

# Teorie grafů

## Silná souvislost

# Obsah

- 1 **Orientované grafy**
  - Silně souvislé grafy
  - Prohledávání grafu do hloubky a do šířky
  - Hledání silně souvislých komponent

# Silně souvislé grafy

## Definice

Orientovaný graf je *silně souvislý*, pokud pro každé dva jeho vrcholy  $u$ ,  $v$  existuje orientovaná cesta z  $u$  do  $v$  (a tudíž i zpět).

## Tvrzení

Orientovaný graf je silně souvislý, právě když je souvislý a každá jeho hrana leží v nějakém cyklu.

# Silně souvislé grafy

## Definice

Každý maximální podgraf grafu  $G$ , který je silně souvislý, se nazývá *komponenta silné souvislosti* grafu  $G$  (nebo také *silně souvislá komponenta*).

## Poznámka

Komponenta silné souvislosti je jednoznačně určena množinou svých vrcholů, je to podgraf indukovaný danou množinou vrcholů. Budeme se silně souvislými komponentami pracovat podle potřeby jako s množinami vrcholů nebo jako s podgrafy.

# Silně souvislé grafy

## Definice

Nechť  $G = (V, E)$  je orientovaný graf. **Kondenzace grafu**  $G$  je orientovaný graf  $G_{kon} = (V_{kon}, E_{kon})$ , kde

- $V_{kon}$  je množina všech silně souvislých komponent grafu  $G$ ,
- pro  $K_1 \neq K_2$  je  $(K_1, K_2) \in E_{kon}$  právě tehdy, když existují vrcholy  $u, v \in V$ ,  $u \in K_1$ ,  $v \in K_2$  a  $(u, v) \in E$ .

# Silně souvislé grafy

## Tvrzení

Kondenzace grafu je vždy acyklický graf.

## Poznámka

*Zdrojová komponenta* orientovaného grafu  $G$  je komponenta, která je v kondenzaci  $G_{kon}$  zdrojem ( $d_{in}(K) = 0$ ) a *výlevková komponenta* je v kondenzaci  $G_{kon}$  výlevkou ( $d_{out}(K') = 0$ ). Každý orientovaný graf má zdrojovou i výlevkovou komponentu.

# Prohledávání grafu

Vsuvka: Jak najít komponenty souvislosti neorientovaného grafu?

Pro hledání komponent souvislosti grafu můžeme použít prohledávání grafu do hloubky nebo do šířky.

- Prohledávání grafu do hloubky (DFS = depth first search) z vrcholu  $r$  - jde po větvi co nejdále, pak se vrací a hledá odbočky, navštívené vrcholy dává do zásobníku;
- Prohledávání grafu do šířky (BFS = breadth first search) z vrcholu  $r$  - najde nejdříve všechny sousedy vrcholu  $r$ , pak sousedy sousedů atd., navštívené vrcholy dává do fronty;

Strom prohledávání z vrcholu  $r$  je tvořen všemi nalezenými vrcholy spolu s hranami, které byly použity k jejich prvnímu nalezení.

# Prohledávání grafu

## Pozorování

Pro prohledávání grafu do hloubky nebo do šířky platí:

- Strom prohledávání s kořenem  $r$  obsahuje všechny vrcholy dostupné z vrcholu  $r$ . Vrcholy stromu prohledávání s kořenem  $r$  tvoří komponentu souvislosti grafu obsahující vrchol  $r$ .
- Pokud prohledávání opakujeme z dosud nenavštíveného vrcholu  $r'$ , bude strom prohledávání opět obsahovat všechny vrcholy dostupné z vrcholu  $r'$ , tedy komponentu souvislosti obsahující vrchol  $r'$ .
- Opakovaným prohledáváním nalezneme postupně všechny komponenty souvislosti.



# Prohledávání grafu

## Prohledání grafu do hloubky či do šířky z vrcholu $r$

Vstup: Neorientovaný graf  $G = (V, E)$ , vrchol  $r \in V$ .

Výstup: Strom  $T_r = (V_r, E_r)$  cest z vrcholu  $r$  do všech dostupných vrcholů.

Datové struktury: Pole  $N$  délky  $n = |V|$ , kde  $N(v) = true$ , pokud byl vrchol  $v$  již navštíven. Pole  $P$  délky  $m = |E|$ , kde  $P(e) = true$ , pokud byla hrana  $e$  již použita. Zásobník  $S$  (pro DFS) či fronta  $Q$  (pro BFS).

# Prohledávání grafu

## Prohledání grafu do hloubky z vrcholu $r$

(inicializace)

- for all  $v \in V$  do  $N(v) \leftarrow false$  enddo
- for all  $e \in E$  do  $P(e) \leftarrow false$  enddo
- $S \leftarrow \emptyset$

(procedura) DFS( $r$ )

- vlož  $r$  do zásobníku  $S$ ,  $N(r) \leftarrow true$
- $V_r \leftarrow \{r\}$ ,  $E_r \leftarrow \emptyset$

# Prohledávání grafu

- while  $S \neq \emptyset$  do
  - $v \leftarrow \text{top}(S)$  (to nezmění  $S$ !)
  - if existuje nepoužitá hrana  $e = \{v, w\}$  then
    - vyber hranu  $e = \{v, w\}$ , pro níž je  $P(e) = \text{false}$
    - $P(e) \leftarrow \text{true}$
    - if  $N(w) = \text{false}$  then
      - vlož  $w$  do zásobníku  $S$ ,  $N(w) \leftarrow \text{true}$
      - $V_r \leftarrow V_r \cup \{w\}$ ,  $E_r \leftarrow E_r \cup \{e = \{v, w\}\}$  endif
    - else odstraň  $v = \text{top}(S)$  ze zásobníku  $S$  endif
    - enddo
  - output  $T_r = (V_r, E_r)$

# Prohledávání grafu

## Prohledání grafu do šířky z vrcholu $r$

Procedura  $\text{BFS}(r)$  vypadá stejně, pouze navštívené vrcholy dává do fronty  $Q$ .

Strom prohledávání do šířky z vrcholu  $r$  obsahuje nejkratší cesty z  $r$  do dostupných vrcholů, co do počtu hran.

## Poznámka

Pro orientované grafy vypadají procedury  $\text{DFS}(r)$  a  $\text{BFS}(r)$  stejně, pouze hrany jsou orientované  $e = (v, w)$ .

# Prohledávání grafu

## Hledání komponent souvislosti

Vstup: Neorientovaný graf  $G = (V, E)$ .

Výstup: Komponenty souvislosti, resp. množiny jejich vrcholů.

(inicializace)

- for all  $v \in V$  do  $N(v) \leftarrow false$  enddo
- for all  $e \in E$  do  $P(e) \leftarrow false$  enddo
- $i \leftarrow 0$ ,  $S \leftarrow \emptyset$  (resp.  $Q \leftarrow \emptyset$ )

(hledání komponent souvislosti)

- while 'existuje nenavštívený vrchol' do
  - $r \leftarrow v$ , kde  $N(v) = false$
  - DFS( $r$ ) (resp. BFS( $r$ ))
  - $i \leftarrow i + 1$ ,  $K_i \leftarrow V_r$  enddo
- output  $K_1, \dots, K_i$

# Prohledávání grafu

## Časová náročnost

Označme opět  $m$  počet hran,  $n$  počet vrcholů grafu.

Prohledávání grafu do hloubky nebo do šířky z vrcholu  $r$  trvá čas  $O(m)$ , po každé hraně stromu prohledávání projdeme jednou směrem vpřed (a pomyslně podruhé při návratu u DFS).

Prohledání celého grafu, tudíž i nalezení komponent souvislosti vyžaduje čas  $O(m + n)$ .

# Silně souvislé komponenty

Jak najít komponenty silné souvislosti orientovaného grafu?

## Pozorování

Pro hledání silně souvislých komponent orientovaného grafu použijeme také prohledávání do hloubky nebo do šířky, ale situace bude komplikovanější.

- Strom prohledávání s kořenem  $r$  obsahuje všechny vrcholy orientovaně dostupné z vrcholu  $r$ , nemusí z nich však existovat orientované cesty zpět do  $r$ . Strom prohledávání se může rozpadnout na více silně souvislých komponent.
- Silně souvislá komponenta obsahující vrchol  $r$  je podmnožinou množiny vrcholů stromu prohledávání s kořenem  $r$ .

# Silně souvislé komponenty

## Pozorování

- Pokud prohledávání opakujeme z dosud nenavštíveného vrcholu  $r'$ , nemusíme získat strom všech vrcholů orientovaně dostupných z vrcholu  $r'$  (některé už mohly být navštíveny z vrcholu  $r$ ). Strom prohledávání bude obsahovat pouze vrcholy orientovaně dostupné z vrcholu  $r'$  v podgrafu ještě nenavštívených vrcholů.
- Silně souvislá komponenta obsahující vrchol  $r'$  je podmnožinou množiny vrcholů stromu prohledávání s kořenem  $r'$ .



# Silně souvislé komponenty

## Tvrzení

Pokud vrchol  $r$  patří do výlevkové komponenty orientovaného grafu, pak strom prohledávání do hloubky nebo do šířky obsahuje vrcholy jediné silně souvislé komponenty (té, v níž leží vrchol  $r$ ).

## První myšlenka algoritmu

Prohledat orientovaný graf z vrcholu ve výlevkové komponentě, najdeme tím právě tuto silně souvislou komponentu. Když ji z grafu vyhodíme, bude mít vzniklý podgraf opět výlevkovou komponentu, najdeme ji prohledáním z libovolného vrcholu v ní. Postup můžeme opakovat, dokud nenajdeme všechny silně souvislé komponenty. Ovšem jak najít vrchol ve výlevkové komponentě???

# Silně souvislé komponenty

## Tvrzení

Pokud vrchol  $r$  patří do výlevkové komponenty orientovaného grafu, pak strom prohledávání do hloubky nebo do šířky obsahuje vrcholy jediné silně souvislé komponenty (té, v níž leží vrchol  $r$ ).

## První myšlenka algoritmu

Prohledat orientovaný graf z vrcholu ve výlevkové komponentě, najdeme tím právě tuto silně souvislou komponentu. Když ji z grafu vyhodíme, bude mít vzniklý podgraf opět výlevkovou komponentu, najdeme ji prohledáním z libovolného vrcholu v ní. Postup můžeme opakovat, dokud nenajdeme všechny silně souvislé komponenty. Ovšem jak najít vrchol ve výlevkové komponentě???

# Silně souvislé komponenty

## Obohacené prohledávání do hloubky

Lze efektivně najít vrchol ve zdrojové komponentě pomocí DFS:

- Při prohledání celého orientovaného grafu do hloubky je kořen posledního stromu prohledávání ve zdrojové komponentě.
- Kořen posledního stromu je vrchol, který jsme zpracovali, opustili jako poslední. Obohatíme prohledávání do hloubky o číslování vrcholů ve chvíli, kdy je opouštíme, tj. když už z nich nevede nepoužitá hrana. První zpracovaný vrchol má nejnižší číslo, poslední zpracovaný vrchol má nejvyšší číslo. Případně můžeme vrcholy při opouštění vkládat do jiného zásobníku  $Z$ .

# Silně souvislé komponenty

## Tvrzení

Při prohledávání orientovaného grafu do hloubky s číslováním opouštěných vrcholů vedou všechny mezikomponentové hrany z vrcholu s vyšším číslem opouštění do vrcholu s nižším číslem opouštění (aneb v zásobníku  $Z$  směrem od vrcholu ke dnu).

## Poznámka

Pro acyklický graf tak získáme inverzní očíslování k topologickému očíslování vrcholů.

# Silně souvislé komponenty

## Tvrzení

Při prohledávání orientovaného grafu do hloubky s číslováním opouštěných vrcholů vedou všechny mezikomponentové hrany z vrcholu s vyšším číslem opouštění do vrcholu s nižším číslem opouštění (aneb v zásobníku  $Z$  směrem od vrcholu ke dnu).

## Poznámka

Pro acyklický graf tak získáme inverzní očíslování k topologickému očíslování vrcholů.

# Silně souvislé komponenty

## Tvrzení

Nechť  $G = (V, E)$  je orientovaný graf. Vytvořme orientovaný graf  $G^{op} = (V, E^{op})$ , který má opačně orientované hrany.

- $G$  a  $G^{op}$  mají stejné komponenty silné souvislosti.
- Zdrojová komponenta v  $G$  je výlevkovou komponentou v  $G^{op}$  a naopak.

Aneb silně souvislé komponenty můžeme místo v  $G$  hledat v  $G^{op}$ . Vrcholy výlevkových komponent grafy  $G^{op}$  budou vrcholy zdrojových komponent grafu  $G$  a najdeme je přes obohacené DFS.

# Silně souvislé komponenty

## Tvrzení

Nechť  $G = (V, E)$  je orientovaný graf. Vytvořme orientovaný graf  $G^{op} = (V, E^{op})$ , který má opačně orientované hrany.

- $G$  a  $G^{op}$  mají stejné komponenty silné souvislosti.
- Zdrojová komponenta v  $G$  je výlevkovou komponentou v  $G^{op}$  a naopak.

Aneb silně souvislé komponenty můžeme místo v  $G$  hledat v  $G^{op}$ . Vrcholy výlevkových komponent grafy  $G^{op}$  budou vrcholy zdrojových komponent grafu  $G$  a najdeme je přes obohacené DFS.

# Silně souvislé komponenty

## Kosarajův - Sharirův algoritmus

Vstup: Orientovaný graf  $G$ .

Výstup: Silně souvislé komponenty grafu  $G$ .

- 1 Prohledáme graf  $G$  do hloubky a zapamatujeme si pořadí, ve kterém jsme je opouštěli. Např. je dáváme při opouštění do zásobníku  $Z$ , výstupem první části je zásobník  $Z$ .
- 2 V grafu  $G$  obrátíme hrany, dostaneme graf  $G^{op}$ .
- 3 Prohledáme graf  $G^{op}$  do hloubky (nebo do šířky) a za kořeny stromů prohledávání bereme vždy nenavštívený vrchol z topu zásobníku  $Z$  (od nejvyššího čísla opouštění).
- 4 Vrcholy stromů druhého prohledávání jsou pak vrcholy jednotlivých silně souvislých komponent.



# Silně souvislé komponenty

## Korektnost algoritmu

- Terminace - prohledávání do hloubky (či do šířky) skončí
- Parciální korektnost - při druhém prohledávání platí invariant:  
"Kořen každého stromu prohledávání je ve výlevkové komponentě podgrafu grafu  $G^{op}$  indukovaného dosud nenavštívenými vrcholy."  
Tudíž vrcholy stromu prohledávání tvoří silně souvislou komponentu grafu  $G$ . (Důkaz plyne z předchozích tvrzení.)

# Silně souvislé komponenty

## Kosarajův - Sharirův algoritmus

Vstup: Orientovaný graf  $G = (V, E)$ , kde pro každý vrchol  $v$  je zadán seznam  $A(v)$  hran s počátečním vrcholem  $v$ .

Výstup: Komponenty silné souvislosti, resp. množiny jejich vrcholů.

Datové struktury: Pole  $N$  délky  $n = |V|$ , kde  $N(v) = true$ , pokud byl vrchol  $v$  již navštíven. Pole  $P$  délky  $m = |E|$ , kde  $P(e) = true$ , pokud byla hrana  $e$  již použita.

Zásobník  $S$  (pro DFS) či fronta  $Q$  (pro BFS), zásobník  $Z$ .

# Silně souvislé komponenty

## Kosarajův - Sharirův algoritmus

(Prohledej  $G$  do hloubky a zapamatuj si časy opuštění vrcholů.)

- for all  $v \in V$  do  $N(v) \leftarrow false$  enddo
- for all  $e \in E$  do  $P(e) \leftarrow false$  enddo
- $S \leftarrow \emptyset, Z \leftarrow \emptyset$
- while existuje nenavštívený vrchol do
  - $r \leftarrow v$ , kde  $N(v) = false$
  - DFS( $r$ ), který je v else-větvi (tj. když už neexistuje nepoužitá hrana z vrcholu  $v$ ) obohacený o příkaz "vlož vrchol  $v$  do zásobníku  $Z$ "
  - enddo (výstupem této části je zásobník  $Z$ )

(Otoč hrany grafu  $G$  a vytvoř tak  $G^{op}$ , zadaný seznamy  $B(v)$ .)

- for all  $e = (v, w) \in E$  do  $B(w) \leftarrow B(w) \cup \{e' = (w, v)\}$  enddo

## Silně souvislé komponenty

(Prohledej  $G^{op} = (V, E^{op})$  do hloubky, resp. do šířky, přitom kořeny stromů ber z topu zásobníku  $Z$ .)

- for all  $v \in V$  do  $N(v) \leftarrow false$  enddo
- for all  $e \in E^{op}$  do  $P(e) \leftarrow false$  enddo
- $i \leftarrow 0, S \leftarrow \emptyset$  (resp.  $Q \leftarrow \emptyset$ )
- while  $Z \neq \emptyset$  do
  - if  $N(top(Z)) = false$  then
    - $r \leftarrow top(Z)$
    - DFS( $r$ ) (resp. BFS( $r$ ))
    - $i \leftarrow i + 1, K_i \leftarrow V_r$  endif
  - odstraň  $top(Z)$  ze zásobníku  $Z$  enddo

(Vrcholy stromů prohledávání jsou silně souvislé komponenty.)

- output  $K_1, \dots, K_i$

# Silně souvislé komponenty

## Časová náročnost

Kosarajův - Sharirův algoritmus na hledání silně souvislých komponent v podstatě udělá dvakrát prohledávání grafu (poprvé nutně do hloubky). Potřebný čas je  $O(m + n)$ , kde  $m$  je počet hran,  $n$  je počet vrcholů grafu.

# Orientované grafy

## Literatura

- J. Demel: Grafy a jejich aplikace, Academia, 2015.
- J. Matoušek, J. Nešetřil: Kapitoly z diskrétní matematiky, Nakladatelství Karolinum, 2000.
- M. Dostál: Cvičení k přednášce LGR (najdete v nich důkazy některých tvrzení z přednášky a mnoho dalších příkladů).