

Optimalizace

2. Lineární prostory a afinní podprostory

Tomáš Kroupa Tomáš Werner

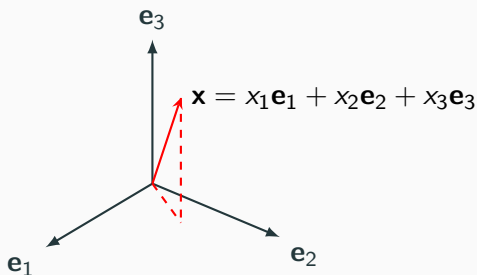
2022 LS

Fakulta elektrotechnická
ČVUT v Praze

Lineární prostory, matice a soustavy

Lineární prostor

- Lineární prostor \mathbb{R}^n a lineární podprostory $X \subseteq \mathbb{R}^n$
- Vektory $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
- Ekvivalentně vektory píšeme sloupcově $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \dots x_n \end{bmatrix}^T$
- Standardní báze prostoru \mathbb{R}^n je $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$

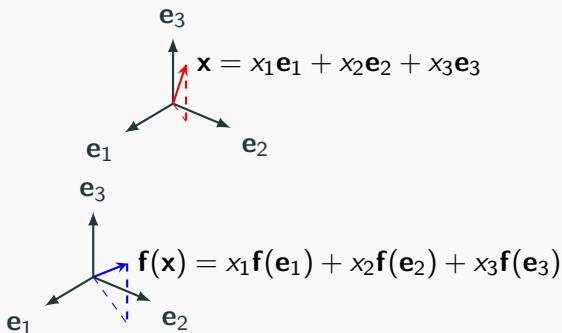


Lineární zobrazení

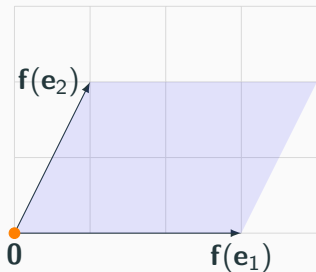
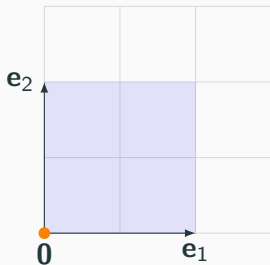
- Matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$
- Lineární zobrazení $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ má podobu

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

pro nějakou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (v závislosti na volbě báze!)



Lineární zobrazení: příklad $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$



$$f(x) = \mathbf{A}x = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

Sloupcový a řádkový pohled na součin \mathbf{Ax}

Vyjádříme $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ prostřednictvím **sloupců** $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^{m \times 1}$:

$$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \mathbf{a}_1 + \dots + x_n \mathbf{a}_n$$

Vyjádříme $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ prostřednictvím **řádků** $\mathbf{a}_1^T, \dots, \mathbf{a}_m^T \in \mathbb{R}^{1 \times n}$:

$$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m^T \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m^T \mathbf{x} \end{bmatrix}$$

Řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ geometricky

Sloupcově

Hledáme vektor $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ splňující

$$x_1 \mathbf{a}_1 + \dots + x_n \mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

Řádkově

Hledáme vektor $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ležící v průniku

$$\bigcap_{i=1}^m \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} = b_i\}$$

Součin matic

Pro $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times p}$ a $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ definujeme $\mathbf{C} = \mathbf{AB} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ jako

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}, \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n.$$

Sloupcově-řádkově

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{b}_p^T \end{bmatrix} = \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_1^T + \dots + \mathbf{a}_p \mathbf{b}_p^T$$

Řádkově-sloupcově

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \dots & \mathbf{b}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Ab}_1 & \dots & \mathbf{Ab}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \mathbf{B} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m^T \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

Součin blokových matic

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \dots & \mathbf{A}_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{m1} & \dots & \mathbf{A}_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \dots & \mathbf{B}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{B}_{p1} & \dots & \mathbf{B}_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \dots & \mathbf{C}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}_{m1} & \dots & \mathbf{C}_{mn} \end{bmatrix}$$

kde

$$\mathbf{C}_{ij} = \sum_{k=1}^p \mathbf{A}_{ik} \mathbf{B}_{kj}, \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$$

Prostor obrazů matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$\text{rng } \mathbf{A} = \{\mathbf{Ax} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^m$$

Interpretace

- Obor hodnot (range, image) lineárního zobrazení $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$
- Množina všech vektorů \mathbf{y} takových, že $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ má řešení
- Lineární obal sloupců matice \mathbf{A} (sloupcový prostor)

Hodnost matice \mathbf{A} je číslo

$$\text{rank } \mathbf{A} = \dim \text{rng } \mathbf{A}.$$

Rozklad matice podle hodnosti

Pro každou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ hodnosti r existují matice $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times r}$ a $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{r \times n}$ splňující

$$\mathbf{A} = \mathbf{BC}.$$

- Úspora paměti pro $r \ll \min\{m, n\}$
- Rozklad není jednoznačný
- Z tohoto vztahu plyne $\text{rank } \mathbf{A} = \text{rank } \mathbf{A}^T$

Nulový prostor matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$\text{null } \mathbf{A} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

Interpretace

- Množina vektorů, které se zobrazí na nulový vektor (jádro)
- Množina řešení soustavy lineárních rovnic $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$
- Množina všech vektorů \mathbf{x} kolmých na každý řádek matice \mathbf{A}

Jaký je vztah mezi $\text{rng } \mathbf{A}$ a $\text{null } \mathbf{A}$?

Matice s plnou hodností

Pro matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ jsou tvrzení pod sebou ekvivalentní:

Prostor obrazů

1. $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ má řešení $\forall \mathbf{y}$
2. $\text{rng } \mathbf{A} = \mathbb{R}^m$
3. $\text{rank } \mathbf{A} = m$
4. \mathbf{A} má LN řádky
5. \mathbf{A} má pravou inverzi
6. \mathbf{AA}^T je regulární

Nulový prostor

1. $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ řeší jen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$
2. $\text{null } \mathbf{A} = \{\mathbf{0}\}$
3. $\text{rank } \mathbf{A} = n$
4. \mathbf{A} má LN sloupce
5. \mathbf{A} má levou inverzi
6. $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ je regulární

Věta

Pro každou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ platí

$$\text{rank } \mathbf{A} + \dim \text{null } \mathbf{A} = n$$

Interpretace

- Čím větší je rank \mathbf{A} , tím menší je míra degenerace lineárního zobrazení $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$
- Číslo $n - \text{rank } \mathbf{A}$ je počet LN řešení soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$

Afinní podprostory

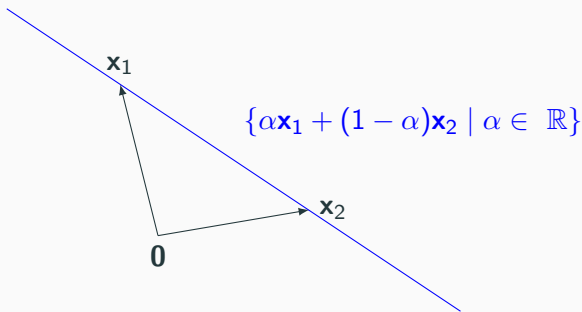
Afinní kombinace

Afinní kombinace vektorů $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ je lineární kombinace

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{x}_k, \quad \text{kde } \alpha_1 + \dots + \alpha_k = 1.$$

Afinní obal vektorů $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ je množina

$$\{\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{x}_k \mid \alpha_1 + \dots + \alpha_k = 1, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}\}.$$



Afinní podprostor

Definice

Afinní podprostor je množina $A \subseteq \mathbb{R}^n$ splňující

$$\left[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in A, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1 \right] \Rightarrow \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{x}_i \in A.$$

- Příklady: bod, přímka, rovina, lineární prostor \mathbb{R}^n
- Je-li X lineární podprostor \mathbb{R}^n a $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, pak je množina

$$X + \mathbf{x}_0 = \{ \mathbf{x} + \mathbf{x}_0 \mid \mathbf{x} \in X \}$$

afinní podprostor \mathbb{R}^n

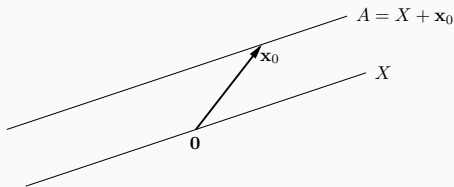
Afinní podprostor je posunutý lineární podprostor

Věta

Pro každý afinní podprostor $A \neq \emptyset$ existuje jediný lineární podprostor X a nějaký vektor $\mathbf{x}_0 \in A$ splňující

$$A = X + \mathbf{x}_0$$

Dimenze afinního podprostoru A je $\dim X$.



Tvrzení

Nechť $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní.

1. A je afinní podprostor.
2. Existuje matice \mathbf{A} a vektor \mathbf{b} tak, že

$$A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b}\}.$$

Afinní zobrazení

Zobrazení $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je **afinní**, pokud

$$\mathbf{f}(\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{x}_k) = \alpha_1 \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \cdots + \alpha_k \mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$$

platí pro všechna $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$, $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$.

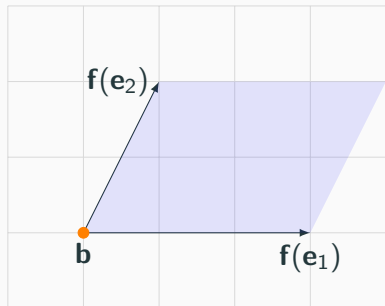
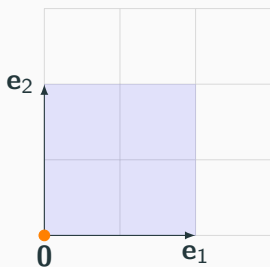
Tvrzení

Nechť $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Následující výroky jsou ekvivalentní.

1. Zobrazení \mathbf{f} je afinní.
2. Existuje $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ tak, že $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$.

Speciálně: afinní funkce $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ má tvar $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T \mathbf{x} + b$.

Afinní zobrazení – příklad $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$



$$f(x) = \mathbf{A}x + \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Lineární	Afinní
lineární kombinace	afinní kombinace
lineární obal	afinní obal
lineární podprostor X	afinní podprostor $X + \mathbf{x}_0$
řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$	řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$
null \mathbf{A}	$\mathbf{x}_0 + \text{null } \mathbf{A}$
lineární zobrazení \mathbf{Ax}	afinní zobrazení $\mathbf{Ax} + \mathbf{b}$