
X39RSO/A4M39RSO

Integrace a syntéza obrazu pomocí metody Monte Carlo

Vlastimil Havran, ČVUT v Praze
havran@fel.cvut.cz

Osnova

- Historie
 - Výpočet integrálu metodou Monte Carlo
 - Aplikace v syntéze obrazu
 - Antialiasing
 - Zobrazovací rovnice
 - Přímé osvětlení z plošných zdrojů světla
 - Form-faktory v radiozitě
 - Vlastnosti metody Monte Carlo
 - Postupy zefektivnění metody Monte Carlo
 - Metody Quasi-Monte Carlo
-

Historie Monte Carlo (MC)

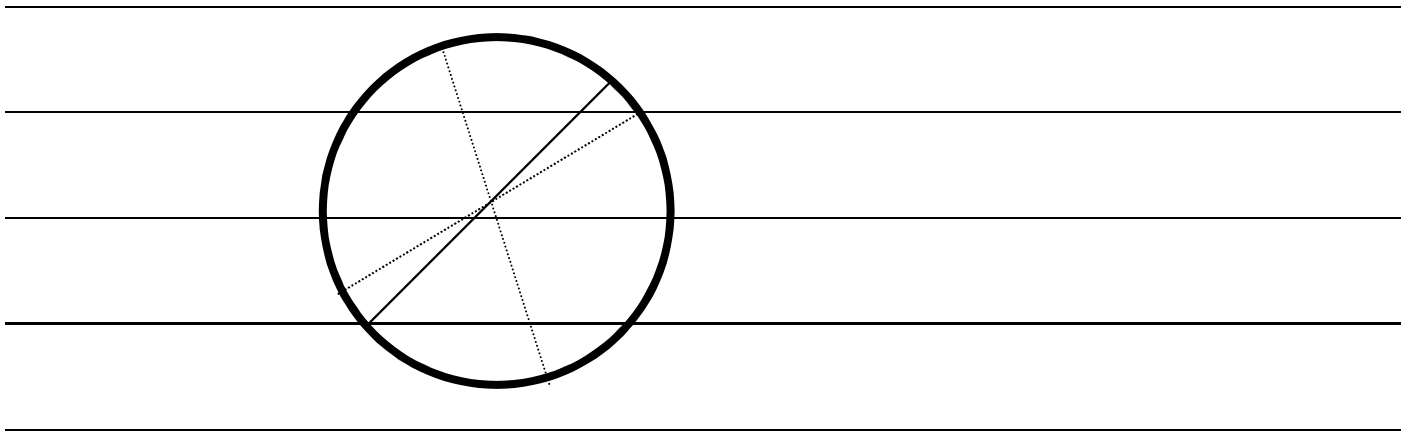
Buffon Needle Teorém – 18-té století

Vývoj atomové bomby, Los Alamos 1940, John von Neumann
a Stanislav Ulam

Rozvoj a aplikace metod od roku 1949 s využitím a rozvojem
počítačů

“Buffon Needle” teorém

- Pravděpodobnost, že hozená jehla o délce L protne systém rovnoběžek, které jsou od sebe vzdáleny d je:
$$p = 2 \cdot d / (L \cdot \pi)$$
- dá se užít k experimentálnímu zjištění hodnoty π



Metoda Monte Carlo

- Efektivní aplikace metody je podmíněna existencí výpočetní techniky
 - Řešený problém musí mít hromadný charakter a je vyhodnocen s použitím statistických metod.
 - V podstatě se jedná o diskrétní simulaci a to jak diskrétních tak i spojitých jevů – simuluje se mnoho případů daného děje, například:
 - Neurony - vznik, zánik, srážky s atomy vodíku
 - Úlohy hromadné obsluhy – chování počítačových sítí, dopravní situace
 - Sociologické a ekonomické modely – demografie, vývoj inflace, pojišťovnictví atd.
-

Integrovaní funkcí neurčených analyticky

- Kvadrurní metody výpočtu integrálu – Simpsonova metoda, vzorky na doméně integrandu jsou rozmístěny uniformně nezávisle na dimenzi problému. Kvadrurní metody integrace NEJSOU metody Monte Carlo!
 - Metody Monte Carlo – vzorky jsou rozmístěny náhodně (nebo pseudonáhodně, pokud není k dispozici fyzikální generátor náhodných čísel)
 - Speciální metody pro vzorkování domény integrandu, například Quasi-Monte Carlo, Randomized Quasi-Monte Carlo – umožňují rychlejší konvergenci = pro stejnou přesnost výsledku potřebujeme menší počet vzorků
-

Rovnice odrazu - zopakování

- Rovnice odrazu/reflectance equation *versus* zobrazovací rovnice/rendering equation
- “Kolik světla je odraženo do směru ω_o , je-li bod \mathbf{x} osvětlen ze všech příchozích směrů?”
- Integrál přes všechny příchozí směry
 - hemisféra $H(\mathbf{x})$ – pouze odraz nebo lom
 - sféra Ω – lom i odraz
- Pro výpočet obrazu rovnice vypočítávána rekurzivně

$$L_o(\mathbf{x}, \omega_o) = L_e(\mathbf{x}, \omega_o) + \int_{\Omega} L_i(\mathbf{x}, \omega_i) f_r(\omega_i, \mathbf{x}, \omega_o) \cos \theta_i d\omega_i$$

emise

odraz + lom

Diskrétní versus spojitá úloha

- Je zobrazovací úloha skutečně definována spojitě?
- 100 wattová žárovka emituje cca. 2.4×10^{19} fotonů za sekundu při 8 procentní účinnosti žárovky (Max-Planckův zákon)
- Lidská schopnost rozlišit světlo:
 - Časově 25-100 Herzů
 - Logaritmická závislost pro okolní úroveň osvětlení: Weber-Fechnerův zákon
 - Extrémně široký rozsah vnímaných intenzit
 - Práh citlivosti asi 10 fotonů na jednu tyčinku
- Z toho plynou nároky na počet částic pro výpočet osvětlení v běžné scéně interiéru na minimálně 10^{38} fotonů, pokud by mělo jít o skutečnou simulaci reality
- Z hlediska možné přesnosti a uskutečnitelnosti výpočtu lze zadání a řešení úlohy považovat za spojitě

Aplikace Monte Carlo pro syntézu obrazu - Antialiasing

Potřebujeme ne jeden vzorek skrz středy pixelů obrázku, ale jako v reálné kameře integrujeme příchozí zář [$\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{sr}^{-1}$] přes plochu celého pixelu:

Bez
antialiasingu



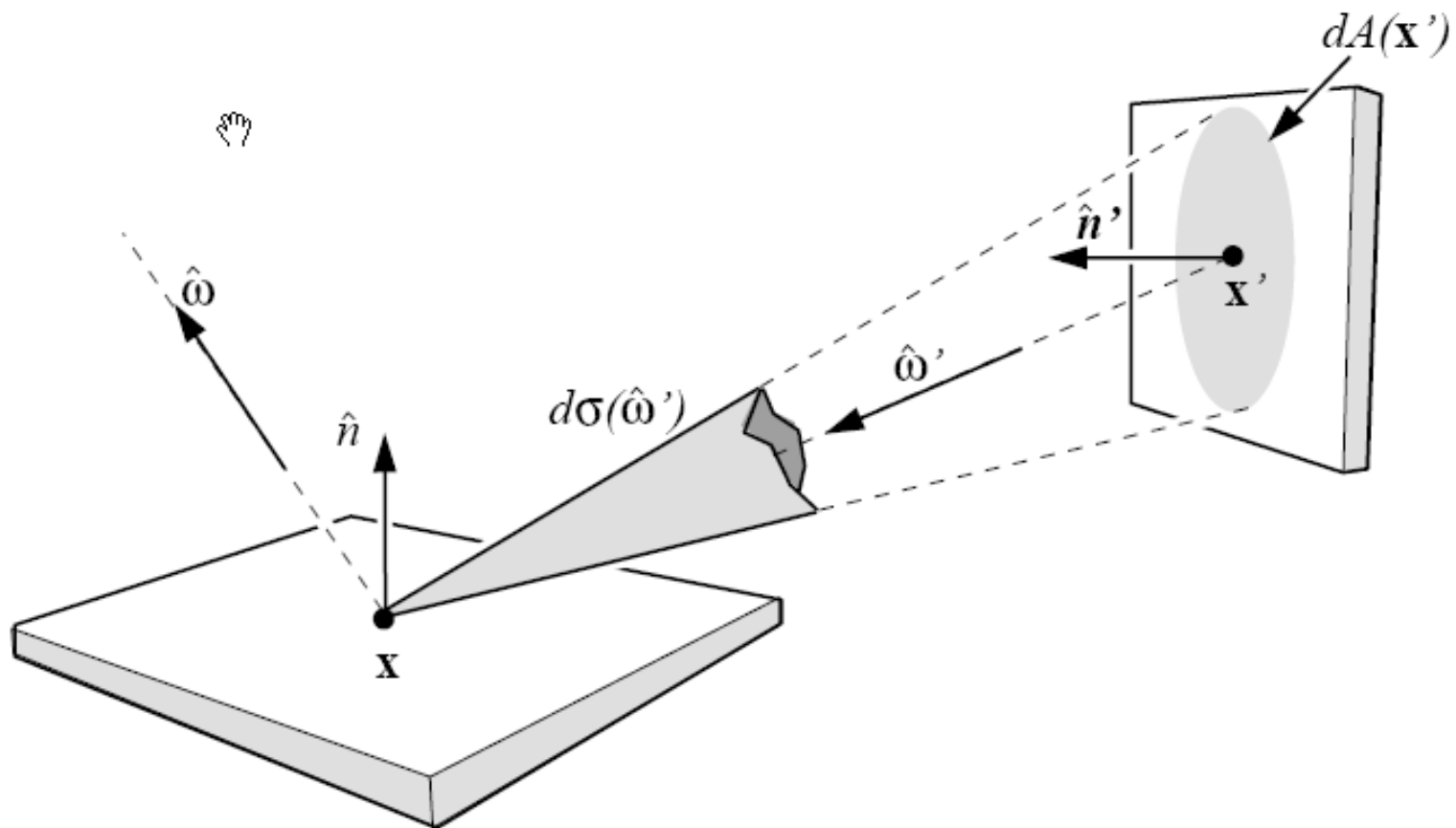
S antialiasingem



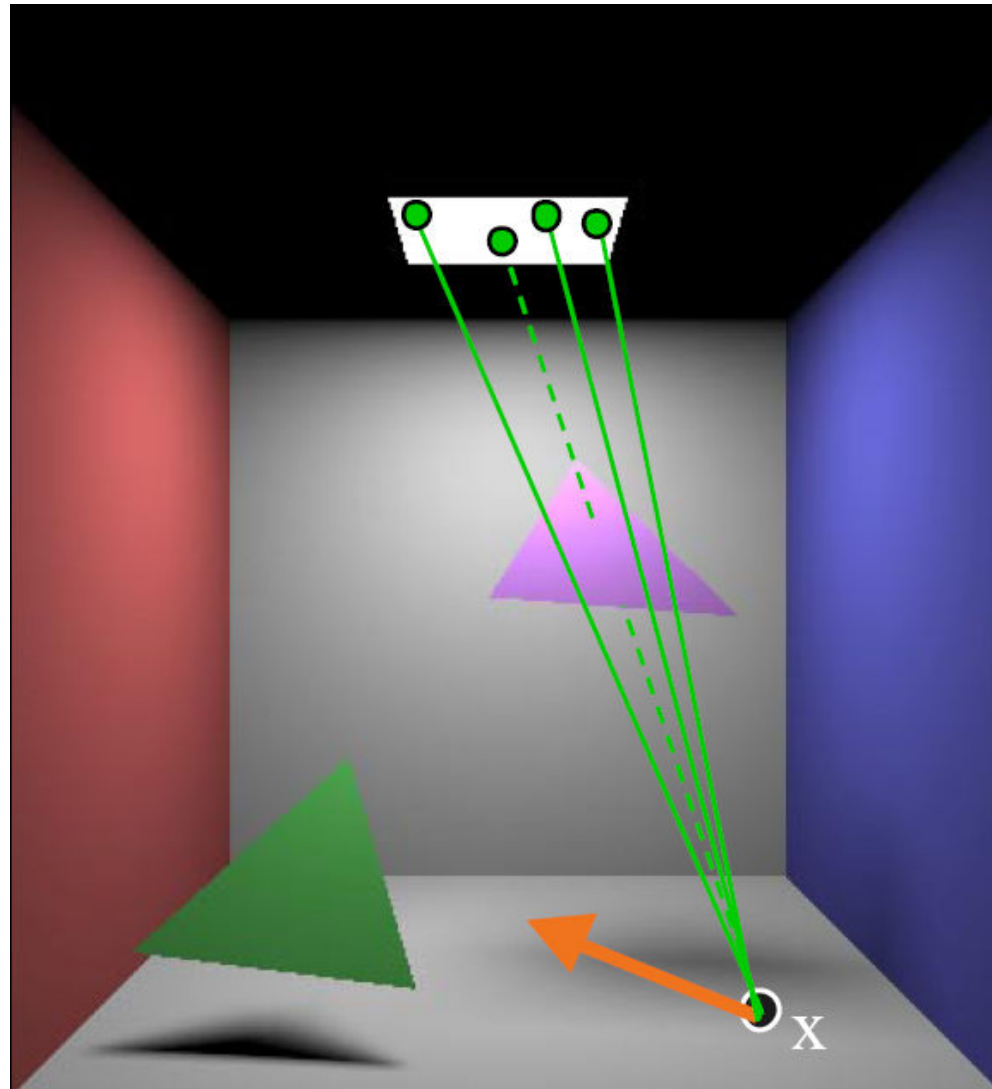
Aplikace Monte Carlo pro syntézu obrazu - Plošné zdroje světla

- Plošný (=nebodový) zdroj světla – přímé osvětlení musí být počítáno pomocí více vzorků
 - Pro idealizované tvary lze úlohu spočítat analyticky, ale pak:
 - nebereme vliv zastínění dalšími objekty,
 - nemůžeme mít složitější tvar obrysu plošného světla,
 - co dělat, když světlo není plošné?
 - Úloha se převádí na problém:
 - rozmístí body po povrchu světla,
 - spočítá viditelnost a vzdálenost k bodu osvětlení,
 - zprůměruj hodnoty záře (angl. radiance)
-

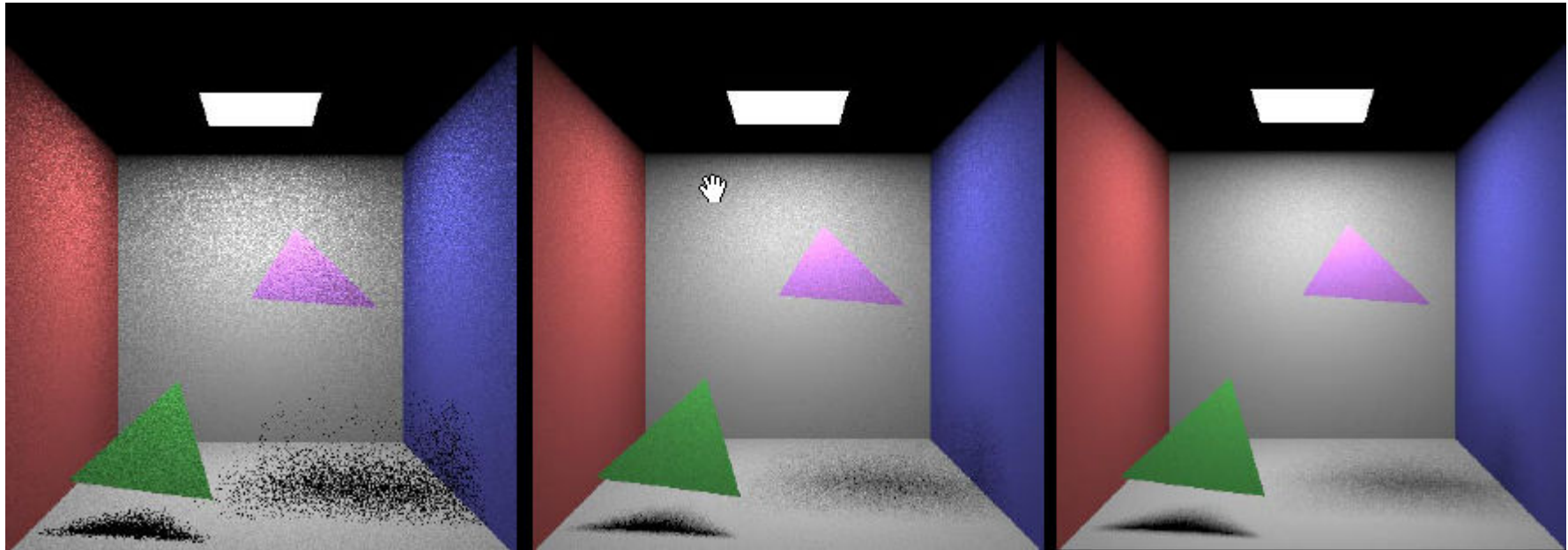
Aplikace Monte Carlo – Plošné zdroje světla



Vizualizace algoritmu pro výpočet přímého osvětlení



Ukázka pro plošný zdroj světla



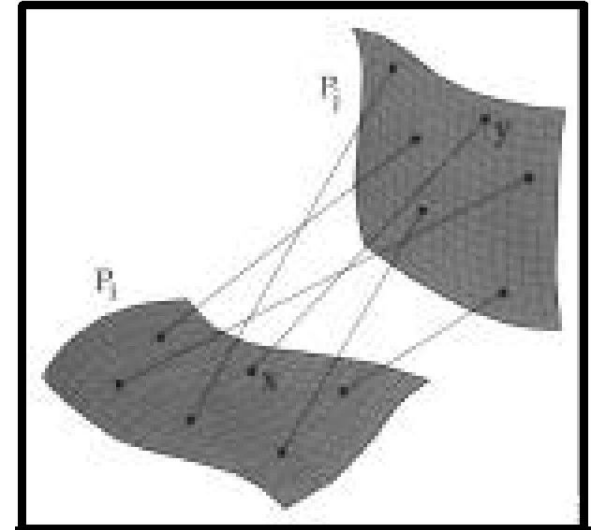
1 vzorek na pixel

9 vzorků na pixel

36 vzorků na pixel

Aplikace metody Monte Carlo – Form Faktory pro radiozitu

- Vyber body na
 - první plošce
 - druhé plošce
- Spočti viditelnost mezi dvojicemi bodů
- Spočítej form faktor F_{ij}



$$B(\mathbf{x}) = B_e(\mathbf{x}) + \rho(\mathbf{x}) \int_S B(\mathbf{y}) \underbrace{\frac{G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) V(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\pi}}_{G'(\mathbf{x}, \mathbf{y})} dA$$

$$B_i = \frac{1}{A_i} \int_{A_i} B(\mathbf{x}) dA_i =$$

$$= B_{e,i} + \rho_i \sum_{j=1}^N B_j \underbrace{\frac{1}{A_i} \int_{A_i} \int_{A_j} G'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dA_j}_{F_{ij}}$$

F_{ij} ... form faktor

$$G(x, y) = \frac{\cos \theta_x \cos \theta_y}{\cancel{\pi} r_{xy}^2}$$

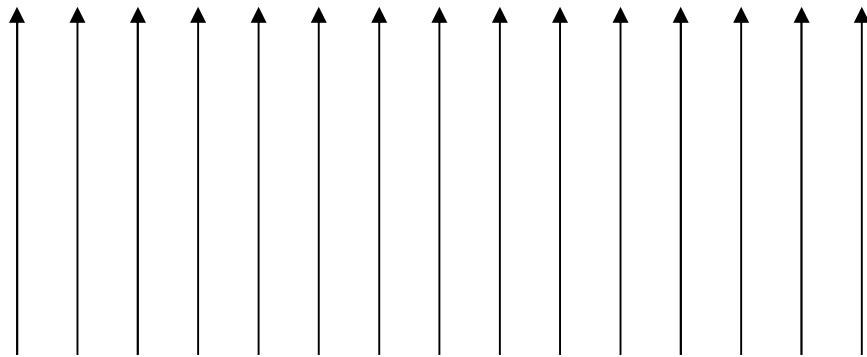
Vlastnosti integrace vzorkovacích metod

- Správnost odhadu integrálu – ačkoliv používáme jen konečný (malý) počet vzorku a výsledek zahrnuje statistickou chybu, je metoda výpočtu korektní a neobsahuje systematickou chybu
 - říkáme, že odhad integrálu je *nestranný* (anglicky *unbiased*)
 - v opačném případě (výpočet je zatížený chybou) říkáme, že odhad integrálu je *stranný* nebo *vychýlený*. Pak chybu výpočtu metodu označujeme *vychýlení odhadu* (anglicky se nazývá *bias*).
- Rychlost konvergence – jak rychle se zmenšuje rozptyl či skutečná chyba výpočtu s počtem vzorků N , lze vyjádřit buď asymptoticky nebo experimentálně

Odbočka: Kvadraturní metody integrace

$$\hat{I} = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \sum_{i_3=1}^n \cdots \sum_{i_s=1}^n w_{i_1} w_{i_2} w_{i_3} \cdots w_{i_s} f(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, \cdots, x_{i_s})$$

- Obdélníková, rovnoběžníková, Simpsonova metoda:
rychlost konvergence pro s-dimenzionální integrál je $O(1/N^{1/s})$
- Používají se maximálně pro jedno či dvojrozměrné integrály
- Vzorky jsou rozmístěny v pravidelné mřížce na doméně integrálu



Monte Carlo Integrace

- Rychlost konvergence pro s -dimenzionální integrál je $O(1/N^{1/2})$, tedy nezávislá na počtu dimenzí!
 - Podmínkou úspěšné aplikace MC metody je:
 - možnost opakovaně počítat pokusy pro daný jev
 - možnost rychle a kvalitně generovat náhodná čísla pro realizaci pokusů. Náhodná čísla nesmí být snadné předvídat.
 - aplikace racionálního algoritmu integrace s co nejrychlejší konvergencí
-

Monte Carlo Integrace - Shrnutí

- Výhody metody MC
 - Jednoduché na implementaci
 - Jednoduché na představu
 - Robustní řešení pro různé tvary domén a integrandů
 - Efektivní pro vícerozměrné integrály
 - Efektivní i pro malý počet vzorků a funkce se singularitami
 - Rychlost konvergence $O(1/N^{1/2})$
 - Možnost kontroly a odhadu přesnosti výpočtu pomocí rozptylu
 - Nevýhody
 - Relativně pomalá konvergence – zmenšení statistické chyby o polovinu vyžaduje zvětšit počet vzorků čtyřikrát
 - Důsledek pro syntézu obrazu: obrázek obsahuje šum
-

Náhodná veličina

- Vzorok náhodné veličiny X
 - generované náhodným procesem
 - generované podle pravděpodobnostní hustoty
 - Funkce $Y(X)$ je rovněž náhodná veličina
- Střední hodnota náhodné veličiny:

$$E[f] \equiv \int_{\Omega} f(x) p(x) d\mu(x)$$

- Vlastnosti

$$E\left[\sum_i f_i\right] = \sum_i E[f_i]$$

$$E[af] = aE[f]$$

Náhodná veličina - zopakování

- Definice: Rozptyl

$$\begin{aligned}V[X] &= E[(X - E[X])^2] \\ &= E[X^2 - 2XE[X] + E[X]^2] \\ &= E[X^2] - E[X]^2\end{aligned}$$

- Vlastnosti $V[\sum_i X_i] = \sum_i V[X_i]$

$$V[aX] = a^2V[X]$$

- Rozptyl se zmenšuje s počtem vzorků

$$V\left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i\right] = \frac{1}{N^2} \sum_i V[X_i] = \frac{1}{N} V[X]$$

Nestranný odhad

- Konečný integrál

$$I = \int_{\Omega} f(x) d\mu(x)$$

- Střední hodnota

$$E[f] = \int_{\Omega} f(x) p(x) d\mu(x)$$

- Definice odhadu (estimátoru) pro konstantní pravd. hustotu:

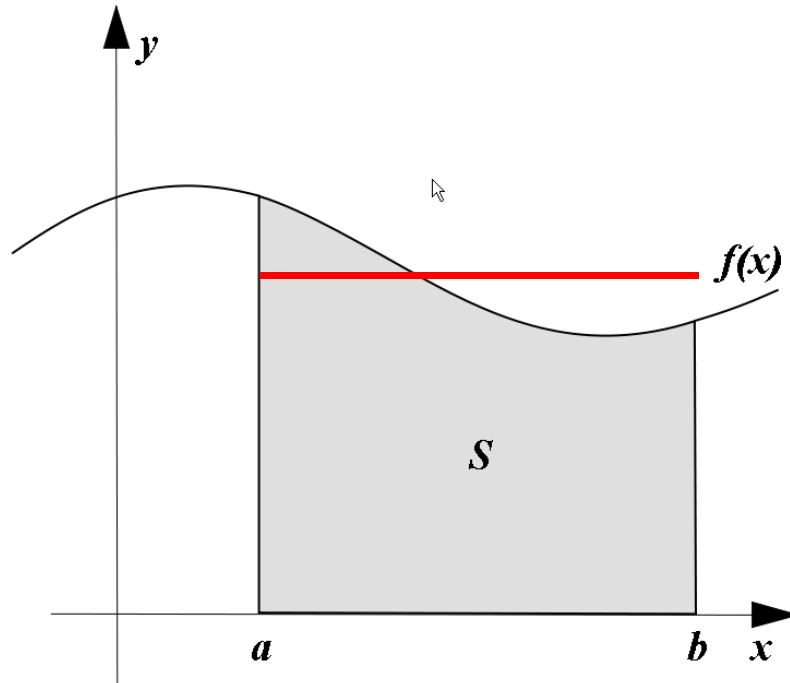
$$F_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(X_i)$$

- Vlastnosti: odhad je nestranný

$$E[F_N] = I(f)$$

$$\begin{aligned} E[F_N] &= E\left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i\right] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E[Y_i] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E[f(X_i)] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} f(x) p(x) d\mu(x) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} f(x) d\mu(x) \\ &= \int_{\Omega} f(x) d\mu(x) \end{aligned}$$

Shrnutí výpočtu střední hodnoty



- Střední hodnota funkce
- Rozptyl funkce
- Odhad střední hodnoty
- Odhad rozptylu

Diskrétní pravděpodobnostní hustoty

- Diskrétní události X_i s pravděpodobnostní p_i

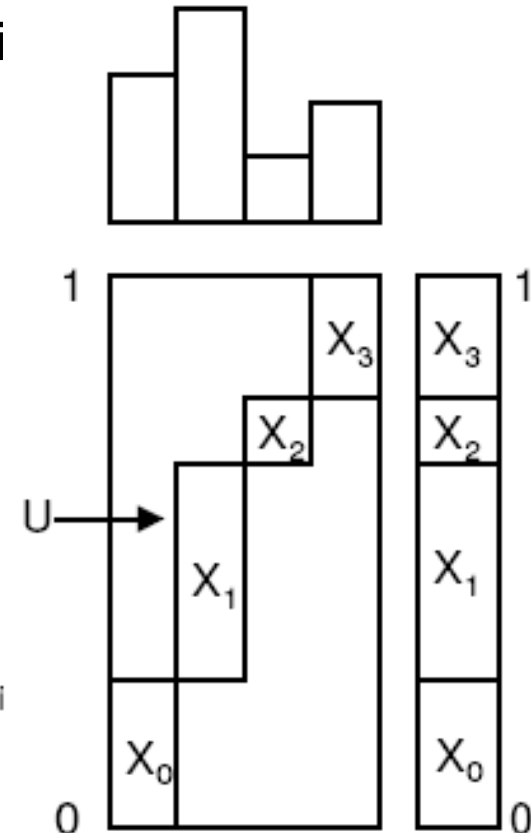
$$p_i > 0 \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1$$

- Distribuční funkce:

$$P_j = \sum_{i=1}^j p_i$$

- Výběr vzorků

- U: vyber uniformní náhodnou veličinu
- Vyber $X_i \sim p_i$ aby odpovídalo $P_{i-1} < U < P_i$
- Není potřeba lineární interpolace pro výpočet polohy vzorku ze sousedů, vybíráme diskrétní hodnotu



Spojité pravděpodobnostní distribuce

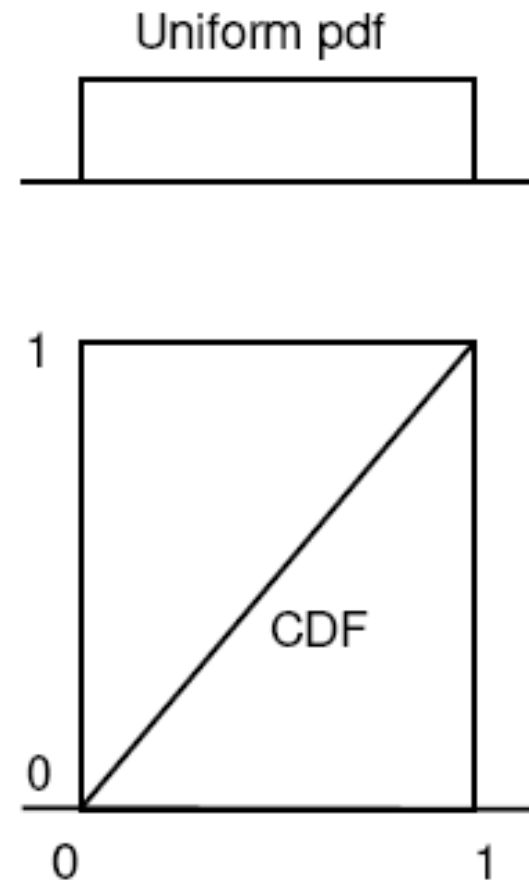
- Pravděpodobnostní hustota
 $p(x)$, $p(x) > 0$
- Distribuční funkce $P(X)$

$$P(x) = \int_0^x p(x) dx$$

$$P(x) = \Pr(X < x)$$

$$P(1) = 1$$

$$\begin{aligned} \Pr(a < X < b) &= \int_a^b p(x) dx \\ &= P(b) - P(a) \end{aligned}$$



Vzorkování pro spojité distribuce (inverse transform method)

- Distribuční funkce

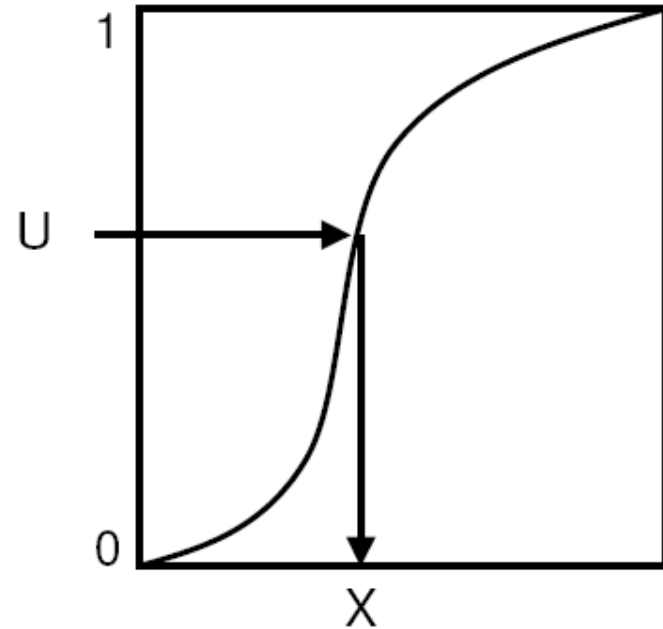
$$P(x) = \Pr(X < x)$$

- Algoritmus výběru vzorků

- Zjisti $X = P^{-1}(U)$

- 2 kroky k dosažení výsledku:

- spočti distribuční funkci $P(x)$ z pravděpodobnostní hustoty $p(x)$
- spočti inverzní funkci $P^{-1}(x)$
- najdi hodnotu pro náhodné číslo „U“
- Pro tabulku je třeba lineární interpolace pro výpočet polohy vzorku ze sousedů, vybíráme spojitou hodnotu X
- Poznámka: distribuční funkce $P(x)$ se počítá jako integrál z hustoty pravděpodobnosti $p(x)$.



Příklad: analytická funkce

- Zadání funkce

$$p(x) = (n+1)x^n$$

$$P(x) = x^{n+1}$$

$$X \sim p(x) \Rightarrow X = P^{-1}(U) = \sqrt[n+1]{U}$$

- Integrál polynomiální funkce je:

$$\int_0^1 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

Příklad 2: Vzorkování v kruhu, náhodná veličina v \mathbb{R}^2

$$A = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r \, dr \, d\theta = \int_0^1 r \, dr \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{r^2}{2} \Big|_0^1 \theta \Big|_0^{2\pi}$$

$$p(r, \theta) = p(r)p(\theta)$$

$$p(\theta) = \frac{1}{2\pi}$$

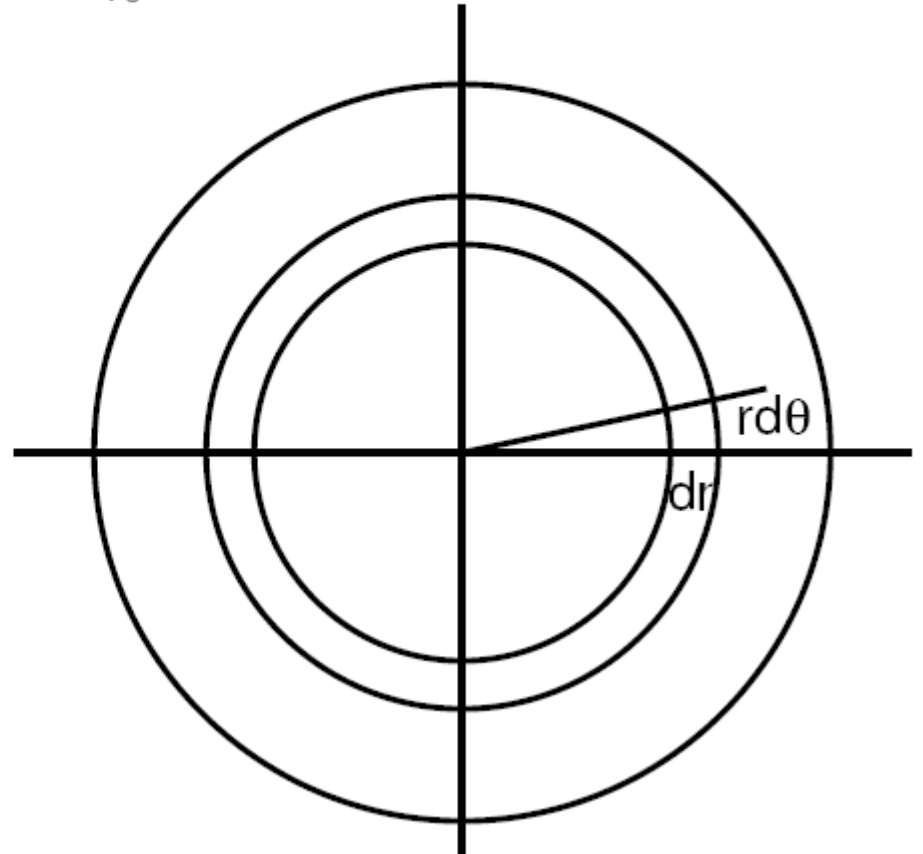
$$\theta = 2\pi U_1$$

$$P(\theta) = \frac{1}{2\pi} \theta$$

$$p(r) = 2r$$

$$r = \sqrt{U_2}$$

$$P(r) = r^2$$



Zamítací metoda (Rejection Sampling)

- Monte Carlo integrace

$$I = \int_0^1 f(x) dx$$

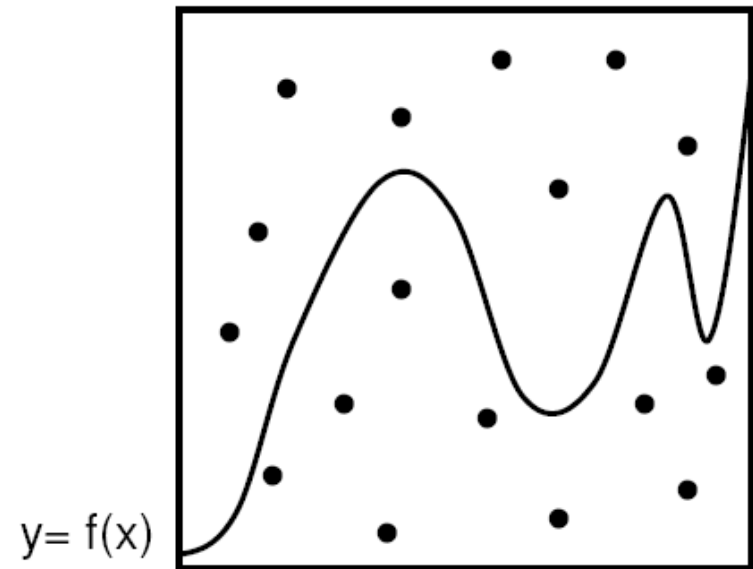
$$= \int_0^1 \int_0^{f(x)} dy dx$$

- Algoritmus

- Vyber náhodné $U1$ a $U2$
- Přijmi vzorek, pokud $f(U1) < U2$

- Efektivita

- Plocha funkce pod křivkou/plocha obdélníka
- Analytická integrace je vždy efektivnější



Zamítací metoda pro kružnici

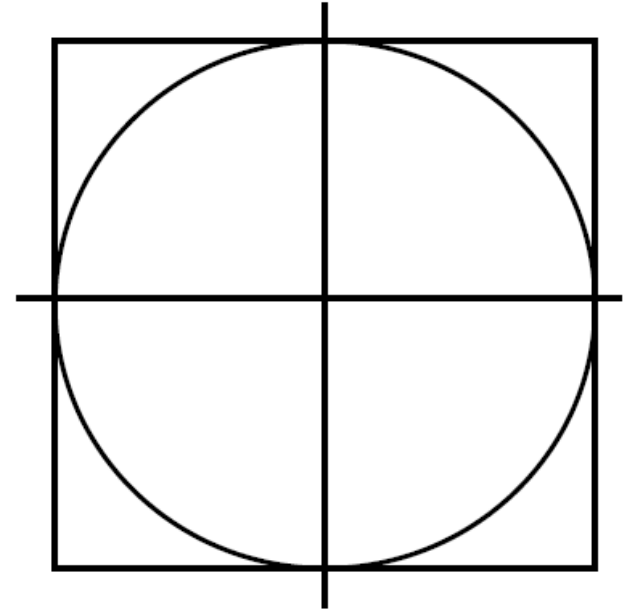
- Algoritmus

```
do {  
    X= 1-2*U1;  
    Y= 1-2*U2;  
} while (X2 + Y2 > 1);
```

- Rozšíření pro kouli (3D)

- Vyber vzorek v kouli
- Vyber náhodný směr

- Není příliš efektivní



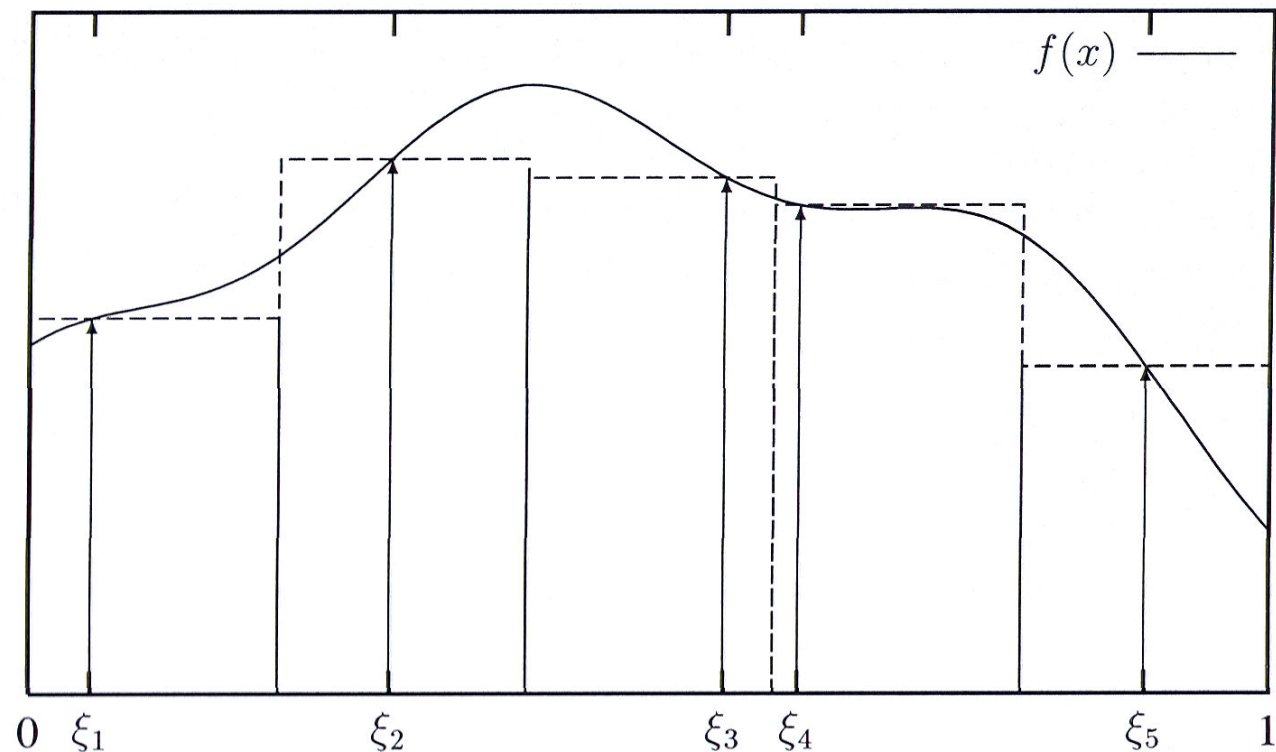
Metody zefektivnění výpočtu

- Metody
 - neinformované (blind Monte Carlo)
 - informované (informed Monte Carlo)

 - Některé metody zefektivnění výpočtu
 - Vymezení hlavní části (“control variates”)
 - Výběr na podintervalech
 - Podstatný výběr
-

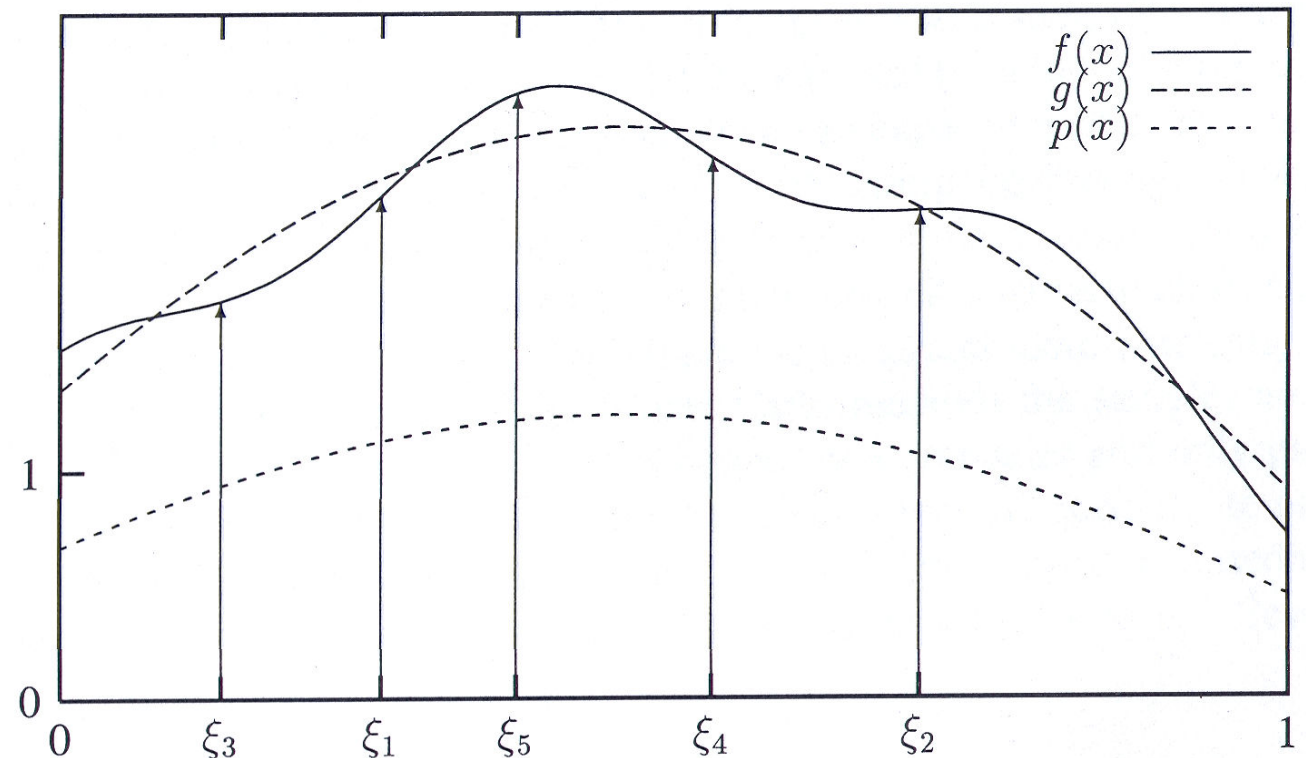
Výběr na podintervalech (Stratified Sampling)

- Rozděl doménu na stejně velké části
- V každé části náhodně vyber jeden vzorek
- Známé také jako “jittered sampling” (pro více dimenzí)
- Nevýhoda: nelze jednoduše přidávat vzorky

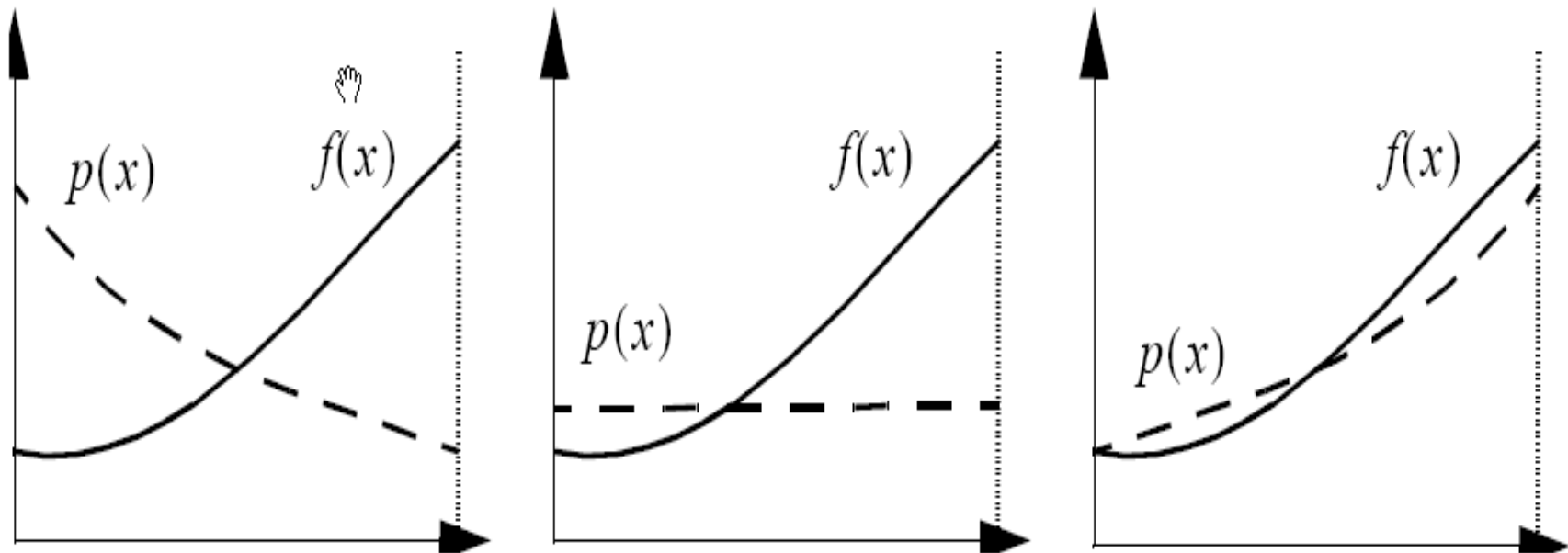


Podstatný výběr (Importance Sampling)

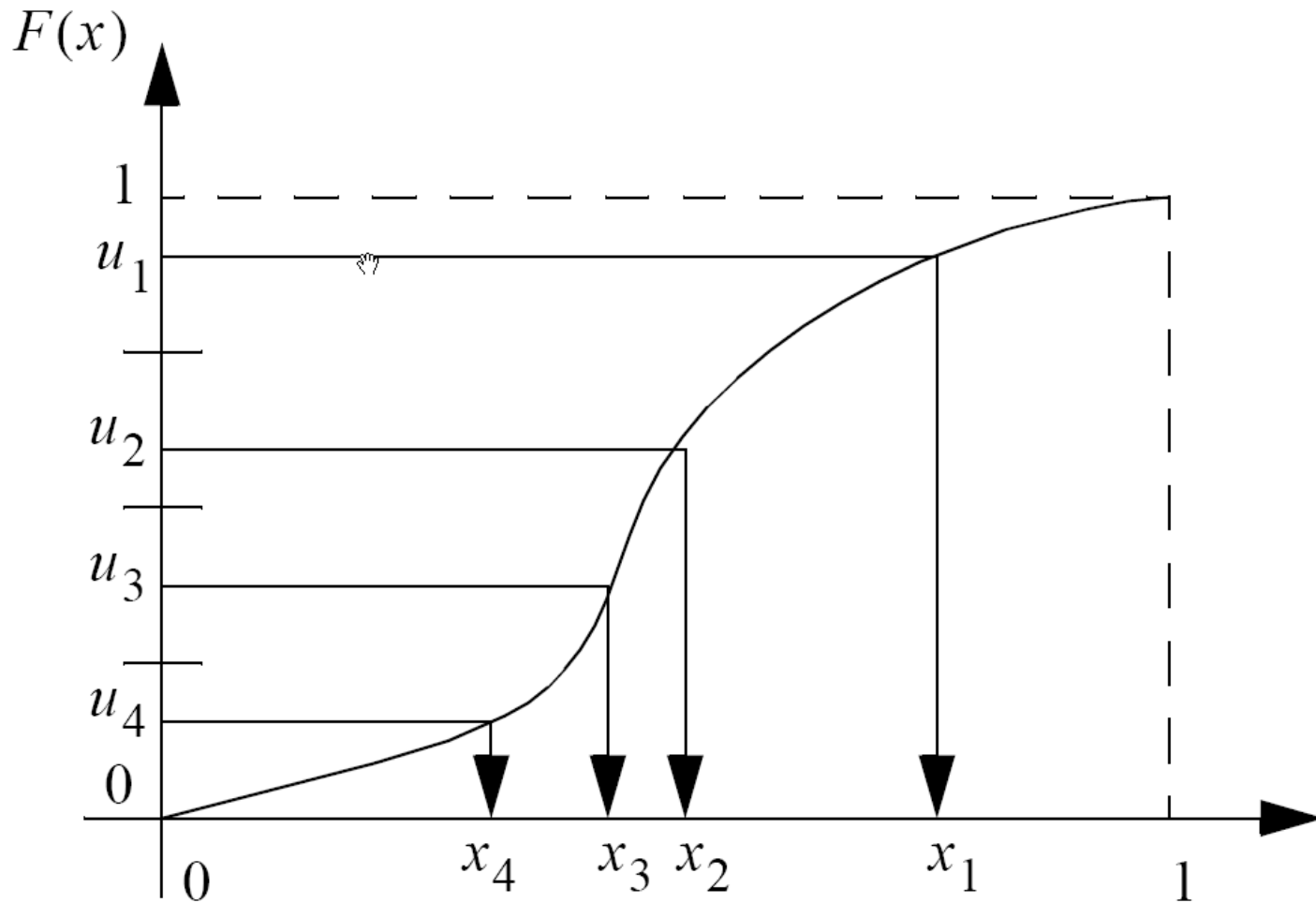
- V oblastech, kde je očekávaná hodnota funkce vyšší, vybíráme více vzorků
- Je nutné mít představu o přibližném tvaru funkce (funkce důležitosti)



Vliv funkce důležitosti na rozptyl střední hodnoty



Kombinace metody podstatného výběru a výběru na podintervalech



Částečné shrnutí statistiky

- Odhad rozptylu střední hodnoty slouží jako míra stochastické chyby odhadu
 - Pokud použijeme efektivnější metodu integrace, rozptyl odhadu se zmenší
 - Výsledek integrálu = odhad střední hodnoty
 - Vzorce pro rozptyl pro efektivnější metody
 - dají se odvodit
 - jsou v literatuře či na webu
http://en.wikipedia.org/wiki/Importance_sampling
-

Důležité vzorce a postupy

- Odhad integrálu: zvolíme funkci hustoty pravděpodobnosti $p(X_i)$, podle které vybíráme vzorky

$$I = \int_{\Omega} f(x) d\mu(x)$$

- Nestranný odhad střední hodnoty
 - téměř náhodná
pravd. hustota $p(x)$
 - funkce $p(x)$ nesmí být nulová,
kde je funkce $f(x)$ nenulová
použijeme tento vzorec:

$$F_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f(X_i)}{p(X_i)}$$

$$\begin{aligned} E[F_N] &= E\left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f(X_i)}{p(X_i)}\right] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E\left[\frac{f(X_i)}{p(X_i)}\right] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \frac{f(x)}{p(x)} p(x) d\mu(x) \\ &= \int_{\Omega} f(x) d\mu(x) \end{aligned}$$

Generátor náhodných čísel

- Univerzální test generátoru náhodných čísel je obtížný problém
 - Základní požadavky na generátor
 - test dobré shody – rovnoměrné rozdělení na interval (0,1)
 - test náhodnosti – jsou získaná náhodná čísla na sobě nezávislá (frekvence výskytu číslic v čísle)
 - Rychlost a paměťová nenáročnost
 - Praktické doporučení:
 - Nepoužívejte funkci rand() v knihovně ANSI C
 - Použijte buď Mersenne Twister
<http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~m-mat/MT/emt.html>
 - Nebo aspoň funkci drand48() pod UNIXem
-

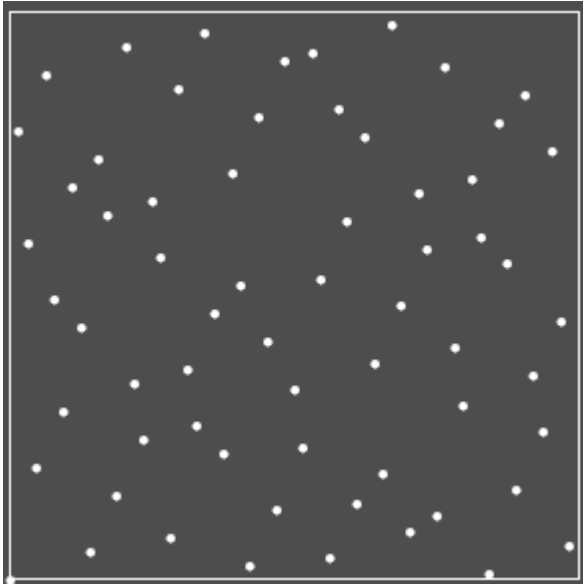
Metody Quasi Monte Carlo (QMC)

- Rychlost konvergence lze změnit z $O(1/N^{1/2})$ pro Monte Carlo na $O((\log N)^s/N)$ pro Quasi Monte Carlo, kde “s” je dimenze domény integrálu
 - To umožňuje ještě rychlejší konvergenci odhadu než kvadrurní metody integrace a Monte Carlo, ale jen pro malý a střední počet dimenzí (10 až 20)
 - To přesně vyhovuje problému syntézy obrazu
-

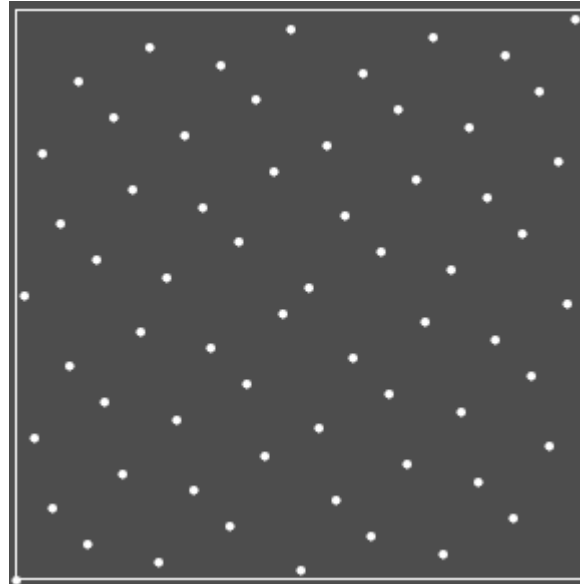
Důležité názvy generátorů QMC

- van der Corput
 - Halton
 - Hammersley
 - Sobol
 - Niederreiter
 - Niederreiter-Xing
-

Ukázky výsledku 2D generátorů



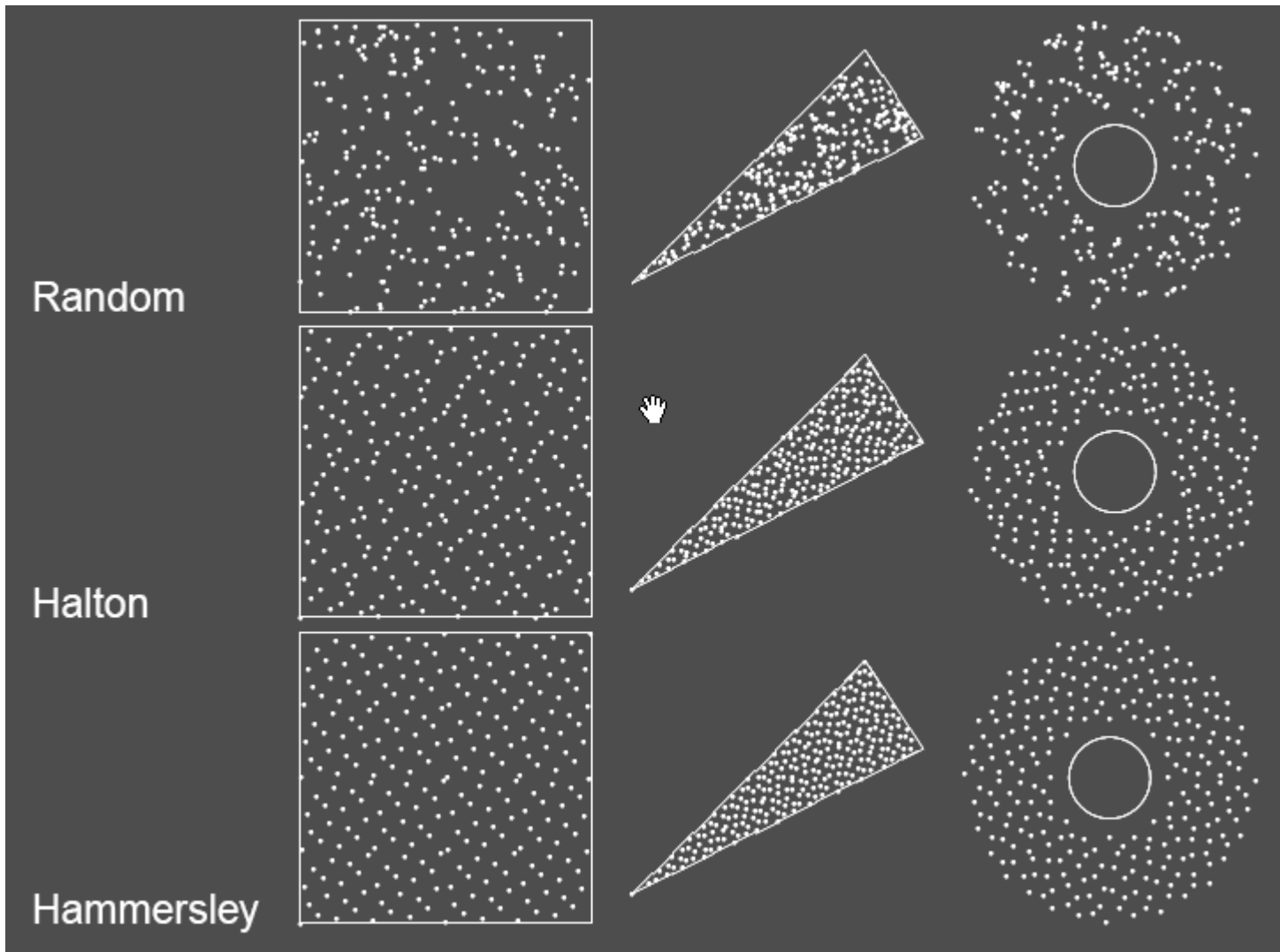
Halton



Hammersley

(1. dimenze pravidelně
2. a vyšší Halton, je nutné
vědět dopředu počet vzorků)

Ukázky rozmístění vzorků



Algoritmus generátoru Halton

- přímý algoritmus výpočtu
- b ... prvočíslo (2,3,5,7,.....)
- i ... semínko (seed), větší než 0

```
double RadicalInverse(const int Base, int i)
{
    double Digit, Radical, Inverse;

    Digit = Radical = 1.0 / (double) Base;
    Inverse = 0.0;

    while(i)
    {
        Inverse += Digit * (double) (i % Base);
        Digit *= Radical;
        i /= Base;
    }

    return Inverse;
}
```

Inkrementální algoritmus pro Haltonův generátor

- Trik – musíme znát vypočtenou hodnotu pro stejnou dimenzi a semínko o jedničku menší

```
double NextRadicalInverse(const double Radical, double Inverse)
// Radical = 1.0 / Base
{
    const double AlmostOne = 1.0 - 1e-10;
    double NextInverse, Digit1, Digit2;

    NextInverse = Inverse + Radical;

    if (NextInverse < AlmostOne)
        return NextInverse;
    else
    {
        Digit1 = Radical;
        Digit2 = Radical * Radical;

        while (Inverse + Digit2 >= AlmostOne)
        {
            Digit1 = Digit2;
            Digit2 *= Radical;
        }

        return Inverse + (Digit1 - 1.0) + Digit2;
    }
}
```

Ukázka obrázků pro MC a QMC

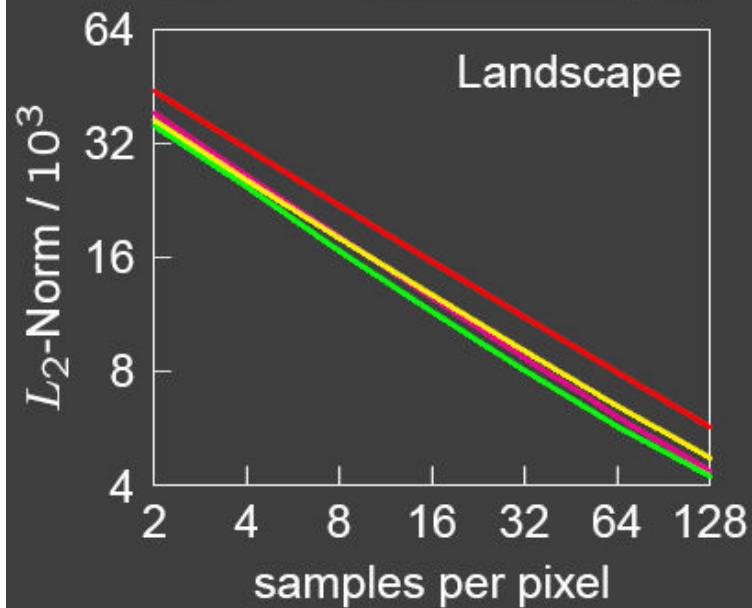
Monte Carlo
(230s)



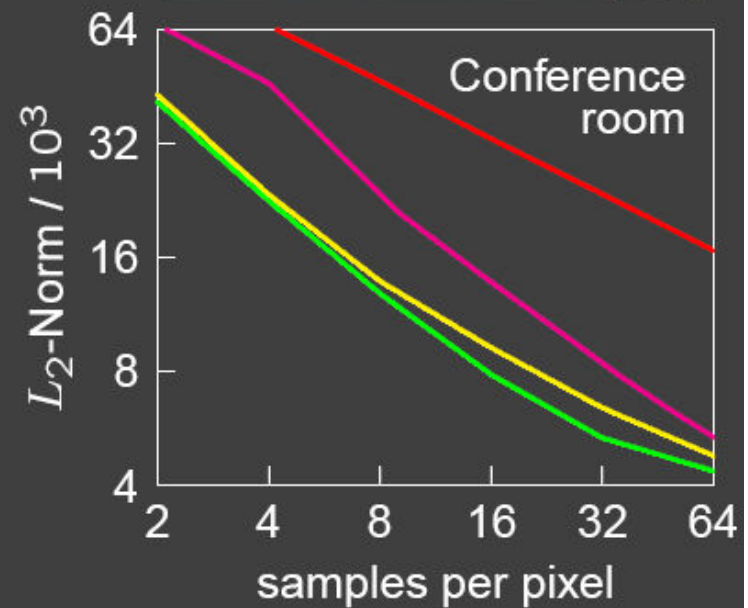
padded
Hammersley
(202s)



Přímé osvětlení



independent —
jittered —



Latin hypercube —
random digit scrambled nets —

Literatura MC obecně

- F. Fabian, Z. Klumber: Metoda Monte Carlo a možnosti jejího uplatnění, Praha 1998, ISBN 80-7175-058-1
 - M. Virius, Aplikace Matematické Statistiky, skriptum ČVUT, FJFI 1998
 - Kalos, Whitlock: Monte Carlo Methods, Volume I: Basics, John Wiley and Sons, 1986
 - G.S. Fishman: Monte Carlo, Concepts, Algorithms, and Applications, Springer Verlag, 1995
-

Literatura pro syntézu obrazu

- Eric Lafortune: Mathematical Models and Monte Carlo Algorithms for Physically Based Rendering, 1997
 - Szirmay Kalos, skripta v angličtině, 1997: Monte-Carlo Methods in Global Illumination (ke stáhnutí na webu)
 - Efficient Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Rendering Techniques, Eurographics 2003 Tutorial T2
 - Monte Carlo Ray Tracing, SIGGRAPH 2003 Course 44
-