y)$ může být podprostor menší než $\mathbb{R}^m$

# Ortogonální doplněk

Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^m$ je lineární podprostor.

Ortogonální doplněk podprostoru $X$ je lineární podprostor

$$X^\perp = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{y} \perp X\}.$$




**Základní fakta**

- $X \cap X^\perp = \{\mathbf{0}\}$
- $\dim X + \dim X^\perp = m$
- $(X^\perp)^\perp = X$

# Ortogonální doplňky fundamentálních podprostorů matice

**Tvrzení**

Pro každou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ platí

$$(\operatorname{rng} \mathbf{A})^{\perp} = \operatorname{null} \mathbf{A}^{\mathsf{T}} \qquad \text{a} \qquad (\operatorname{null} \mathbf{A})^{\perp} = \operatorname{rng} \mathbf{A}^{\mathsf{T}}.$$

Důsledek pro existenci řešení soustavy lineárních rovnic:

- *Buď* má soustava $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ nějaké řešení $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,
- *anebo* existuje nenulové řešení $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ soustavy $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{y} = \mathbf{0}$ splňující $\mathbf{y} \not\perp \mathbf{b}$.

# Příklad

**Proč nemá soustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ žádné řešení?**

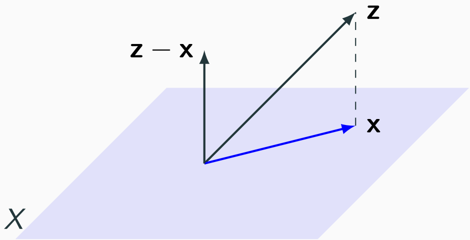
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Např. pro $\mathbf{y} = (1, 2, 3)$ platí $\mathbf{A}^\top \mathbf{y} = \mathbf{0}$ a $\mathbf{y} \not\perp \mathbf{b}$.

# Ortogonální projekce na podprostor

**Definice**

Ortogonální projekce vektoru $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ na lineární podprostor $X \subseteq \mathbb{R}^m$ je vektor $\mathbf{x} \in X$ takový, že $(\mathbf{z} - \mathbf{x}) \perp X$.



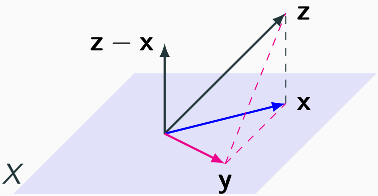

Vektor $\mathbf{z} - \mathbf{x}$ se nazývá *kolmice* (také *chybový vektor*, *rejekce*).

# Vzdálenost bodu od lineárního podprostoru

## Věta o kolmici

Nechť $\mathbf{x} \in X$ je ortogonální projekce vektoru $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ na lineární podprostor $X \subseteq \mathbb{R}^m$. Platí:

- $\|\mathbf{z} - \mathbf{x}\| < \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\| \qquad \forall \mathbf{y} \in X, \quad \mathbf{y} \neq \mathbf{x}$
- Vektor $\mathbf{x}$ je jednoznačně určen.



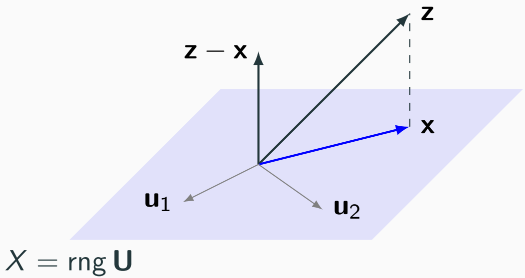

Vzdálenost bodu $\mathbf{z}$ od podprostoru $X$ je tedy $\|\mathbf{z} - \mathbf{x}\|$.

# Ortogonální projekce na podprostor s ortonormální bází

**Věta**

Nechť má matice $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ortonormální sloupce $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ a $X = \operatorname{rng} \mathbf{U}$. Ortogonální projekcí vektoru $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ na $X$ je vektor

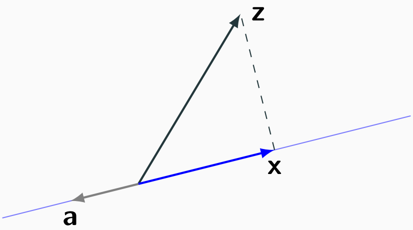
$$\mathbf{x} = \mathbf{U}\mathbf{U}^\mathsf{T}\mathbf{z} = (\mathbf{u}_1^\mathsf{T}\mathbf{z})\mathbf{u}_1 + \cdots + (\mathbf{u}_n^\mathsf{T}\mathbf{z})\mathbf{u}_n$$



# Příklad: ortogonální projekce na přímku

Ortogonální projekce vektoru $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ na přímku procházející počátkem se směrovým vektorem $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ je vektor

$$\mathbf{x} = \frac{(\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{z})\mathbf{a}}{\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{a}}.$$



# Ortogonální projektor

- Nechť má matice $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ortonormální sloupce
- Ortogonální projektor je čtvercová matice $\mathbf{P} = \mathbf{U}\mathbf{U}^\mathsf{T}$

**Vlastnosti**

1. Matice $\mathbf{P}$ je idempotentní a symetrická:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^2 = \mathbf{P}^\mathsf{T}.$$

2. Platí:

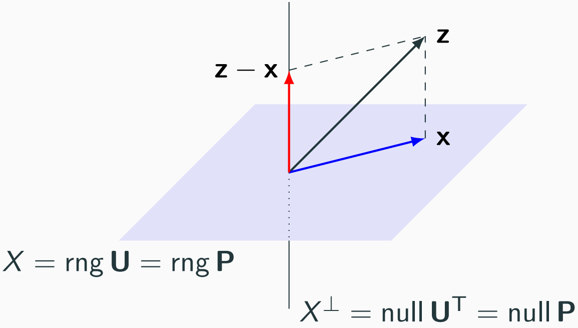
$$\operatorname{rng} \mathbf{P} = \operatorname{rng} \mathbf{U} \qquad \text{a} \qquad \operatorname{rng} \mathbf{P} \perp \operatorname{null} \mathbf{P}.$$

První podmínka charakterizuje ortogonální projektory mezi čtvercovými maticemi.

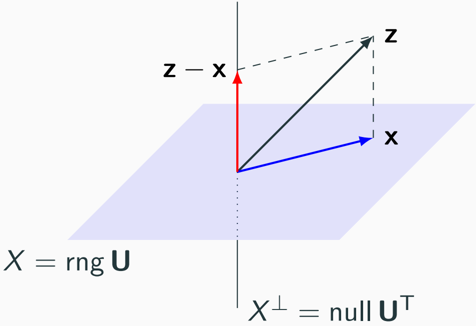
# Ortogonální projekce na ortogonální doplněk

**Tvrzení**

1. Kolmice $\mathbf{z} - \mathbf{x}$ je ortogonální projekcí vektoru $\mathbf{z}$ na $X^\perp$.
2. Matice $\mathbf{I} - \mathbf{U}\mathbf{U}^\mathsf{T}$ je ortogonální projektor na $X^\perp$.
3. Vzdálenost bodu $\mathbf{z}$ od podprostoru $X^\perp$ je $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{U}^T\mathbf{z}\|$.



# Prostor $\mathbb{R}^m$ jako direktní součet $X$ a $X^\perp$




**Tvrzení**

$$X \cap X^\perp = \{\mathbf{0}\} \quad \text{a} \quad X + X^\perp = \mathbb{R}^m$$

# Ortogonální projekce – shrnutí

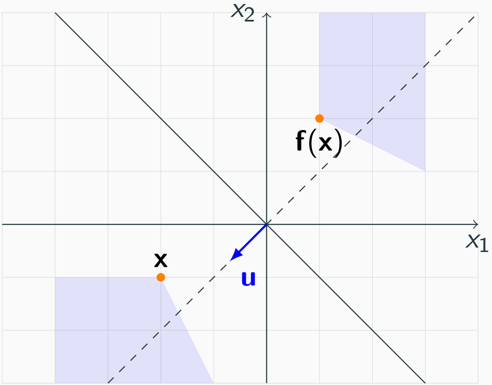
Hledáme ortogonální projekci vektoru $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ na lineární podprostor $X \subseteq \mathbb{R}^m$ generovaný bází $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$:

- Nalezneme ortonormální bázi pro $X$ (sloupce matice $\mathbf{U}$) pomocí QR rozkladu
- Dostaneme komplementární dvojici ortogonálních projektorů $\mathbf{U}\mathbf{U}^\mathsf{T}$ a $\mathbf{I} - \mathbf{U}\mathbf{U}^\mathsf{T}$ na $X$ a $X^\perp$
- Tím nalezneme i vzdálenosti vektoru $\mathbf{z}$ k oběma podprostorům

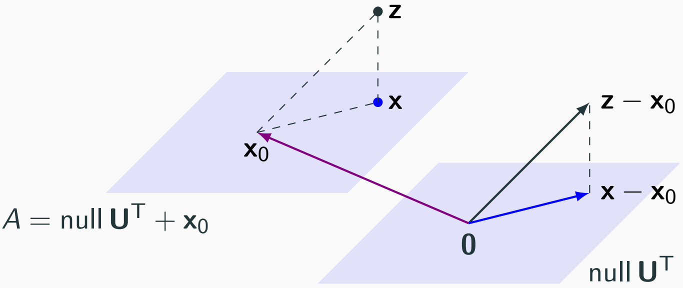
Později odvodíme podobu ortogonálních projektorů přímo pomocí *libovolné* báze prostoru $X$.

# Ortogonální reflektor

Zrcadlení kolem nadroviny s jednotkovou normálou $\mathbf{u}$ vyjadřuje Householderova matice $\mathbf{H_u} = \mathbf{I} - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^\mathsf{T} = \mathbf{I} - 2\mathbf{P}$. Je to ortogonální symetrická matice (tzv. ortogonální reflektor).



# Vzdálenost bodu z od afinního podprostoru $A$




- Vyjádříme $A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{U}^\mathsf{T}\mathbf{x} = \mathbf{b}\} = \operatorname{null} \mathbf{U}^\mathsf{T} + \mathbf{x}_0$, kde $\mathbf{U}$ má ortonormální sloupce a $\mathbf{x}_0$ splňuje $\mathbf{U}^\mathsf{T}\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$
- Vezmeme ortogonální projektor $\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{U}\mathbf{U}^\mathsf{T}$ na $\operatorname{null} \mathbf{U}^\mathsf{T}$
- Zřejmě $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{P}(\mathbf{z} - \mathbf{x}_0)$
- Hledaná vzdálenost je $\|\mathbf{z} - \mathbf{x}\| = \|\mathbf{U}^\mathsf{T}\mathbf{z} - \mathbf{b}\|$