7. Rekurze, spojový seznam

BAB37ZPR – Základy programování

Stanislav Vítek

Katedra radioelektroniky
Fakulta elektrotechnická
České vysoké učení v Praze

Přehled témat

- Část 1 – Rekurze
- Část 2 – Spojový seznam
  - Spojový seznam
  - Implementace v Pythonu

Část I

Rekurze

Rekurze

- **Rekurze** = odkaz na sama sebe, definice za pomoci sebe sama
- **Rekurzivní funkce** = funkce volá sama sebe (i nepřímo)
- Je to hlavně způsob přemýšlení o řešení problémů
  - Řešení problému za pomoci řešení jednodušší varianty téhož problému
  - O menší instance se nemusíme příliš starat, musíme ale dodržovat **pravidla**
- Obvykle elegantní × je potřeba hlídat efektivitu

Rekurze bývá paměťově náročná.

Pravidla pro správné použití rekurze

1. Dostatečně jednoduché vstupy musíme vyřešit přímo.
2. Rekurzivní volání musí být v nějakém smyslu jednodušší než je aktuální problém.

Příklad: Umocňování

Přímá definice

$$x^n = \Pi_{i=1}^{n} x = \underbrace{x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}_{n\text{-krát}}$$

Rekurzivní definice

$$x^0 = 1$$
$$x^{n+1} = x\,x^n \qquad \text{for } n > 0$$

Anatomie rekurze

- Základní / bázový případ *(base case)*
- Převedení problému na jednodušší
- Odkaz na sebe / Rekurzivní volání

Příklad: Umocňování – implementace (1/2)

- iterativně

```
def power_iterative(x,n):
  prod=1.0
  for i in range(n): prod*=x
  return prod
```

```
>>> power_iterative(2.0,10)
1024.0
```

- rekurzivně

```
def power_recursive(x,n):
  if n<=0: return 1.0
  return x*power_recursive(x,n-1)
```

```
>>> power_recursive(2.0,10)
1024.0
```

Příklad: Umocňování – implementace (2/2)

- přímočará verze

```
def power_recursive(x,n):
  if n<=0:
    return 1.0
  return x*power_recursive(x,n-1)
```

- stručnější verze

```
def power_recursive2(x,n):
  return x*power_recursive2(x,n-1) if n>0 else 1.0
```

Volte verzi, která je pro vás čitelnější.

Odbočka: Volání funkcí

Co už víme o tom, jak probíhá volání funkcí?

- Zásobník volání (call stack)
  - hodnoty lokálních proměnných a parametrů
  - návratová adresa (kam se máme vrátit)

Vztah rekurze a iterace

- každý rekurzivní program je možno přepsat jako iterativní za pomoci zásobníku
- (explicitní) zásobník zde simuluje zásobník volání funkcí
  - hodnoty lokálních proměnných
  - kde jsme byli (v původní funkci)
- často, ale ne vždy, se dá zjednoduši

Příklad: součet pole

```
def sum_array(a):
  s=0
    for x in a:
      s+=x
  return s
```

```
>>> a=[68, 0, 61, 34, 2, 51, 29, 10, 5, 45]
>>> sum_array(a)
305
```

Šlo by to napsat bez cyklu?

Příklad: součet pole – rekurzivně

```
def sum_array_recursive(a):
  if len(a)==0:
    return 0
  return a[0]+sum_array_recursive(a[1:])
```

```
>>> a=[68, 0, 61, 34, 2, 51, 29, 10, 5, 45]
>>> sum_array_recursive(a)
305
```

Nepřímá rekurze

- rekurzivní funkce se nemusí volat přímo, ale i skrz jinou funkci

```
def even(num):
  print("even", num)
  odd(num-1)

def odd(num):
  print("odd", num)
  if num>1:
    even(num-1)
```

```
>>> even (3)
even 3
odd 2
even 1
odd 0
```

Každý cyklus lze nahradit rekurzí (1/2)

- Iterativní verze

```
def count_to(n):
  for i in range(1,n+1): print(i, end=" ")
count_to(5)
```

```
1 2 3 4 5
```

- Rekurzivní verze

```
def count_to_recursive(n):
  count_to_recursive_inner(n,1)
def count_to_recursive_inner(n,i):
  if i<=n: print(i, end=" ")
  count_to_recursive_inner(n,i+1)
count_to_recursive(5)
```

```
1 2 3 4 5
```

Každý cyklus lze nahradit rekurzí (2/2)

- rekurzivně s vnitřní funkcí

```
def count_to_recursive2(n):
  def count_to_recursive_inner(i):
    if i<=n:
      print(i, end=" ")
      count_to_recursive_inner(i+1)
  count_to_recursive_inner(1)
count_to_recursive2(5)
```

```
1 2 3 4 5
```

Vnitřní funkce

```
def count_to_recursive2(n):
  def count_to_recursive_inner(i):
    if i<=n:
      print(i)
      count_to_recursive_inner(i+1)
  count_to_recursive_inner(1)
```

+ Skrytí soukromých funkcí
+ Sdílení proměnných vnější funkce
– Nemožnost znovupoužití
– Nemožnost samostatného odladění

Porušení pravidel

- Co se stane?

```
def wrong1(num):
  return num*wrong1(num-1)
#
def wrong2(num):
  if num<=1:
    return num

  return 1+wrong1(num)
#
def wrong3(num):
  if num > 1000:
    return 1000
  return 1+wrong3(num)
```

Recursion Error

- Velikost zásobníku volání je typicky nějak omezena
- V Pythonu implicitně na 1000 volání, dá se změnit
- Překročení limitu zásobníku volání je chyba
- V Pythonu `Recursion Error`

jinde též stack overflow

- znamená to, že nemáme při programování používat rekurzi?
- **NE!** znamená to, že ji máme používatrozumně
- nezapomeňte, že rekurze je i způsob přemýšlení

Příklad: Řetězec pozpátku (1/2)

- Iterativně

```
def reverse_iterative(s):
  r="" # result
  for i in range(len(s)-1,-1,-1):
    r+=s[i]
  return r
print(reverse_iterative("dobry vecer"))
```

```
recev yrbod
```

Příklad: Řetězec pozpátku (2/2)

- Rekurzivně

```
def rev_rec1(s):
  if len(s)==0:
    return ""
  return rev_rec1(s[1:])+s[0]
print(rev_rec1("dobry vecer"))
```

- Kratší verze

```
def rev_rec2(s):
  return "" if  s=="" else rev_rec2(s[1:])+s[0]
print(rev_rec2("dobry vecer"))
```

- Pythonská verze

```
print("dobry vecer"[::-1])
```

Příklad: Číselné soustavy (1/4)

Převeď číslo `n` v soustavě se základem `b` na řetězec.

- $5_{10} = 101_2$ protože $1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 5$.
- Pokud $b > 10$ používáme A = 10, B = 11, ...
- Např. $2016_{10} = 7E0_{16}$ protože $7 \cdot 16^2 + 14 \cdot 16^1 + 0 \cdot 16^0 = 2016$

Myšlenka řešení

- Pokud `n < b` pak vrať číslici odpovídající `n`.
- Jinak
  - Najdi `n // b` v soustavě `b`.
  - Přidej nakonec číslici odpovídající `n % b`

Příklad: Číselné soustavy (2/4)

- vrať `n` jako řetězec v číselné soustavě se základem `base`.

```
def to_str(n, base):
  assert(n>=0)
  cislice = "0123456789ABCDEF"
  if n < base:
    return cislice[n]
  return to_str(n // base, base) + cislice[n % base]
print(to_str(5,2))
```

```
101
```

```
print(to_str(2016,16))
```

```
7E0
```

Příklad: Číselné soustavy (3/4)

- Nerekurzivní řešení
  - Každé rekurzivní řešení je možné napsat bez rekurze

    Ale může to být těžké.
  - Nutnost zapamatovat si lokální proměnné v jednotlivých voláních

    Například v zásobníku (stack).

```
def to_str_nonrecursive(n,base):
  cislice = "0123456789ABCDEF"
  stack=[n] # hodnoty n
  n//=base
  while n>0:
    stack+=[n]
    n//=base
  result=""
  for m in stack[::-1]:
    result+=cislice[m % base]
  return result
```

Příklad: Číselné soustavy (4/4)

- Nerekurzivní řešení bez zásobníku

```
def to_str_nonrecursive2(n,base):
  assert(n>=0)
  cislice="0123456789ABCDEF"
  result=""
  while True:
    result=cislice[n % base]+result
    n//=base
    if n==0: break
  return result
```

  - Přidávání na začátek řetězce je pomalé (lineární).
  - Skrytě kvadratický algoritmus.

Permutace

Problém

Vytiskni všechny permutace prvků dané množiny `M`.

Myšlenka řešení

- Vezmi každý prvek m_i z `M`.
  - Najdi všechny permutace prvků $M \backslash \{m_i\}$
  - Ke každé na začátek přidej m_i

Permutace – implementace

```
def tisk_permutaci(m):
""" Vytiskne vsechny permutace prvku v 'm' """
  tisk_permutaci_acc(m,"")
# acc - retezec pridavany na zacatek
def tisk_permutaci_acc(m,acc):
  if len(m)==0:
    print(acc,end=", ")
  else:
    for i in range(len(m)):
      tisk_permutaci_acc(m[:i]+m[i+1:],acc+m[i]+" ")
tisk_permutaci(["a","b","c","d"])
```

```
a b c d , a b d c , a c b d , a c d b , a d b c , a d c b ,
b a c d , b a d c , b c a d , b c d a , b d a c , b d c a ,
c a b d , c a d b , c b a d , c b d a , c d a b , c d b a ,
d a b c , d a c b , d b a c , d b c a , d c a b , d c b a ,
```

Příklad: Mince

Problém

Vypiš všechny způsoby, jak zaplatit x Kč mincemi.
Hodnoty mincí $h = \{50, 20, 10, 5, 2, 1\}$ Kč.

Myšlenka řešení

- Vyber největší minci $h_i \leq x$. Pak jsou dvě možnosti:
  - Použij h_i — zaplať $x - h_i$ pomocí $h_i, h_{i+1}, \ldots, h_n$ a přidej jednu h_i.
  - Nepoužij h_i — zaplať x pomocí $h_{i+1}, \ldots, h_n$

Příklad: Mince – implementace 1/3

- Vytiskni všechny možné způsoby, jak zaplatit x Kč.

```
def zaplat(x):
  h=[50,20,10,5,2,1] # hodnoty minci sestupne
  def doplat(x,m,i):
    """ m - kolik zaplaceno v poctech minci
        i - kterou minci zacit """
    if x==0:
      vytiskni_platbu(m,h)
    else:
      if x>=h[i]: # zaplať minci h[i]
        doplat(x-h[i],m[:i]+[m[i]+1]+m[i+1:],i)
      if i<len(h)-1: # zaplať menšími, lze-li
        doplat(x,m,i+1)
  doplat(x,len(h)*[0],0) # zacatek fce zaplat
```

Příklad: Mince – implementace 2/3

```
def vytiskni_platbu(m,h):
  """ m - pocty minci, h - hodnoty """
  for j in range(len(h)):
    if m[j]>0:
      print("%3d*%3dKc" % (m[j],h[j]), end="")
  print("")
```

Příklad: Mince – implementace 3/3)

```
>>> zaplat(12)
1* 10Kč  1*  2Kč
1* 10Kč  2*  1Kč
2*  5Kč  1*  2Kč
2*  5Kč  2*  1Kč
1*  5Kč  3*  2Kč  1*  1Kč
1*  5Kč  2*  2Kč  3*  1Kč
1*  5Kč  1*  2Kč  5*  1Kč
1*  5Kč  7*  1Kč
6*  2Kč
5*  2Kč  2*  1Kč
4*  2Kč  4*  1Kč
3*  2Kč  6*  1Kč
2*  2Kč  8*  1Kč
1*  2Kč 10*  1Kč
12*  1Kč
```

Příklad: Mince – rychlejší varianta 1/2

```
def zaplat2(x):
  h=[50,20,10,5,2,1] # hodnoty minci sestupne
  def doplat(x,m,i):
    """ m - kolik zaplaceno v poctech minci
      i - kterou minci zacit """
    if x==0:
      vytiskni_platbu(m,h)
    else:
      if x>=h[i]: # zaplat minci h[i]
        m[i]+=1
        doplat(x-h[i],m,i)
        m[i]-=1  # úklid
      if i<len(h)-1: # zaplat mensimi
        doplat(x,m,i+1)
  doplat(x,len(h)*[0],0)
```

Příklad: Mince – rychlejší varianta 2/2

```
>>> zaplat2(12)
1* 10Kč  1*  2Kč
1* 10Kč  2*  1Kč
2*  5Kč  1*  2Kč
2*  5Kč  2*  1Kč
1*  5Kč  3*  2Kč  1*  1Kč
1*  5Kč  2*  2Kč  3*  1Kč
1*  5Kč  1*  2Kč  5*  1Kč
1*  5Kč  7*  1Kč
6*  2Kč
5*  2Kč  2*  1Kč
4*  2Kč  4*  1Kč
3*  2Kč  6*  1Kč
2*  2Kč  8*  1Kč
1*  2Kč 10*  1Kč
12*  1Kč
```

Část II

Spojový seznam

II. Spojový seznam

Spojový seznam

- V programech je velmi běžný požadavek na uchování seznamu (množiny) prvků (proměnných/struktur)
- Základní kolekce je **pole**
  - Jedná se o kolekci položek (proměnných) stejného typu
  + Umožňuje jednoduchý přístup k položkám indexací prvku

    Položky jsou stejného typu (velikosti).
  – Velikost pole je určena při vytvoření pole
    - Velikost (maximální velikost) musí být známa v době vytváření
    - Změna velikost v podstatě není přímo možná

      Nutné nové vytvoření (alokace paměti), resp. realloc.
    - Využití pouze malé části pole je mrháním paměti
  - V případě řazení pole přesouváme položky
    - Vložení prvku a vyjmutí prvku vyžaduje kopírování

Odbočka: Pole v Pythonu?

- V Pythonu obvykle pracujeme se seznamem...
- Přesto i zde existuje datový typ pole

O datovém typu pole budeme ještě mluvit v souvislosti s knihovnou numpy.

```
>>> import array from array
>>> a = array('l', [1, 2, 3, 4])
>>> type(a)
<class 'array.array'>
>>> a[1]
2
>>> for i in range(len(a)):
        print(a[i], end=" ")

1 2 3 4
```

https://docs.python.org/3/library/array.html

Seznam

- Seznam (proměnných nebo objektů) patří mezi základní datové struktury

Základní ADT – Abstract Data Type

- Seznam zpravidla nabízí sadu základních operací:
  - `insert()` – vložení prvku
  - `remove()` – odebrání prvku
  - `index_of()` – vyhledání prvku
  - `size()` – aktuální počet prvku v seznamu
- Implementace seznamu může být různá:
  - Pole
    - Indexování je velmi rychlé
    - Vložení prvku na konkrétní pozici může být pomalé

Nová alokace a kopírování.

  - Spojové seznamy

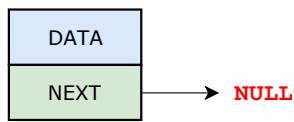
Spojové seznamy

- Datová struktura realizující seznam dynamické délky
- Každý prvek seznamu obsahuje
  - Datovou část (hodnota proměnné / objekt / ukazatel na data)
  - Odkaz (ukazatel) na další prvek v seznamu

NULL v případě posledního prvku seznamu.

- První prvek seznamu se zpravidla označuje jako **head** nebo **start**.

Realizujeme jej jako ukazatel odkazující na první prvek seznamu.



Základní operace se spojovým seznamem

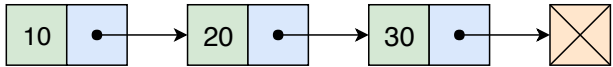
- Vložení prvku
  - Předchozí prvek odkazuje na nový prvek
  - Nový prvek může odkazovat na předchozí prvek, který na něj odkazuje

  Obousměrný spojový seznam.
- Odebrání prvku
  - Předchozí prvek aktualizuje hodnotu odkazu na následující prvek
  - Předchozí prvek tak nově odkazuje na následující hodnotu, na kterou odkazoval odebíraný prvek
- Základní implementací spojového seznamu je tzv.

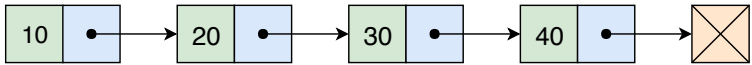
jednosměrný spojový seznam

Jednosměrný spojový seznam

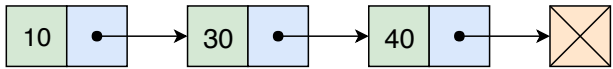
- Příklad spojového seznamu pro uložení číselných hodnot



- Přidání prvku 40 na konec seznamu



- Odebrání prvku 20 ze seznamu



1. Nejdříve sekvenčně najdeme prvek s hodnotou 30

   Prvek, na který odkazuje NEXT odebíraného prvku.

2. Následně vyjmeme a napojíme prvek 10 na prvek 30

   Hodnotu NEXT prvku 10 nastavíme na adresu prvku 30.

II. Spojový seznam

Reprezentace uzlu

```
class Node:   # uzel
  def __init__(self,data):
    self.data = data
    self.next = None # odkaz na dalsi uzel
```

Spojový seznam jako zásobník

```
class ListStack:   # seznam
  def __init__(self):
    self.head = None
  def is_empty(self):
    return self.head is None
  def push(self,item):
    node=Node(item)
    node.next=self.head
    self.head=node
  def pop(self):
    item=self.head.data
    self.head=self.head.next
    return item
  def peek(self):
    return self.head.data
```

linkedliststack.py

Spojový seznam jako zásobník – příklad

```
from linkedliststack import ListStack
s = ListStack()
s.push(1)
s.push(2)
print(s.pop(), s.pop(), end=" ")
```

```
2 1
```

```
s.push(10)
print(s.pop())
```

```
10
```

```
print(s.is_empty()) # True
```

linkedlist_examples.py

Spojový seznam jako fronta 1/2

```
from linkedliststack import Node,ListStack
class ListQueue(ListStack):   # zdědíme ListStack
  def __init__(self):
    self.head = None
    self.last = None # last item
    self.count = 0
  def pop(self):          # odeber ze začátku
    item=self.head.data
    self.head=self.head.next
    if self.head is None:
      self.last=None
      self.count-=1
    return item
  def dequeue(self):
    return self.pop()
```

Spojový seznam jako fronta 2/2

```
def push(self,item):   # přidej na začátek
  node=Node(item)
  node.next=self.head
  if self.head is None:
    self.last=node
    self.head=node
    self.count+=1
def enqueue(self,item): # přidej na konec
  node=Node(item)
  if self.head is None: # seznam je prázdný
    self.head=node
    self.last=node
  else:
    self.last.next=node
    self.last=node
    self.count+=1
```

linkedlistqueue.py

Spojový seznam jako fronta – příklad

```
from linkedlistqueue import ListQueue
q=ListQueue()
q.enqueue(1)
q.enqueue(2)
q.enqueue(3)
print(q.dequeue(), q.dequeue(), end = " ")
```

```
1 2
```

```
q.enqueue(10)
print(q.dequeue())
```

```
3
```

```
print(q.is_empty()) # False
```

linkedlist_examples.py

Procházení prvků pole

- Doplníme do třídy `ListQueue` metody:

```
def iter(self,f):
""" execute f(x) for all 'x' in the queue """
  node=self.head
  while node is not None:
    f(node.data)
    node=node.next

def reduce(self,f,acc):
""" execute acc=f(x,acc) for all 'x' in the queue """
  node=self.head
  while node is not None:
    acc=f(node.data,acc)
    node=node.next
  return acc
```

linkedlistqueue.py

Konverze na pole a z pole

- Doplníme do třídy `ListQueue` metodu:

```
def to_array(self):
  a=[]
  self.iter(lambda x: a.append(x))
  return a
```

- Funkce pro vytvoření seznamu z pole

```
def array_to_queue(a):
  q=ListQueue()
    for x in a:
      q.enqueue(x)
  return q
```

linkedlistqueue.py

Příklady

```
from linkedlistqueue import ListQueue,array_to_queue
q=array_to_queue([4,2,7,3])
print(q.reduce(max,0))
```

```
7
```

```
print(q.reduce(lambda x,acc: acc+x,0))
```

```
16
```

```
print(q.to_array())
```

```
[4, 2, 7, 3]
```

Vyhledávání v seznamu

- Metoda třídy `ListQueue`, složitost $O(n)$

```
def contains(self,x):
""" returns True if the list contains element x """
  node=self.head
  while node is not None:
    if node.data==x:
      return True
    node=node.next
  return False
q=array_to_queue([3,52,69,17,19])
print(q.contains(17))
```

```
  True
```

```
print(q.contains(20))
```

```
  False
```

Mazání v seznamu 1/2

- Metoda třídy `ListQueue`:

```
def remove(self,x):
""" removes an element x, if present """
  node=self.head
  prev=None
  while node is not None:
    if node.data==x:
      if prev is None:
        self.head=node.next
        if self.head is None:
          self.last=None
    else:
      prev.next=node.next
  prev=node
  node=node.next
```

linkedlistqueue.py

Mazání v seznamu 2/2

- Příklad

```
from linkedlistqueue import ListQueue,array_to_queue
q=array_to_queue([3,2,5,8,11])
q.remove(5)
print(q.to_array())
```

```
  [3, 2, 8, 11]
```

```
q.remove(3)
print(q.to_array())
```

```
  [2, 8, 11]
```

```
q.remove(11)
print(q.to_array())
```

```
  [8, 11]
```

Uspořádaný spojový seznam – řazení

- Seznam budeme udržovat seřazený.
- Seznam lze procházet jen ‘odpředu’ (od `self.head`).
- Vkládání *(insert)* ‘dopředu’ je rychlejší.
- Prvky mohou často přicházet srovnané vzestupně *(insertion sort)*
- Seznam budeme řadit sestupně, aby větší prvky mohly zůstat ‘vpředu’.

Uspořádaný spojový seznam – vkládání

```
class OrderedList(ListQueue):
  def insert(self,x):
    newnode=Node(x); prev=None; node=self.head
    while node is not None and x<node.data:
      prev=node; node=node.next
    if node is None: # newnode patří na konec
      if self.head is None: # seznam je prázdný
        self.head=newnode
      else:
        self.last.next=newnode
      self.last=newnode
    else:
      if prev is None: # newnode patří na začátek
        self.head=newnode
      else: # newnode patří mezi prev a node
        prev.next=newnode
      newnode.next=node
    self.count+=1
```

Řazení vkládáním a spojové seznamy

```
def insertion_sort_linkedlist(a):
  """ sorts array a inplace in ascending order """
  q=OrderedList()
  for x in a:
    q.insert(x)
  for i in range(len(a)-1,-1,-1):
    a[i]=q.pop() # from the highest value
```

insertion_sort_linkedlist.py

Spojování seznamů v konstantním čase

- Doplníme do třídy `ListQueue` metodu

```
def concatenate(self,l):
  """ destruktivne pridej seznam 'l' na konec """
  if l.last is None:
    return
  if self.last is None:
    self.head=l.head
  else:
    self.last.next=l.head
  self.last=l.last
  self.count+=l.count
  l.head=None # smaž list 'l'
  l.last=None
  l.count=0
```

linkedlistqueue.py

Spojování seznamů – příklad

```
from linkedlistqueue import ListQueue,array_to_queue
q=array_to_queue([1,2,3])
r=array_to_queue([4,5])
q.concatenate(r)
print(q.to_array())
```

linkedlist_examples.py

Oboustranná fronta

Lineární datová struktura kombinující frontu a zásobník.

operace	zásob.	fronta	oboustranná fronta	spoj.sez. jedn.	spoj.sez. dvoj.
přidej na začátek	$O(1)$		$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$
přidej na konec		$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$
odeber ze začátku	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$
odeber z konce			$O(1)$	$O(n)^\sharp$	$O(1)$
iterace vpřed				ano	ano
iterace vzad					ano

začátek = `self.head`
konec = `self.last`
$^\sharp$ $O(1)$, pokud máme odkaz i na předchozí uzel.

Aplikace oboustranné fronty

- Zásobník s omezenou délkou
  - Seznam navštívených stránek v prohlížeči
  - Undo/redo operace v textovém či grafickém editoru
- Rozvrhování pro více procesorů — volné procesory mohou ‘ukrást’ proces jiným.
- Nalezení maxima všech souvislých podsekvencí dané délky.

Spojový seznamu – shrnutí

- Podporuje mnoho operací v čase $O(1)\ldots$
- $\ldots$ za cenu větších časových a paměťových nároků (konstantní faktor)
- Pomocí spojového seznamu můžeme implementovat zásobník i frontu.
- *Dvojitě zřetězený* spojový seznam umí rychle více operací (iterace vzad, vypuštění prvku uprostřed) za cenu opět větších časových a paměťových nároků (konstantní faktor).