1 Indukce na přirozených číslech

Úloha 1. Pro každé přirozené číslo $n \in \mathbb{N}$ definujme

$$U_n := 0^3 + 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3.$$

(V *sumačním zápisu* tedy definujeme $U_n := \sum_{i=0}^{n} i^3$.)

Dokažte, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí rovnost

$$U_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Řešení (komicky podrobné). Chceme dokazovat tvrzení

Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $U_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Pro každé přirozené číslo $n \in \mathbb{N}$ si jako $V(n)$ označíme tvrzení

Platí rovnost $U_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Tvrzení, které chceme dokazovat, je tvaru

Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $V(n)$.

Můžeme tedy využít matematickou indukci a toto tvrzení dokázat tím, že dokážeme dvě tvrzení:

Základní krok $V(0)$.

Indukční krok Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí: pokud $V(n)$, pak $V(n+1)$.

Obě tvrzení dokážeme s podrobným komentářem.

Základní krok Tvrzení $V(0)$ je tvrzení

Platí rovnost $U_0 = \frac{0^2(0+1)^2}{4}$.

Číslo U_0 je definováno jako 0^3, tedy $U_0 = 0$. Zmíněná rovnost, kterou máme dokázat, je tedy

$$0 = \frac{0^2(0+1)^2}{4}.$$

Pravá strana je však rovna nule, čímž je důkaz u konce.

Indukční krok Máme dokázat tvrzení

Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí: pokud $V(n)$, pak $V(n+1)$.

Mějme tedy $n \in \mathbb{N}$ a dokažme tvrzení

Pokud $V(n)$, pak $V(n+1)$.

Abychom dokázali tvrzení tvaru implikace, předpokládejme platnost $V(n)$ (tomu se říká *indukční předpoklad*) a dokažme $V(n+1)$. Indukční předpoklad je

Platí rovnost $U_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Na základě tohoto předpokladu máme dokázat tvrzení

Platí rovnost $U_{n+1} = \frac{(n+1)^2((n+1)+1)^2}{4}$.

Na levé straně je

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= 0^3 + 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 \\ &= U_n + (n+1)^3. \end{aligned}$$

Z indukčního předpokladu je tento výraz roven výrazu

$$\begin{aligned} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 &= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4(n+1))}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}, \end{aligned}$$

což je pravá strana dokazované rovnosti.

Dokázali jsme tedy jak základní krok, tak indukční krok. Díky principu matematické indukce můžeme vyvodit, že rovnost

$$U_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

platí pro všechna přirozená čísla n.

Řešení (standardní). Budeme postupovat indukcí podle n.

Základní krok Rovnost $U_0 = \frac{0^2(0+1)^2}{4}$ platí, protože se obě strany po úpravách rovnají nule.

Indukční krok Pro dané n máme indukční předpoklad

$$U_n = \tfrac{n^2(n+1)^2}{4}$$

a chceme dokázat

$$U_{n+1} = \tfrac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.$$

To dokazuje následující série rovností

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= 0^3 + 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 \\ &= U_n + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}, \end{aligned}$$

kde první rovnost platí z definice U_{n+1}, druhá rovnost z definice U_n, třetí využi tím indukčního předpokladu, a čtvrtá díky jednoduchým algebraickým úpravám.

Rovnost ze zadání tedy platí pro všechna přirozená čísla n.

Úloha 2. Mějme $x \in \mathbb{R}$, pro které platí $x \neq 1$. Dokažte (*indukcí podle* n), že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí rovnost

$$1 + x + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

Dále dokažte, že nerovnost

$$\sqrt{0} + \sqrt{1} + \cdots + \sqrt{n} < \frac{2}{3}(n+1)\sqrt{n+1}$$

platí pro všechna přirozená n.

Výrazy, ve kterých se vyskytují tři tečky, převeďte do sumačního zápisu.

Úloha 3. Nechť M je n-prvková množina a nechť pro $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(M)$ platí, že kdykoli $A \in \mathcal{C}$ a $B \in \mathcal{C}$, pak $A \cap B \neq \emptyset$.

Dokažte, že

$$|\mathcal{C}| \leq 2^{n-1}.$$

Úloha 4. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n splňující $n > 3$ platí nerovnost

$$\frac{n!}{n^n} < \frac{2}{n^2}.$$

Úloha 5. Předpokládejte, že existují konstanty a, b, c, d takové, že pro všechna kladná celá čísla n platí rovnost

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = an^3 + bn^2 + cn + d.$$

Výběrem konkrétních hodnot pro n odvoďte, jakých hodnot by pak dané konstanty nutně musely nabývat (využijte své znalosti lineární algebry). Poté potvrďte obecnou platnost vaší rovnosti indukcí.

2 Induktivně definované množiny

Úloha 6.

1. Induktivně definujte množinu všech sudých přirozených čísel (jako podmnožinu všech přirozených čísel).
2. Induktivně definujte množinu všech lichých přirozených čísel.

Úloha 7. Nechť S je podmnožina $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ zadána induktivními pravidly

1. $(n, 0)$ je v S pro každé $n \in \mathbb{N}$.
2. Pokud je (n, m) v S, pak je v S i $(n, m+1)$.

- Ukažte, že $(4, 3) \in S$.
- Dokažte, že $S = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Při řešení úlohy vám může pomoci nakreslit si obrázek.

Úloha 8. Nechť T je podmnožina $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ zadána induktivními pravidly

1. $(0, 0)$ je v T.

2. Pokud je (n, m) v S, pak je v S i $(n, m+1)$.
3. Pokud je (n, m) v S, pak je v S i $(n+1, m)$.
4. Pokud je (n, m) v S, pak je v S i $(n+1, m+1)$.

- Dokažte dvěma různými způsoby, že $(4, 3) \in T$.
- Dokažte, že $T = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
- Jak by vypadala množina T, kdybyste z její induktivní definice odebrali první, druhé, třetí či čtvrté pravidlo?

Úloha 9. Nechť $\Sigma = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}$. (Množinu Σ chápejte jako abecedu o dvou symbolech a, b.) Množinu $S \subseteq \Sigma^*$ definujeme následujícími induktivními pravidly:

1. $\epsilon \in S$.
2. Pokud $w \in S$, pak $\mathrm{a}w\mathrm{b} \in S$.
3. Pokud $w \in S$, pak $\mathrm{b}w\mathrm{a} \in S$.
4. Pokud $w \in S$ a $u \in S$, pak $wu \in S$.

Připomenutí: Množina Σ^* je množina všech (konečných) slov nad abecedou Σ, symbolem ϵ označujeme prázdné slovo.

- Ukažte, že S obsahuje slova aabbbbaa i baba.
- Dokažte strukturální indukcí, že všechna slova v množině S obsahují stejný počet znaků a i b.

Úloha 10. Mějme nějakou abecedu (množinu znaků) Σ a pevně vyberme slovo $w \in \Sigma^*$. Induktivně definujte podmnožinu množiny Σ^* obsahující přesně slova obsahující w jako podřetězec.

Poznámka: Pro $\Sigma = \{0, 1\}$ a $w = 000$ platí, že w je obsaženo ve slově 010101 jako *podposloupnost*, ale ne jako podřetězec. Jako podřetězec je w obsaženo například ve slově 1001000101.

Reference

[1] P. A. Fejer, D. A. Simovici, *Mathematical Foundations of Computer Science*, Springer-Verlag New York 1991