5. Vyhledávání, řazení, složitost

BAB37ZPR – Základy programování

Stanislav Vítek

Katedra radioelektroniky
Fakulta elektrotechnická
České vysoké učení v Praze

Přehled témat

- Část 1 – Složitost
  - Empirická časová složitost
  - Teoretická časová složitost
- Část 2 – Vyhledávání
  - Motivační příklad
  - Vyhledávání v Pythonu
  - Vyhledávací algoritmy
- Část 3 – Řazení / Třídění
  - Třídění v Pythonu
  - Třídící algoritmy

Část I

Složitost algoritmů

Složitost algoritmů

- **Časová** a paměťová složitost
- Trvání výpočtu v závislosti na vstupních datech
  - v nejhorším případě, v průměru...
- Který algoritmus je lepší?
- Jak velká data jsme schopni zpracovat?
- Empirická vs. teoretická analýza

I. Složitost algoritmů

Empirická časová složitost

Teoretická časová složitost

Empirická časová složitost

- Změříme dobu běhu pro různá vstupní data
- Vyhodnocujeme algoritmus + implementace + hardware
- Kvantitativní výsledky
- Neposkytuje záruky, obtížná predikce

Příklad: Prvočísla

- Najdi všechna prvočísla menší než m
- Metody:
  1. Zkus všechny dělitele do $n-1$
  2. Zkus všechny dělitele do $\sqrt{n}$
  3. Eratosthenovo síto
  4. Eratosthenovo síto, vylepšené ($\sqrt{n}$, jen lichá)

lec04/porovnani_prvocislo.py

```
Implementation :  prvocisla_jednoduse
n=   100 CPU time=  0.001s
n=   300 CPU time=  0.004s
n=  1000 CPU time=  0.035s
n=  3000 CPU time=  0.274s
n= 10000 CPU time=  2.716s
n= 30000 CPU time= 21.899s
n=100000 CPU time=218.257s
```

Příklad: Prvočísla

- Najdi všechna prvočísla menší než m
- Metody:
  1. Zkus všechny dělitele do $n-1$
  2. Zkus všechny dělitele do $\sqrt{n}$
  3. Eratosthenovo síto
  4. Eratosthenovo síto, vylepšené ($\sqrt{n}$, jen lichá)

lec04/porovnani_prvocislo.py

```
Implementation :  prvocisla_odmocnina
n=   100 CPU time= 0.000s
n=   300 CPU time= 0.001s
n=  1000 CPU time= 0.003s
n=  3000 CPU time= 0.012s
n= 10000 CPU time= 0.063s
n= 30000 CPU time= 0.278s
n=100000 CPU time= 1.439s
```

Příklad: Prvočísla

- Najdi všechna prvočísla menší než m
- Metody:
  1. Zkus všechny dělitele do $n-1$
  2. Zkus všechny dělitele do $\sqrt{n}$
  3. Eratosthenovo síto
  4. Eratosthenovo síto, vylepšené ($\sqrt{n}$, jen lichá)

lec04/porovnani_prvocislo.py

```
Implementation :  prvocisla_eratosthenes
n=   100 CPU time= 0.000s
n=   300 CPU time= 0.000s
n=  1000 CPU time= 0.001s
n=  3000 CPU time= 0.003s
n= 10000 CPU time= 0.009s
n= 30000 CPU time= 0.027s
n=100000 CPU time= 0.095s
```

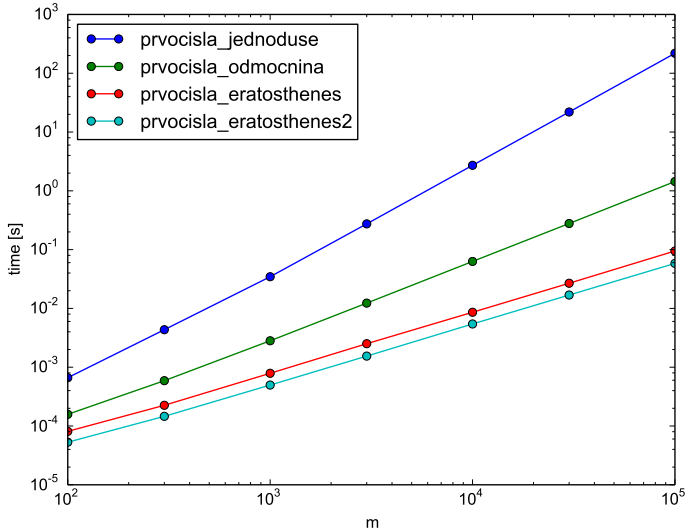
Příklad: Prvočísla

- Najdi všechna prvočísla menší než m
- Metody:
  1. Zkus všechny dělitele do $n-1$
  2. Zkus všechny dělitele do $\sqrt{n}$
  3. Eratosthenovo síto
  4. Eratosthenovo síto, vylepšené ($\sqrt{n}$, jen lichá)

lec04/porovnani_prvocislo.py

```
Implementation :  prvocisla_eratosthenes2
n=   100 CPU time= 0.000s
n=   300 CPU time= 0.000s
n=  1000 CPU time= 0.000s
n=  3000 CPU time= 0.002s
n= 10000 CPU time= 0.005s
n= 30000 CPU time= 0.017s
n=100000 CPU time= 0.058s
```

Prvočísla – graf



I. Složitost algoritmů

Empirická časová složitost

Teoretická časová složitost

Teoretická analýza časová složitosti

- Studujme funkci $T(n)$
- Velikost problému n
  - vstupní parametr
  - délka vstupních dat
  - parametrů může být více
- Čas běhu programu T
  - Ve fyzických jednotkách
  - V počtu *typických operací* – přiřazení, porovnání, sčítání, ... *(výpočetní model)*

Asymptotická časová složitost

Přesný vzorec pro $T(n)$ není nutný...

- Zajímají nás pouze kvalitativní rozdíly
- Multiplikativní konstanty zanedbáme
  - vliv počítače, programátora, programovacího jazyka...
  - vždycky si můžeme koupit rychlejší počítač
- Zajímá nás chování pro velká n
  - Rychlost růstu $T(n)$ pro $n \to \infty$
  - Pomaleji rostoucí části $T(n)$ zanedbáme

Řád růstu funkce – big-O notation

$f(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ je $O\big(g(n)\big)$ pokud existují konstanty $c > 0$ a $n_0 > 0$ takové, že $f(n) \leq cg(n)$ pro všechna $n \geq n_0$.

Pro polynomiální $f(n)$ — člen nejvyššího řádu, bez konstanty.

Příklady:

$f(n) = 456211n + 235166$ $O\big(n\big)$

$f(n) = n(n+2)/2$ $O\big(n^2\big)$

$f(n) = 442(n+12)\log n$ $O\big(n \log n\big)$

$f(n) = 4n^3 + 100n^2 + 1000n + 5000$ $O\big(n^3\big)$

$O\big(\cdot\big)$ notace je *horní odhad*, ale uvádíme ten nejlepší známý.

Tedy $f(n) = 4n^3 + 100n^2$ je nejenom $O(n^3)$, ale zároveň i $O(n^4)$ a $O(n^{10})$.

Druhy odhadů

Časová složitost typicky závisí na datech (nejen na velikosti n)

- **Průměrná složitost** *(Average complexity)*
  - složitá teoretická analýza
  - lze odhadnout z experimentů na typických datech
- **Nejhorší složitost** *(Worst-case complexity)*
  - jen experimentálně nelze
  - teoretická analýza → různě přesné horní odhady

Složitost může záležet na více parametrech vstupních dat (např. počet vstupních čísel a jejich maximální hodnota).

Složitost hledání prvočísel

```
1  for n in range(2,m): # cyklus 2..m-1
2    p=2 # začátek testu
3    while p<n:
4      if n % p == 0:
5        break
6      p+=1
7    if p==n: # n je prvočíslo
8      primes+=[p]
```

Analýza:

- Vnější `for` cyklus proběhne $m-1$-krát
- Každý vnitřní cyklus `while` proběhne max. $n-2$-krát, kde $n < m$
- Vnitřní cyklus tedy proběhne max. m^2-krát
- Složitost tohoto algoritmu je tedy $O(m^2)$

Složitost hledání prvočísel

```
1  for n in range(2,m): # cyklus 2..m-1
2    p=2 # začátek testu
3    while p<n:
4      if n % p == 0:
5        break
6      p+=1
7    if p==n: # n je prvočíslo
8      primes+=[p]
```

Poznámky:

- Operace mimo vnitřní cyklus zanedbáme.
- Toto je horní odhad. Ve skutečnosti je složitost nižší, díky příkazu `break`.

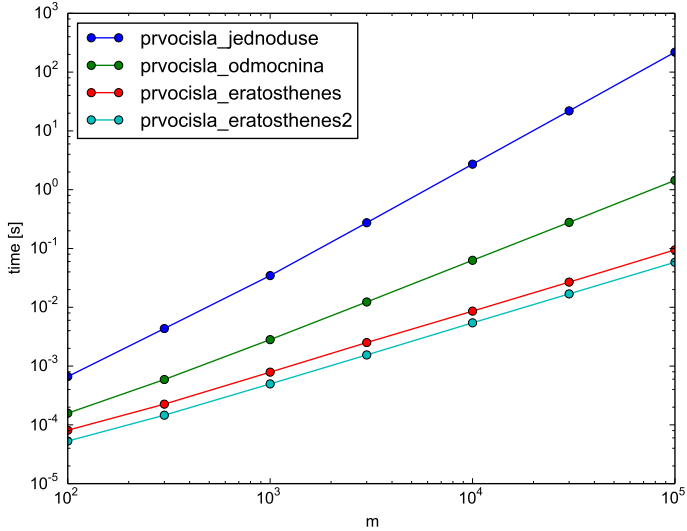
Složitost hledání prvočísel

```
1  for n in range(2,m): # cyklus 2..m-1
2    p=2 # začátek testu
3    while p<n:
4      if n % p == 0:
5        break
6      p+=1
7    if p==n: # n je prvočíslo
8      primes+=[p]
```

Analýza:

- Vnější `for` cyklus proběhne $m-1$-krát
- Vnitřní `while` cyklus proběhne max. $(\sqrt{n}-1)$-krát, kde $n < m$
- Vnitřní cyklus tedy proběhne max. $m^{1.5}$-krát
- Složitost tohoto algoritmu je tedy $O(m^{1.5})$ *(nebo lepší)*

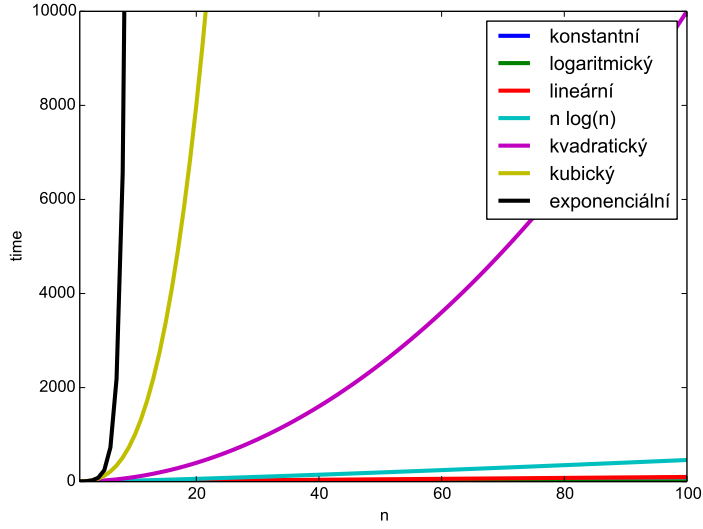
Prvočísla – graf



Srovnání složitostí

složitost		poznámka
konstantní	$O(1)$	nejrychlejší
logaritmická	$O(\log n)$	skoro jako $O(1)$, např. vyhledávání
lineární	$O(n)$	rychlé, použitelné pro velká data
	$O(n \log n)$	skoro jako $O(n)$, např. třídění
kvadratické	$O(n^2)$	trochu pomalejší, vhodné do $n \approx 10^6$
kubické	$O(n^3)$	pomalejší, vhodné do $n \lesssim 10^4$
polynomiální	$O(n^k)$	pomalé
exponenciální	$O(b^n)$	velmi pomalé, do $n \approx 50$
	$O(n!), O(n^n)$	nejpomalejší, do $n \approx 15$

Srovnání složitostí



Složitost základních operací v Pythonu

- **V konstantním čase:** `len()`, `a[i]` (indexace), `a+=[v]` (přidání na konec), `a.pop()` (smazání posledního prvku)
- **V lineárním čase:** `a+b` (spojení), `a[i:j]` (řez pole), `a.insert()` (vkládání doprostřed pole), `max()`, `sum()`...
- **V čase** $n \log n$**:** `a.sort()`

Složitost přidání prvku na konec pole je konstantní jen v průměru, nikoliv pro každou operaci.

Část II

Vyhledávání

II. Vyhledávání

Vyhledání čísla v řadě

Problém

- Myslím si přirozené číslo X mezi 1 a 1000.
- Možné otázky:
  -
  - Je X menší než N?
  - Kolik otázek potřebujete na odhalení čísla?
  - Mezi kolika čísly jste schopni odhalit skryté číslo na K otázek?

Řešení

- Metoda půlení intervalu
- K otázek: rozlišíme mezi 2^K čísly
- N čísel: potřebujeme $log_2 N$ otázek

Vyhledávání v (připravených) datech je velmi častý problém: web, slovník, ...

Konkrétní problém

Problém

- Mějme posloupnost (pole) $a_0, \ldots, a_{N-1}$
- Mějme hodnotu q
- Úkol: zjistit, zda existuje $a_i = q$

Varianty

- Výstup: ano/ne nebo pozice
- Hledání opakujeme mnohokrát pro stejné a
  - předzpracování
- Posloupnost a je setříděná.
- Stochastické hledání

Vyhledávání a logaritmus

Naivní metoda – průchod seznamu

- lineární vyhledávání, složitost $O(n)$
- pomalé (viz např. databáze s milióny záznamů)
- jen velmi krátké seznamy

Rozumná metoda – půlení intervalu

- logaritmický počet kroků (vzhledem k délce seznamu)
- složitost $O(log(n))$

II. Vyhledávání

Motivační příklad

Vyhledávání v Pythonu

Vyhledávací algoritmy

Operátor `in` 1/2

- Obsahuje pole daný prvek?

`a=[17,20,26,31,44,77,65,55,93]`

```
>>> 20 in a
True
>>> 30 in a
False
>>> 30 not in a
True
>>> 20 not in a
False
```

Operátor `in` 2/2

- `in` / `not in` funguje i pro řetězce, n-tice a podobné typy

```
>>> "omo" in "Olomouc"  # podřetězec
True
>>> "" in "Olomouc"     # prázdný řetězec
True
>>> "olo" in "Olomouc"  # rozlišuje velikost písmen
False
>>> 4 in (3,4)
True
>>> 3. in (3,4)         # na typu nezáleží
True
```

Další funkce

- Funkce `index` vrací pozici prvního výskytu prvku v seznamu

```
>>> a=[3,4,5,6,3,4,8,6,5]
>>> a.index(4)
1
```

- Funkce `count` vrací počet výskytů prvku v seznamu

```
>>> a.count(3)
2
```

- Jak najít více výskytů v seznamu? Funkce `enumerate`

```
>>> [i for i, n in enumerate(a) if n == 3]
[0, 4]
```

II. Vyhledávání

Motivační příklad

Vyhledávání v Pythonu

Vyhledávací algoritmy

Lineární vyhledávání

- Procházíme postupně `a` než narazíme na `q`

```
def sequential_search(a,q):
  """ Returns True if a contains q """
  for x in a:
    if x==q:
      return True
  return False
```

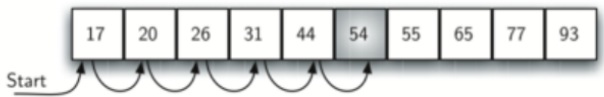


Image from Miller & Ranum: Problem solving with algothms and data structures

Lineární vyhledávání

- Procházíme postupně `a` než narazíme na `q`

```
def sequential_search(a,q):
  """ Returns True if a contains q """
  for x in a:
    if x==q:
      return True
  return False
```

- **Počet porovnání:**

	nejméně	nejvíce	průměrně
$q \notin a$	N	N	N
$q \in a$	1	N	N/2

  - Složitost $O(N)$, kde `N=len(a)`.
  - Rychleji to nejde, protože na každý prvek a_i se musíme podívat.

Binární vyhledávání

Vyhledávání v setříděné posloupnosti

- Mějme posloupnost (pole) $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_{N-1} \leq a_N$
- Mějme hodnotu q
- Úkol: zjistit, zda existuje $a_i = q$
- Je vyhledávání v setříděném poli rychlejší?

Binární vyhledávání

Hlavní myšlenky

- Postupně zmenšujeme interval indexů, kde by mohlo ležet q
- V každém kroku porovnáme q s prostředním prvkem intervalu a podle toho zvolíme jeden z podintervalů.
- Skončíme, pokud je prvek nalezen, nebo pokud je podinterval prázdný.

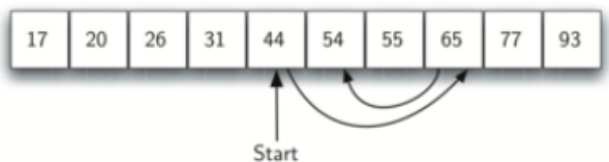


Image from Miller & Ranum: Problem solving with algothms and data structures

Binární vyhledávání – implementace

```
def binary_search(a,q):
  l=0              # first index of the subinterval
  h=len(a)-1       # last index of the subinterval
  while l<=h:
    m=(l+h)//2 # middle point
    if a[m]==q:
      return True
    if a[m]>q:
      h=m-1
    else:
      l=m+1
  return False
```

Binární vyhledávání – časová složitost

Počet porovnání

- Počet prvků v intervalu je $d = h - l + 1$ a v první iteraci $d = N$
- V každé iteraci se interval d zmenší nejméně na polovinu
- Po t iteracích je $d \leq N2^{-t}$
- Dokud algoritmus běží, musí platit $d \geq 1$,

$$1 \leq d \leq N2^{-t}$$
$$2^t \leq N \quad \Rightarrow \quad t \leq \log_2 N$$

- Počet porovnání $t \sim \log_2 N$
- Složitost $O(\log n)$
- Strategie *rozděl a panuj (Divide and conquer)*

Část III

Řazení / Třídění

Úvod

Terminologická poznámka

- anglicky "sorting algorithms"
- česky používáno: řadicí algoritmy nebo třídicí algoritmy
- řadicí vesměs považováno za "správnější"

Proč se tím zabývat

- procvičení práce se seznamy
- ilustrace algoritmického myšlení, technik návrhu algoritmů
- typický příklad drobné změny algoritmu s velkým dopadem na rychlost programu

Doporučené zdroje

- http://www.sorting-algorithms.com/
  - animace
  - kódy
  - vizualizace
- http://sorting.at/
  - elegantní animace
- více podobných: Google → sorting algorithms
- a na zpestření:
  - xkcd Ineffective Sorts: https://xkcd.com/1185/
  - Bubble-sort with Hungarian folk dance: http://www.youtube.com/watch?v=lyZQPjUT5B4

Třídění

- Mějme posloupnost (pole) $A = \left[a_0, \ldots, a_{N-1}\right]$ a relaci '$\leq$'
- Najděte takovou permutaci $B = \left[b_0, \ldots, b_{N-1}\right]$ pole A, aby $b_0 \leq b_1 \leq \cdots \leq b_{N-1}$.

Poznámky:

- Formy výstupu:
  - Třídění na místě *(in place)*
  - Vytvoření nového pole B, pole A zůstává nezměněno.
  - Najdeme indexy $j_1, j_2, \ldots, j_N$, tak aby $b_i = a_{j_i}$ (`a[j[i]]`)
- Stabilní třídění — zachovává pořadí ekvivalentních prvků.

III. Řazení / Třídění

Třídění v Pythonu

Třídící algoritmy

Funkce `sorted`

- Funkce `sorted` vrací nové setříděné pole

```
>>> a=[80,43,20,15,90,67,51]
>>> sorted(a)
[15, 20, 43, 51, 67, 80, 90]
```

- Metoda `sort` setřídí pole na místě (úspornější)

```
>>> a.sort()
>>> a
[15, 20, 43, 51, 67, 80, 90]
```

- Třídění sestupně

```
>>> sorted(a,reverse=True)
[90, 80, 67, 51, 43, 20, 15]
```

Třídění řetězců

- Lze třídit veškeré porovnatelné typy, například řetězce

```
>>> names=["Barbora","Adam","David","Cyril"]
>>> sorted(names)
['Adam', 'Barbora', 'Cyril', 'David']
```

- Třídění není podle českých pravidel

```
>>> sorted(["pan","paze"])
['pan','paze']
```

```
>>> sorted(["pán","paže"])
['paže','pán']
```

- Další možnosti

```
>>> sorted(s, key=str.lower)
>>> sorted(s, key=len)
```

Třídění *n*-tic

- *n*-tice jsou tříděny postupně podle složek

```
>>> a=[(50,2),(50,1),(40,100),(40,20)]
>>> sorted(a)
[(40, 20), (40, 100), (50, 1), (50, 2)]
```

```
>>> studenti=[("Bara",18),("Adam",20),
... ("David",15),("Cyril",25)]
>>> sorted(studenti)
[('Adam', 20), ('Bara', 18),
('Cyril', 25), ('David', 15)]
```

Uživatelská třídící `lambda` funkce 1/2

- Funkce v parametru `key` transformuje prvky pro třídění.
- Třídění podle druhé složky dvojice

```
>>> a=[(50,2),(50,1),(40,100),(40,20)]
>>> sorted(a,key=lambda x: x[1])
[(50, 1), (50, 2), (40, 20), (40, 100)]
```

```
>>> studenti=[("Bara",18),("Adam",20),
... ("David",15),("Cyril",25)]
>>> sorted(studenti,key=lambda x: x[1])
[('David', 15), ('Bara', 18),
('Adam', 20), ('Cyril', 25)]
```

Uživatelská třídící `lambda` funkce 2/2

- Třídění bez ohledu na velikost písmen

```
>>> s=["Python","Quido","abeceda","zahrada"]
>>> sorted(s)
['Python', 'Quido', 'abeceda', 'zahrada']
>>> sorted(s,key=lambda x: x.lower())
['abeceda', 'Python', 'Quido', 'zahrada']
```

- Třídění podle počtu výskytů znaku ve slově

```
>>> s = ["prase", "Kos", "ovoce", "Pes", "koza",
... "ovce", "kokos"]
>>> sorted(s,key=lambda x: x.count('o'))
['prase', 'Pes', 'Kos', 'koza', 'ovce', 'ovoce',
    'kokos']
```

Příklad – třídící funkce

```
1  from functools import cmp_to_key
3  def letter_cmp(a, b):
4    if a[1] > b[1]:
5      return -1
6    elif a[1] == b[1]:
7      if a[0] > b[0]: return 1
8      else: return -1
9    else: return 1
11 a = [('c', 2), ('b', 1), ('a', 3)]
12 a.sort(key=cmp_to_key(letter_cmp))
13 print(a)
```

```
[('a', 3), ('c', 2), ('b', 1)]
```

Příklad – unikátní prvky, nejčastější prvek 1/3

- Máme seznam prvků, např. výsledky dotazníku

Oblíbený programovací jazyk :-)

```
["Python", "Java", "C", "Python", "PHP",
"Python", "Java", "JavaScript", "C",
"Pascal"]
```

- Chceme:
  - seznam unikátních hodnot
  - nejčastější prvek

Řešení

- přímočaré: opakované procházení seznamu
- efektivní: seřadit a pak jednou projít
- elegantní: využití pokročilých datových struktur / konstrukcí

Příklad: unikátní prvky 2/3

```
1  def unique(alist):
2    alist = sorted(alist)
3    # rozdilne chovani od alist.sort() !!
4    result = []
5    for i in range(len(alist)):
6      if i == 0 or alist[i-1] != alist[i]:
7        result.append(alist[i])
8    return result
```

```
1  def unique(alist):
2    return list(set(alist))
```

Příklad: nejčastější prvek 3/3

```
1  def most_common(alist):
2    alist = sorted(alist)
3    max_value, max_count = None, 0
4    current_value, current_count = None, 0
5    for value in alist:
6      if value == current_value: current_count += 1
7      else: current_value = value; current_count = 1
8
9      if current_count > max_count:
10       max_value = current_value
11       max_count = current_count
12   return max_value
14 def most_common(alist):
15   return max(alist, key=alist.count)
```

III. Řazení / Třídění

Třídění v Pythonu

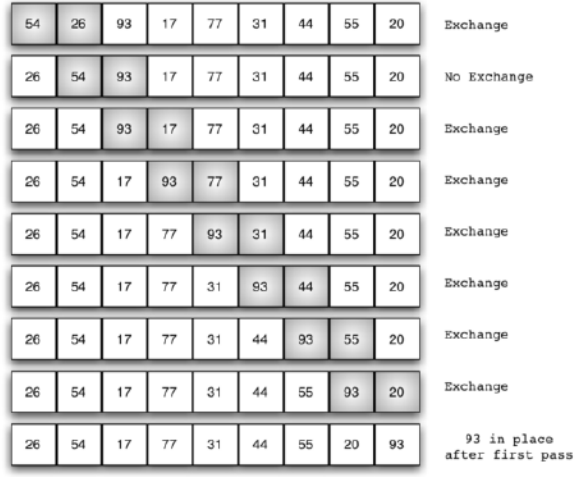
Třídící algoritmy

Třídící algoritmy

- Třídění probubláváním *(bubble sort)*
- Třídění zatřiďováním *(insertion sort)*
- Třídění výběrem *(selection sort)*
- Shell sort
- Třídění spojováním *(merge sort)*
- *Quick sort*
- `sort`, `sorted`

Řazení probubláváním – bubble sort

- Vyměňuje sousední prvky ve špatném pořadí.
- Jeden průchod.



Řazení probubláváním – implementace

```
1  def bubble_sort(a):
2    """ sorts array a in-place in ascending order"""
3    for i in range(len(a)-1,0,-1):
4      # i=n-1..1.  a[i+1:]  is already sorted
5      for j in range(i):
6        if a[j]>a[j+1]:
7          a[j],a[j+1]=a[j+1],a[j] # exchange
```

Složitost

- Vnější smyčka proběhne $N-1 \sim N$-krát
- Vnitřní smyčka proběhne vždy i-krát, kde $i < N$, tedy max. N-krát
- Počet porovnání je tedy max. N^2 $\rightarrow$ složitost $O(N^2)$
- Počet výměn je velký, element musí ‘probublat’ nakonec

Řazení probubláváním – vylepšení

- Pokud neproběhla žádná výměna, je pole setříděné.

```
1  def bubble_sort(a):
2    """ sorts array a in-place in ascending order"""
3    for i in range(len(a)-1,0,-1):
4      # i=n-1..1.  a[i+1:]  is already sorted
5      exchanged=False # exchanges in this iteration?
6      for j in range(i):
7        if a[j]>a[j+1]:
8        a[j],a[j+1]=a[j+1],a[j] # exchange
9        exchanged=True
10     if not exchanged: break
```

Třídění probubláváním – kontrola

- Testování na vzorku dat

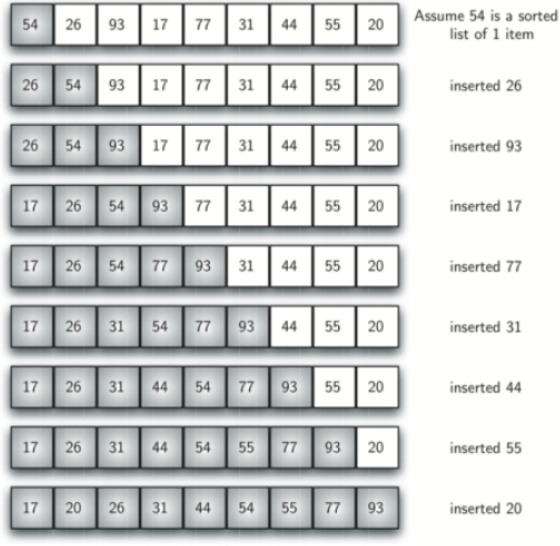
```
from sorting_experiments import *
a=[31, 60, 23, 91, 62, 65, 59, 92, 42, 74]
bubble_sort(a)
print(a)
```

- Správný test je důkladnější:

```
def test_sort(f=bubble_sort):
  for j in range(100):
    n=100
    a=[random.randrange(100000) for i in range(n)]
    f(a)
    for i in range(n-1):
      assert(a[i]<=a[i+1])
  print(f.__name__," sort test passed")
```

Třídění zatřiďováním – insertion sort

- prvek a_i zatřídíme do již setříděných $a_0, \ldots, a_{i-1}$



Třídění zatřiďováním – implementace

```
1  def insertion_sort(a):
2    """ sorts array a in-place in ascending order"""
3    for i in range(1,len(a)):    # a[0:i] is sorted
4      val=a[i]
5      j=i
6      while j>0 and a[j-1]>val:
7        a[j]=a[j-1]
8        j-=1
9        a[j]=val
```

Složitost

- Vnější smyčka proběhne $N-1 \sim N$-krát.
- Vnitřní smyčka proběhne max. $i < N$ krát.
- Počet porovnání je tedy max. N^2 → složitost $O(N^2)$.
- Nepoužívá výměny, ale posun (rychlejší).
- Přirozeně detekuje setříděné pole.

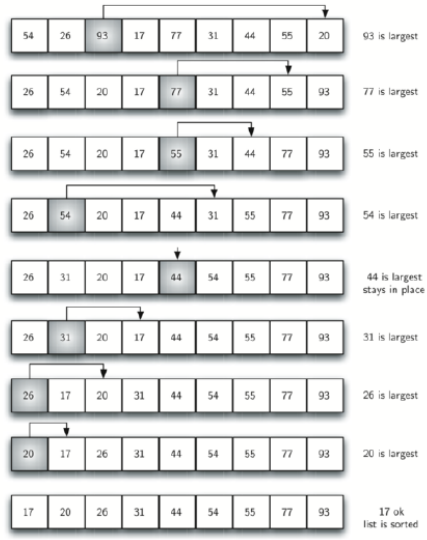
Třídění zatřiďováním – kontrola

```
from sorting_experiments import *
a=[43, 22, 42, 7, 58, 85, 48, 82, 80, 1]
insertion_sort(a)
print(a)
```

```
[1, 7, 22, 42, 43, 48, 58, 80, 82, 85]
```

Třídění výběrem – selection sort

- Vybere maximum mezi $a_0, \ldots, a_{N-1}$, to umístí do a_{N-1}.
- Vybere maximum mezi $a_0, \ldots, a_{N-2}$, to umístí do a_{N-2}...



Třídění výběrem – implementace

```
1  def selection_sort(a):
2    """ sorts array a in-place in ascending order"""
3    for i in range(len(a)-1,0,-1):
4      # find out what should go to a[i]
5      max_pos=0 # index of the maximum
6      for j in range(1,i+1):
7        if a[j]>a[max_pos]:
8          max_pos=j
9      a[i],a[max_pos]=a[max_pos],a[i]
```

Složitost

- Vnější smyčka proběhne $N-1 \sim N$-krát
- Vnitřní smyčka proběhne vždy i-krát, kde $i < N$, tedy max. N-krát
- Počet porovnání je tedy max. $N \quad \rightarrow \quad$ složitost $O(N^2)$
- Pouze jedna výměna v každé vnější smyčce

Třídění výběrem – kontrola

```
1  from sorting_experiments import *
3  a=[60, 46, 31, 69, 45, 11, 43, 14, 61, 36]
4  selection_sort(a)
5  print(a)
```

```
[11, 14, 31, 36, 43, 45, 46, 60, 61, 69]
```