LGR — Pokročilé úlohy na přirozenou dedukci

Tento dokument obsahuje pouze částečná řešení zadaných úloh: formalisaci vět z přirozeného jazyka. Důkazy budou přidány později.

Úloha 1. Jazyk $\mathcal{L}$ je dán následující volbou symbolů:

$$\begin{aligned}
\mathsf{Pred} &= \{Pes, Vyje, Ma, Kocka, Mys, PSS\}, \\
&\quad ar(Pes, Vyje, Kocka, Mys, PSS) = 1 \\
&\quad ar(Ma) = 2 \\
\mathsf{Func} &= \emptyset, \\
\mathsf{Kons} &= \{jan\}
\end{aligned}$$

- Formalisujte v jazyce $\mathcal{L}$ predikátové logiky následující věty přirozeného jazyka:

  φ_1: Všichni psi vyjí.

  φ_2: Kdokoli, kdo má kočku, nemá žádnou myš.

  φ_3: Kdo má problémy se spaním, nemá nic, co vyje.

  φ_4: Jan má kočku nebo psa.

  φ_5: Pokud má Jan problémy se spaním, nemá žádné myši.

- Přirozenou dedukcí rozhodněte, zda platí logický důsledek

$$\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\} \vdash \varphi_5.$$

Řešení. Předvedeme jednu možnou formalisaci daných vět.

φ_1: $\forall x(Pes(x) \Rightarrow Vyje(x))$

φ_2: $\forall x\,(\exists y\,(Kocka(y) \wedge Ma(x,y)) \Rightarrow \neg\exists z\,(Mys(z) \wedge Ma(x,z)))$

φ_3: $\forall x\,(PSS(x) \Rightarrow \neg\exists y\,(Vyje(y) \wedge Ma(x,y)))$

φ_4: $\exists x\,(Ma(jan,x) \wedge (Kocka(x) \vee Pes(x)))$

φ_5: $PSS(jan) \Rightarrow \neg\exists x\,(Ma(jan,x) \wedge Mys(x))$

Úloha 2. Formalisujte ve vhodně zvoleném jazyce $\mathcal{L}$ predikátové logiky následující věty přirozeného jazyka, a výsledné formule označte $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, jak je naznačeno vždy nalevo od zadané věty:

φ_1 Každý člověk má právo sníst cokoli, co je hloupější než některý vepř.

φ_2 Pašík je vepř chytřejší než jakékoli nemluvně.

φ_3 Každý člověk má právo sníst jakékoli nemluvně.

Dokažte, že z formulí φ_1, φ_2 logicky plyne formule φ_3.

Řešení. Náš jazyk $\mathcal{L}$ je dán následující volbou symbolů:

$$\begin{aligned}
\mathsf{Pred} &= \{Clovek, Vepr, Nemluvne, MPS, Hloupejsi\},\\
&\quad ar(Clovek, Vepr, Nemluvne) = 1\\
&\quad ar(MPS, Hloupejsi) = 2\\
\mathsf{Func} &= \emptyset,\\
\mathsf{Kons} &= \{pasik\}
\end{aligned}$$

Předvedeme jednu možnou formalisaci daných vět.

φ_1: $\forall x\,(Clovek(x) \Rightarrow \forall y\,((\exists z(Vepr(z) \wedge Hloupejsi(y,z))) \Rightarrow MPS(x,y)))$

φ_2: $Vepr(pasik) \wedge \forall x(Nemluvne(x) \Rightarrow Hloupejsi(x,pasik))$

φ_3: $\forall x(Clovek(x) \Rightarrow \forall y(Nemluvne(y) \Rightarrow MPS(x,y)))$

Úloha 3. Formalisujte ve vhodně zvoleném jazyce $\mathcal{L}$ predikátové logiky následující věty přirozeného jazyka, a výsledné formule označte $\varphi_1, \ldots, \varphi_7$, jak je naznačeno vždy nalevo od zadané věty:

φ_1: Každý, kdo kupuje kila mrkve, vlastní králíka nebo obchod.

φ_2: Každý pes honí nějakého králíka.

φ_3: Marie kupuje kila mrkve.

φ_4: Každý, kdo vlastní králíka, nenávidí cokoli, co honí jakéhokoli králíka.

φ_5: Jan vlastní psa.

φ_6: Jakmile někdo nenávidí něco, co vlastní někdo další, bude s ním odmítat chodit. (Pro každého x, který nenávidí y, které je vlastněno nějakým z, platí, že x bude odmítat chodit se z.)

φ_7: Pokud Marie nevlastní obchod, bude odmítat chodit s Janem.

Predikát „kupovat kila mrkve“ můžete deklarovat jako unární. Dokažte, že z formulí $\varphi_1, \ldots, \varphi_6$ logicky plyne formule φ_7.

Řešení. Náš jazyk $\mathcal{L}$ je dán následující volbou symbolů:

$$\begin{aligned}
&\mathsf{Pred} = \{Kralik, Pes, Obchod, KKM, Vlastni, Nenavidi, Honi, OdmitaChoditS\},\\
&\qquad ar(Kralik, Pes, Obchod, KKM) = 1\\
&\qquad ar(KKM, Vlastni, Nenavidi, Honi, OdmitaChoditS) = 2\\
&\mathsf{Func} = \emptyset,\\
&\mathsf{Kons} = \{jan, marie\}
\end{aligned}$$

Předvedeme jednu možnou formalisaci daných vět.

φ_1: $\forall x(KKM(x) \Rightarrow \exists y((Kralik(y) \vee Obchod(y)) \wedge Vlastni(x, y)))$

φ_2: $\forall x(Pes(x) \Rightarrow \exists y(Kralik(y) \wedge Honi(x, y)))$

φ_3: $KKM(marie)$

φ_4: $\forall x(\exists y(Kralik(y) \wedge Vlastni(x, y)) \Rightarrow \forall z(\exists k(Kralik(k) \wedge Honi(z, k)) \Rightarrow Nenavidi(x, z)))$

φ_5: $\exists x(Pes(x) \wedge Vlastni(jan, x))$

φ_6: $\forall x \forall y \forall z((Nenavidi(x, y) \wedge Vlastni(z, y)) \Rightarrow OdmitaChoditS(x, z))$

φ_7: $(\neg \exists x(Obchod(x) \wedge Vlastni(marie, x))) \Rightarrow OdmitaChoditS(marie, jan)$

Úloha 4. Formalisujte ve vhodně zvoleném jazyce $\mathcal{L}$ predikátové logiky následující věty přirozeného jazyka, a výsledné formule označte $\varphi_1, \ldots, \varphi_7$, jak je naznačeno vždy nalevo od zadané věty:

φ_1: Každý, kdo vynikne na zkoušce, poctivě studuje, je génius nebo má štěstí.

φ_2: Každý, kdo dostane A, vynikne na zkoušce.

φ_3: Žádný student OI nemá štěstí.

φ_4: Každý, kdo pije pivo, nestuduje.

φ_5: Pokud každý student OI dostane A, pak je každý student OI, který pije pivo, génius.

Dokažte, že z formulí $\varphi_1, \ldots, \varphi_4$ logicky plyne formule φ_5.

Řešení. Náš jazyk $\mathcal{L}$ je dán následující volbou symbolů:

$$\begin{aligned} \mathsf{Pred} &= \{VNZ, PS, Genius, MS, DA, OI, PP\}, \\ ar(VNZ, PS, Genius, MS, DA, OI, PP) &= 1 \mathsf{Func} \qquad = \emptyset, \\ \mathsf{Kons} &= \emptyset \end{aligned}$$

Předvedeme jednu možnou formalisaci daných vět.

φ_1: $\forall x(VNZ(x) \Rightarrow ((PS(x) \vee Genius(x)) \vee MS(x)))$

φ_2: $\forall x(DA(x) \Rightarrow VNZ(x))$

φ_3: $\neg\exists x(OI(x) \wedge MS(x))$

φ_4: $\forall x(PP(x) \Rightarrow \neg PS(x))$

φ_5: $(\forall x(OI(x) \Rightarrow DA(x))) \Rightarrow (\forall x((OI(x) \wedge PP(x)) \Rightarrow Genius(x)))$

Úloha 5. Přirozenou dedukcí ukažte, že platí následující důsledek.

$$\begin{aligned} \forall x(S(x) \Rightarrow \forall y(K(y) \Rightarrow V(x,y))), \\ \exists x(K(x) \wedge \forall y(O(y) \Rightarrow V(x,y))), \\ \forall x \forall y \forall z((V(x,y) \wedge V(y,z)) \Rightarrow V(x,z)) \\ \vdash \forall x(S(x) \Rightarrow \forall y(O(y) \Rightarrow V(x,y))). \end{aligned}$$

(*Každý slon váží více než jakýkoli kůň. Nějaký kůň váží více, než jakýkoli osel. Vážit více je transitivní vztah. Proto jakýkoli slon váží více než jakýkoli osel.*)

Můžete předpokládat, že pracujeme s jazykem predikátové logiky, ve kterém jsou všechny výše napsané řetězce sentencemi.

Úloha 6. Přirozenou dedukcí ukažte, že platí následující důsledek.

$$\forall x(K(x) \Rightarrow Z(x)) \vdash \forall x(\exists y(K(y) \wedge O(x,y)) \Rightarrow \exists y(Z(y) \wedge O(x,y)))$$

(*Koně jsou zvířata. Proto ocas koně je ocasem zvířete.*)

Můžete předpokládat, že pracujeme s jazykem predikátové logiky, ve kterém jsou všechny výše napsané řetězce sentencemi.