Řešení prvního domácího úkolu

Zadání Mějme $x \in \mathbb{R}$, pro které platí $x \neq 1$. Dokažte (*indukcí podle* n), že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí rovnost

$$1 + x + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

Řešení. V sumačním zápisu je výraz $1 + x + \cdots + x^n$ zapsán jako

$$\sum_{i=0}^{n} x^i.$$

Budeme postupovat indukcí podle n.

Základní krok ($n = 0$) Máme dokázat rovnost

$$\sum_{i=0}^{0} x^i = \frac{x^0 - 1}{x - 1}.$$

Obě strany jsou rovny nule, rovnost tedy platí.

Indukční krok Pro dané n máme indukční předpoklad

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

Chceme dokázat rovnost

$$\sum_{i=0}^{n+1} x^i = \frac{x^{n+2} - 1}{x - 1}.$$

Postupnými úpravami dostáváme

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} x^i &= \sum_{i=0}^{n} x^i + x^{n+1} \\
&= \frac{x^{n+1}-1}{x-1} + x^{n+1} \\
&= \frac{x^{n+1}-1}{x-1} + \frac{x^{n+1}(x-1)}{x-1} \\
&= \frac{x^{n+1}-1+x^{n+1}(x-1)}{x-1} \\
&= \frac{x^{n+1}-1+x^{n+2}-x^{n+1}}{x-1} \\
&= \frac{x^{n+2}-1}{x-1},
\end{aligned}
$$

kde popořadě využíváme definice sumy, indukční předpoklad, a poté provádíme snadné algebraické úpravy. Chtěnou rovnost jsme tedy dokázali.

Rovnost ze zadání tedy využitím principu matematické indukce platí pro všechna přirozená čísla.