

**Jméno a příjmení:**

**Podpis:**

Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, papíry, na které zkoušku vypracováváte, pravidla přirozené dedukce, psací potřeby a občerstvení.

Vše ostatní dejte do tašky, tašku zavřete a odložte, mobilní telefon mějte vypnutý.

### Požadavky na vypracování

- Pište na bílé (nečtverečkové, nelinkované) jednotlivé listy papíru formátu A4 a pište propiskou výrazné barvy (tmavě modrá, černá). Nepoužívejte obyčejnou tužkou ani červenou barvu.
- Každý příklad začínejte na nové straně papíru (straně, nikoli listu). U každé úlohy uveďte jen jeden způsob řešení.
- Svá tvrzení řádně zdůvodňujte. U každého výpočtu je třeba komentář.

**Úloha 1 (10 bodů)** Ukažte, že jakékoli dvě nejdelší cesty v souvislém grafu mají společný vrchol. (*Cesta v grafu je nejdelší, pokud v daném grafu neexistuje žádná delší cesta. V grafu může existovat více nejdelších cest, pak ale mají nutně stejnou délku.*)

**Úloha 2 (10 bodů)** Dokažte, že v každém stromu s alespoň dvěma vrcholy existují alespoň dva vrcholy stupně 1.

**Úloha 3 (10 bodů)** Sestrojte pro každé přirozené  $k > 1$  prostý graf, který má  $2k$  vrcholů, každý vrchol má stupeň  $k$ , a nejkratší kružnice v něm má délku 4 (obsahuje 4 hrany).

*(Pečlivě popište strukturu grafu. Pojmenujte vrcholy a přesně popište, které dvojice vrcholů jsou spojeny hranou. Důkladně argumentujte, že ve vašem grafu nejsou kružnice délky kratší než 4.)*