LGR — Sémantika predikátové logiky

Matěj Dostál

Úloha 1. Jazyk predikátové logiky $\mathcal{L}$ je dán následující volbou symbolů:

$$\begin{aligned}\mathsf{Pred} &= \{R\}, \quad ar(R) = 2\\ \mathsf{Func} &= \{f\}, \quad ar(f) = 1\\ \mathsf{Kons} &= \emptyset\end{aligned}$$

Uvažujte formuli φ:

$$\forall x\ R(f(x), y)$$

1. Nalezněte interpretaci jazyka $\mathcal{L}$ a kontext proměnných ρ tak, aby v dané interpretaci a kontextu proměnných byla formule φ *pravdivá*.
2. Nalezněte interpretaci jazyka $\mathcal{L}$ a kontext proměnných ρ tak, aby v dané interpretaci a kontextu proměnných byla formule φ *nepravdivá*.

Řešení. Pro obě podúlohy zvolím jednu a tu samou interpretaci jazyka $\mathcal{L}$. Naším universem U bude množina přirozených čísel $\mathbb{N}$, funkční symbol f interpretujeme jako

$$\begin{aligned}[\![f]\!] : \mathbb{N} &\to \mathbb{N}\\ n &\mapsto n + 1,\end{aligned}$$

predikátový symbol R interpretujeme jako ostrou nerovnost:

$$[\![R]\!] = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m > n\}.$$

1. Uvažujme kontext proměnných

$$\begin{aligned}\rho : \mathsf{Var} &\to \mathbb{N}\\ x &\mapsto 17\\ y &\mapsto 0.\end{aligned}$$

Aby v daném kontextu byla formule $\varphi = \forall x \ R(f(x), y)$ pravdivá, musí být formule

$$R(f(x), y)$$

pravdivá pro každý update $\rho[x := d]$ kontextu ρ v proměnné x, kde d probíhá přirozená čísla. Označme si takový update $\rho[x := d]$ jako kontext τ. Pak

$$\begin{aligned}
[\![R(f(x), y)]\!]_\tau &= [\![R]\!]([\![f(x)]\!]_\tau, [\![y]\!]_\tau) = \\
&= [\![R]\!]([\![f]\!]([\![x]\!]_\tau), [\![y]\!]_\tau) = \\
&= [\![R]\!]([\![f]\!]([\![x]\!]_{\rho[x:=d]}), [\![y]\!]_{\rho[x:=d]}) = \\
&= [\![R]\!]([\![f]\!](d), 0) = \\
&= [\![R]\!](d + 1, 0),
\end{aligned}$$

přičemž poslední výraz je tvrzení

$$d + 1 > 0,$$

a d je přirozené číslo. Ale toto tvrzení platí, ať už je d jakékoli přirozené číslo. Proto je v každém updatu $\rho[x := d]$ kontextu ρ v proměnné x naše formule $R(f(x), y)$ pravdivá. A proto je v kontextu ρ formule $\varphi = \forall x \ R(f(x), y)$ pravdivá.

Všimněme si, že ve formuli φ se proměnná x vyskytuje pouze vázaně. V kontextu ρ byla tudíž hodnota proměnné x *nepodstatná* (výsledek na ní nezávisel). Naopak hodnota proměnné y podstatná byla.

2. Uvažujme nyní kontext proměnných

$$\begin{aligned}
\rho : \mathsf{Var} &\to \mathbb{N} \\
x &\mapsto 15 \\
y &\mapsto 13.
\end{aligned}$$

Aby v daném kontextu byla formule $\varphi = \forall x \ R(f(x), y)$ nepravdivá, musí existovat alespoň jeden update $\rho[x := d]$ kontextu ρ v proměnné x tak, aby v něm byla formule

$$R(f(x), y)$$

nepravdivá. Všimněme si, že v kontextu ρ je formule $R(f(x), y)$ zrovna pravdivá: $[\![R(f(x), y)]\!]_\rho = [\![R]\!]([\![f]\!]([\![x]\!]_\rho), [\![y]\!]_\rho)$, kde poslední výraz je

tvrzení $15 + 1 > 13$, a to je tvrzení pravdivé. Ale to, že jsme našli jeden kontext (kontext ρ), ve kterém je $R(f(x), y)$ pravdivá, ještě neznamená, že je v kontextu ρ pravdivá formule $\forall x\ R(f(x), y)$. Vezměme například update $\rho[x := 3]$ kontextu ρ. Výraz $[\![R(f(x), y)]\!]_{\rho[x:=3]}$ odpovídá tvrzení $3 + 1 > 13$, které je nepravdivé. Formule $\forall x\ R(f(x), y)$ je tedy v kontextu ρ nepravdivá.

Úloha 2. Jazyk predikátové logiky $\mathcal{L}$ je dán následující volbou symbolů:

$$\begin{aligned} \mathsf{Pred} &= \{P\}, \quad ar(P) = 2 \\ \mathsf{Func} &= \emptyset \\ \mathsf{Kons} &= \emptyset \end{aligned}$$

Uvažujte formuli φ:

$$\forall x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(z, y) \wedge (P(x, z) \Rightarrow P(z, x)))$$

Ve kterých z následujících intepretací je φ pravdivá?

1. Universem U je množina přirozených čísel $\mathbb{N}$. Predikátový symbol P interpretujeme následovně:

$$[\![P]\!] = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m < n\}.$$

2. Universem U je množina přirozených čísel $\mathbb{N}$. Predikátový symbol P interpretujeme následovně:

$$[\![P]\!] = \{(m, 2 \cdot m) \mid m \in \mathbb{N}\}.$$

3. Universem U je množina přirozených čísel $\mathbb{N}$. Predikátový symbol P interpretujeme následovně:

$$[\![P]\!] = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m < n + 1\}.$$

Řešení. Vyřešíme postupně všechny tři úlohy.

1. Popišme význam zadané sentence v naší interpretaci.

   Pro každé přirozené číslo m existují přirozená čísla n a o tak, že

$$m < n,$$
$$o < n, \text{ a}$$
$$\text{pokud } m < o, \text{ pak } o < m.$$

Je toto tvrzení pravdivé? Tvrdím, že ano: je-li dáno přirozené číslo m, zvolím v závislosti na něm přirozená čísla n a o následovně:

$$n := m + 1,$$
$$o := m.$$

Ověřím, že ať je m libovolné, má volba čísel n a o splňuje požadavky výše zmíněné požadavky. Skutečně:

$$m < m + 1,$$
$$m < m + 1, \text{ a}$$
$$\text{pokud } m < m, \text{ pak } m < m.$$

Poslední požadavek, jenž je ve formě implikace, je splněn proto, že není splněn předpoklad implikace: nerovnost $m < m$ neplatí.

2. Přeložme význam zadané sentence v naší interpretaci do přirozeného jazyka.

   Pro každé přirozené číslo m existují přirozená čísla n a o tak, že

$$n = 2 \cdot m,$$
$$n = 2 \cdot o, \text{ a}$$
$$\text{pokud } o = 2 \cdot m, \text{ pak } m = 2 \cdot o.$$

   Pokusme se ukázat, že je tvrzení pravdivé. Je-li dáno přirozené číslo m, volba čísel n a o je „vynucena“ tvrzeními, jejichž platnost chceme potvrdit: zvolme $n = 2 \cdot m$ a $o = m$. Tím jsou automaticky splněny první dva požadavky. Je naší volbou splněna i implikace

$$\text{pokud } o = 2 \cdot m, \text{ pak } m = 2 \cdot o?$$

   Pokud $o \neq 2 \cdot m$, je implikace pravdivá, protože neplatí předpoklad implikace. Pokud $o = 2 \cdot m$, musí platit $m = 0$ a $o = 0$, a tedy platí i $m = 2 \cdot o$. Sentence ze zadání je tedy v naší interpretaci pravdivá.

3. Budu už postupovat trochu rychleji. Predikátový symbol P je interpretován jako neostrá nerovnost $\leq$ na přirozených číslech.

   Pro libovolné přirozené m volím obě čísla n a o rovna číslu m. Ověření pravdivosti se pak značně trivialisuje. Jistě platí $m \leq n$ a $o \leq n$. Ověřme implikaci:

   $$\text{Pokud } m \leq o, \text{ pak } o \leq m.$$

   Pro naši volbu $o = m$ je předpoklad i závěr implikace pravdivý, je tedy pravdivá i implikace. Sentence ze zadání je proto v naší interpretaci pravdivá.

Úloha 3. Uvažujme jazyk z předchozí úlohy. Nalezněte model sentence $\forall x \neg P(x, x)$. Nalezněte interpretaci, která není modelem dané sentence.

Řešení. Modelem dané sentence budiž např. interpretace $U = \{a, b\}$, $[\![P]\!] = \{(a, b)\}$. Je třeba ověřit, že $(a, a) \notin [\![P]\!]$ a $(b, b) \notin [\![P]\!]$. Tyto požadavky jsou zjevně splněny.

Interpretace, která není modelem dané sentence, je např. interpretace $U = \{a, b\}$, $[\![P]\!] = \{(a, a)\}$. Je třeba ověřit, že sentence $\forall x \neg P(x, x)$ je v dané interpretaci nepravdivá. Je pro každý kontext proměnné x formule $\neg P(x, x)$ pravdivá? Nikoli: v kontextu, kde $x := a$, je formule $P(x, x)$ pravdivá ((a, a) je prvkem $[\![P]\!]$), a proto je v daném kontextu formule $\neg P(x, x)$ *nepravdivá*. Sentence $\forall x \neg P(x, x)$ proto není pravdivá.

Úloha 4. Jazyk predikátové logiky $\mathcal{L}$ je dán následující volbou symbolů:

$$\begin{aligned} \mathsf{Pred} &= \{R\}, \quad ar(R) = 2 \\ \mathsf{Func} &= \emptyset \\ \mathsf{Kons} &= \emptyset \end{aligned}$$

Uvažujte formuli φ:

$$\forall x \forall y \exists z (R(x, y) \Rightarrow R(y, z))$$

1. Uvažujme interpretaci s universem $A = \{a, b, c, d\}$, kde

   $$[\![R]\!] = \{(b, c), (b, b), (b, a)\}.$$

   Je v této interpretaci φ pravdivá? Pečlivě zdůvodněte svou odpověď.

2. Uvažujme interpretaci s universem $A = \{a, b, c\}$, kde

$$[\![R]\!] = \{(b, c), (a, b), (c, b)\}.$$

Je v této interpretaci φ pravdivá? Pečlivě zdůvodněte svou odpověď.

Řešení. Vyřešíme obě části úlohy zvlášť.

1. V této interpretaci sentence φ není pravdivá. Pro každou dvojici u, v prvků z universa A má existovat prvek w tak, že pokud $(u, v) \in [\![R]\!]$, pak $(v, w) \in [\![R]\!]$. Zvolme prvky b a c. Pro ně platí, že $(b, c) \in [\![R]\!]$. Pro žádný prvek $w \in A$ ale neplatí $(c, w) \in [\![R]\!]$. (Pořádněji: $(c, a) \notin [\![R]\!]$, $(c, b) \notin [\![R]\!]$, a $(c, c) \notin [\![R]\!]$.) Sentence φ je v dané interpretaci nepravdivá.

2. Pro každou dvojici u, v prvků z universa A má existovat prvek w tak, že pokud $(u, v) \in [\![R]\!]$, pak $(v, w) \in [\![R]\!]$. Zajímají nás proto ty dvojice u, v, pro které platí $(u, v) \in [\![R]\!]$, a zjišťujeme, zda k nim vždy nalezneme $w \in A$ tak, aby $(v, w) \in [\![R]\!]$.

   (a) Nalezneme k (b, c) prvek $w \in A$ tak, aby $(c, w) \in [\![R]\!]$? Ano, stačí zvolit $w = b$.

   (b) Nalezneme k (a, b) prvek $w \in A$ tak, aby $(b, w) \in [\![R]\!]$? Ano, stačí zvolit $w = c$.

   (c) Nalezneme k (c, b) prvek $w \in A$ tak, aby $(b, w) \in [\![R]\!]$? Ano, stačí zvolit $w = c$.

   V této interpretaci je φ pravdivá.

Úloha 5. Jazyk predikátové logiky $\mathcal{L}$ je dán následující volbou symbolů:

$$\begin{aligned} &\mathsf{Pred} = \{P, Q\}, \quad ar(P) = ar(Q) = 1 \\ &\mathsf{Func} = \emptyset \\ &\mathsf{Kons} = \emptyset \end{aligned}$$

Uvažujte sentenci φ:

$$\varphi = \forall x (P(x) \Rightarrow Q(x)).$$

1. Rozhodněte, zda je φ splnitelná.

2. Rozhodněte, zda je φ tautologie.

Řešení. Postupně vyřešíme obě podúlohy.

1. Sentence φ je splnitelná, jelikož umíme nalézt její model. To jest, umíme nalézt interpretaci jazyka $\mathcal{L}$, v níž je φ pravdivá.

   Uvažujme například interpretaci I s tříprvkovým universem

   $$U = \{u, v, w\}$$

   a zadané predikátové symboly interpretujme následovně:

   $$[\![P]\!] = \{u\}, \qquad [\![Q]\!] = \{u, v\}.$$

   Mírně neformálně je jasné, proč je formule φ v interpretaci I pravdivá. Můžeme ji totiž přečíst jako tvrzení

   „Pro každý prvek platí: pokud má tento prvek vlastnost P, pak má i vlastnost Q.“

   Ještě kratčeji můžeme formuli přečíst takto:

   „Každý prvek mající vlastnost P má vlastnost Q.“

   To je zjevně pravda: v naší interpretaci má jediný prvek universa U vlastnost P, a to je prvek u. (Platí $u \in [\![P]\!]$.) Prvek u má ale i vlastnost Q. (Platí $u \in [\![Q]\!]$.) Ostatní prvky universa U vlastnost P nemají, není proto třeba zjišťovat, zda mají vlastnost Q.

   Ukažme formálněji, že formule φ je v naší interpretaci pravdivá. Uvažujme prázdný kontext proměnných

   $$\epsilon : \emptyset \to U.$$

   Formule φ je v kontextu ϵ pravdivá, pokud je formule

   $$P(x) \Rightarrow Q(x)$$

   pravdivá v každém updatu $\epsilon[x := d]$ kontextu ϵ (kde d je prvkem U).

   (a) Zjistíme, zda je $P(x) \Rightarrow Q(x)$ pravdivá v kontextu $\epsilon[x := u]$. Pokud platí $[\![P]\!]([\![x]\!]_{\epsilon[x:=u]})$, pak musí platit $[\![Q]\!]([\![x]\!]_{\epsilon[x:=u]})$. Jinými slovy, pokud $u \in [\![P]\!] = \{u\}$, pak musí platit $u \in [\![Q]\!] = \{u, v\}$. Předpoklad i závěr implikace je splněn, proto je implikace v kontextu $\epsilon[x := u]$ pravdivá.

(b) Zjistíme, zda je $P(x) \Rightarrow Q(x)$ pravdivá v kontextu $\epsilon[x := v]$. Pokud platí $[\![P]\!]([\![x]\!]_{\epsilon[x:=v]})$, pak musí platit $[\![Q]\!]([\![x]\!]_{\epsilon[x:=v]})$. Jinými slovy, pokud $v \in [\![P]\!] = \{u\}$, pak musí platit $v \in [\![Q]\!] = \{u, v\}$. Předpoklad implikace splněn není, závěr implikace splněn je, proto je implikace v kontextu $\epsilon[x := v]$ pravdivá.

(c) Zjistíme, zda je $P(x) \Rightarrow Q(x)$ pravdivá v kontextu $\epsilon[x := w]$. Pokud platí $[\![P]\!]([\![x]\!]_{\epsilon[x:=w]})$, pak musí platit $[\![Q]\!]([\![x]\!]_{\epsilon[x:=w]})$. Jinými slovy, pokud $w \in [\![P]\!] = \{u\}$, pak musí platit $w \in [\![Q]\!] = \{u, v\}$. Předpoklad ani závěr implikace splněn není, implikace je proto v kontextu $\epsilon[x := v]$ pravdivá.

Formule $P(x) \Rightarrow Q(x)$ je pravdivá ve všech updatech kontextu ϵ, formule $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$ je proto v interpretaci I pravdivá.

Všimněte si, že jsme naši interpretaci zvolili celkem zvláštně. Universum je konečné, predikátové symboly jsme interpretovali zdánlivě nahodile a beze smyslu. To je nám umožněno díky tomu, že pojem interpretace je velmi obecný. Tato obecnost se nám nyní hodila: nemuseli jsme vymýšlet nikterak složitá universa typu množiny přirozených čísel a lámat si hlavu s tím, jak na této (nekonečné) množině interpretovat predikátové symboly. Interpretace je zkonstruována „na míru“ zadané sentenci tak, aby v ní daná sentence platila.

Zkuste promyslet, že i interpretace s universem $U = \{u, v\}$, kde $[\![P]\!] = \{u\}$ a $[\![Q]\!] = \{u\}$, je modelem sentence φ. Vymyslíte ještě „úspornější“ model sentence φ?

2. Sentence φ není tautologie, jelikož umíme nalézt interpretaci jazyka $\mathcal{L}$, v níž je φ nepravdivá.

   Tentokrát si zesložiťme práci a zkonstruujme interpretaci I s universem $U = \mathbb{N}$. Jak interpretovat predikátové symboly P a Q? Potřebujeme, aby v interpretaci I formule φ *nebyla* pravdivá. Co „tvrdí“ φ, pokud je naším universem $\mathbb{N}$?

   > „Každé přirozené číslo mající vlastnost P má vlastnost Q.“

   Je na nás přijít na interpretaci symbolů P a Q tak, aby věta výše byla nepravdivá. Volme například takto:

   $$[\![P]\!] = \{n \in \mathbb{N} \mid n > 15\}, \quad [\![Q]\!] = \{2 \cdot k \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

To jest, $[\![P]\!]$ je množina čísel větších než 15, $[\![Q]\!]$ je množina sudých přirozených čísel. Je každé přirozené číslo, které je větší než 15, sudé? Určitě ne, uvažujme například číslo 17. Formálněji, sentence φ není v interpretaci I pravdivá, jelikož pro prázdný kontext ϵ

$$\epsilon : \emptyset \to U$$

existuje update $\epsilon[x := d]$, pro který je formule $P(x) \Rightarrow Q(x)$ *nepravdivá*. Konkrétně pro kontext

$$\begin{aligned} \epsilon[x := 17] : \mathsf{Var} &\to U \\ x &\mapsto 17 \end{aligned}$$

je formule $P(x)$ pravdivá a $Q(x)$ nepravdivá: platí $[\![x]\!]_{\epsilon[x:=17]} = 17 \in [\![P]\!]$, ale naopak $[\![x]\!]_{\epsilon[x:=17]} = 17 \notin [\![Q]\!]$ (17 není sudé číslo).

Kdybychom chtěli vymyslet „menší“ interpretaci (interpretaci, jejíž universum by mělo méně prvků), stačilo by dokonce volit $U = \{u\}$, $[\![P]\!] = \{u\}$, $[\![Q]\!] = \emptyset$. Zkuste si rozmyslet, že ani v této interpretaci není φ pravdivá.

Úloha 6. Jazyk predikátové logiky $\mathcal{L}$ je dán následující volbou symbolů:

$$\begin{aligned} \mathsf{Pred} &= \{S\}, \quad ar(P) = 1 \\ \mathsf{Func} &= \{+\}, \quad ar(+) = 2 \\ \mathsf{Kons} &= \emptyset \end{aligned}$$

Dovolme si mírnou relaxaci syntaxe a zapisujme funkční symbol $+$ infixně, nikoli prefixně. To znamená, jsou-li t_1 a t_2 termy, píšeme $t_1 + t_2$ místo formálně správného $+(t_1, t_2)$.

1. Rozhodněte, zda je splnitelná množina sentencí

$$S = \{\forall x \forall y (x + y = y + x),\ \forall x (S(x) \Rightarrow S(x + x))\}$$

2. Rozhodněte, zda je sentence

$$\varphi = \neg \exists x (x + x = x)$$

sémantickým důsledkem množiny sentencí S.

Řešení. Jednotlivé podúlohy vyřešíme postupně.

1. Množina S splnitelná je. Důkazem budiž interpretace I, jejímž universem je $\mathbb{N}$ (připomeňme, že pro nás je i 0 přirozené číslo),

   $$[\![S]\!] = \{2 \cdot k \mid k \in \mathbb{N}\},$$

   funkční symbol $+$ interpretujeme jako obvyklé sčítání přirozených čísel. Pak sentence

   $$\forall x \forall y (x + y = y + x)$$

   v interpretaci I platí, jelikož je sčítání přirozených čísel komutativní, a sentence

   $$\forall x (S(x) \Rightarrow S(x + x))$$

   v I platí, protože je pravdivé tvrzení

   „Pro každé přirozené číslo n platí, že pokud je n sudé, pak je i $n + n$ sudé."

   Přívětivěji řečeno,

   „Součet každého sudého čísla se sebou samým je zase sudé číslo."

2. Sentence φ není sémantickým důsledkem množiny sentencí S. To můžeme dokonce ukázat na interpretaci I, kterou jsme zvolili výše. V této interpretaci je totiž množina sentencí S pravdivá, ale sentence φ nikoli. Jak je to možné? Ukážeme, že v I je pravdivá sentence

   $$\exists x (x + x = x),$$

   a proto její negace musí být nepravdivá.

   Abychom ukázali, že je $\exists x (x + x = x)$ v I pravdivá, stačí nalézt přirozené číslo n, pro které platí rovnost $n + n = n$. Takovým číslem je 0.

   Rozmyslete si, jak byste dokazovali pravdivost sentence $\exists x (x + x = x)$ pomocí kontextů proměnných.

Úloha 7. Jazyk predikátové logiky $\mathcal{L}$ je dán následující volbou symbolů:

$$\begin{aligned}\mathsf{Pred} &= \{R\}, \quad ar(R) = 2\\ \mathsf{Func} &= \emptyset\\ \mathsf{Kons} &= \emptyset\end{aligned}$$

Mějme tři sentence

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \forall x R(x,x)\\ \varphi_2 &= \forall x \forall y (R(x,y) \Rightarrow R(y,x))\\ \varphi_3 &= \forall x \forall y \forall z ((R(x,y) \wedge R(y,z)) \Rightarrow R(x,z))\end{aligned}$$

Ukažte, že žádná z daných třech sentencí není sémantickým důsledkem ostatních dvou.

Řešení. Zde jsou řešení daných třech úloh: všechna ověření ponecháváme na čtenářce a čtenáři.

1. $\varphi_1, \varphi_2 \nvDash \varphi_3$, což dokazuje interpretace $U = \{a,b,c\}$ a
$$[\![R]\!] = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,a),(b,c),(c,b)\}.$$
2. $\varphi_2, \varphi_3 \nvDash \varphi_1$, což dokazuje interpretace $U = \{a,b,c\}$ a
$$[\![R]\!] = \{(a,a),(b,b),(a,b),(b,a)\}.$$
3. $\varphi_1, \varphi_3 \nvDash \varphi_2$, což dokazuje interpretace $U = \{a,b,c\}$ a
$$[\![R]\!] = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,c),(a,c)\}.$$

Úloha 8. Ať φ, ψ a χ jsou sentence nějakého jazyka predikátové logiky.

1. Pokud $\varphi \vDash \psi$, je nutně pravda, že $\neg\varphi \nvDash \psi$?
2. Pokud $\varphi \wedge \chi \vDash \psi$, je nutně pravda, že $\varphi \vDash \psi$ a $\chi \vDash \psi$?
3. Pokud $\varphi \vDash \psi$ nebo $\chi \vDash \psi$, je nutně pravda, že $\varphi \vee \chi \vDash \psi$?

Řešení. Dané tři úlohy postupně vyřešíme:

1. Ne. Pokud je ψ tautologie, je důsledkem libovolné množiny sentencí.

2. Ne. Například pokud $\chi = \neg\varphi$ a ψ je libovolná kontradikce, platí $\varphi \wedge \chi \vDash \psi$, neboť $\varphi \wedge \chi = \varphi \wedge \neg\varphi$ je kontradikce. Současně ale nemůže platit $\varphi \vDash \psi$ a $\chi \vDash \psi$, neboť alespoň jedna ze sentencí φ a χ není kontradikce. (Rozveďte dopodrobna argumenty v tomto řešení zadané úlohy, dokud nebudete zcela přesvědčeni o jejich korektnosti a o tom, že k řešení stačí.)

3. Ne. Například pro sentence $\varphi = \forall x P(x)$, $\chi = \forall x \neg P(x)$ a $\psi = \exists x P(x)$ platí $\varphi \vDash \psi$, ale $\varphi \vee \chi \vDash \psi$ neplatí. (Proč?)

Úloha 9. Jazyk predikátové logiky $\mathcal{L}$ je dán následující volbou symbolů:

$$\begin{aligned} \mathsf{Pred} &= \{P, Q, R, S\}, \quad ar(P) = ar(Q) = ar(R) = 1, \quad ar(S) = 2 \\ \mathsf{Func} &= \emptyset \\ \mathsf{Kons} &= \emptyset \end{aligned}$$

Ukažte, že následující množiny sentencí jsou splnitelné.

1. $A = \{\forall x \neg S(x,x),\ \exists x P(x),\ \forall x \exists y S(x,y),\ \forall x (P(x) \Rightarrow \exists y S(y,x))\}$
2. $B = \{\forall x \neg S(x,x),\ \forall x \exists y S(x,y),\ \forall x \forall y \forall z ((S(x,y) \wedge S(y,z)) \Rightarrow S(x,z))\}$
3. $C = \{(\forall x (P(x) \vee Q(x))) \Rightarrow \exists y R(y),$
   $\forall x (R(x) \Rightarrow Q(x)),\ \exists y (\neg Q(y) \wedge P(y))\}$
4. $D = \{\exists x S(x,x),\ \forall x \forall y (S(x,y) \Rightarrow (x = y))\}$

Řešení. Pokusím se nalézt „malé“ modely daných množin sentencí. Pečlivě zdůvodněte, proč jsou mé interpretace modely daných množin sentencí. Rozmyslete si, zda v některých případech neexistuje i menší model (to jest, model s menším počtem prvků v universu).

1. $U = \{a, b\}$, $[\![P]\!] = \{a, b\}$, $[\![S]\!] = \{(a,b), (b,a)\}$.
2. $U = \mathbb{N}$, $[\![P]\!] = \{1, 3, 7\}$, $[\![S]\!] = \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \mid a < b\}$.
3. $U = \{u, v, w\}$, $[\![P]\!] = \{u\}$, $[\![Q]\!] = \{v\}$, $[\![R]\!] = \emptyset$.
4. $U = \{a, b\}$, $[\![P]\!] = \emptyset$, $[\![S]\!] = \{(a,a)\}$.