

---

**X39RSO/A4M39RSO**

**Zobrazovací rovnice a formy  
jejího vyjádření**

---

Vlastimil Havran

ČVUT v Praze – CTU Prague

Verze 2014

---

# Osnova

- Od lokálního odrazu světla ke globální zobrazovací rovnici
- Od zobrazovací rovnice k rekurzivnímu sledování paprsku
- Zobrazovací rovnice jako integrál přes směry a přes plochy
- Přímé a nepřímé osvětlení
- Od zobrazovací rovnice k radiozitě
- Zobrazovací rovnice jako integrální operátor

---

# **Od lokálního odrazu světla ke globální zobrazovací rovnici**

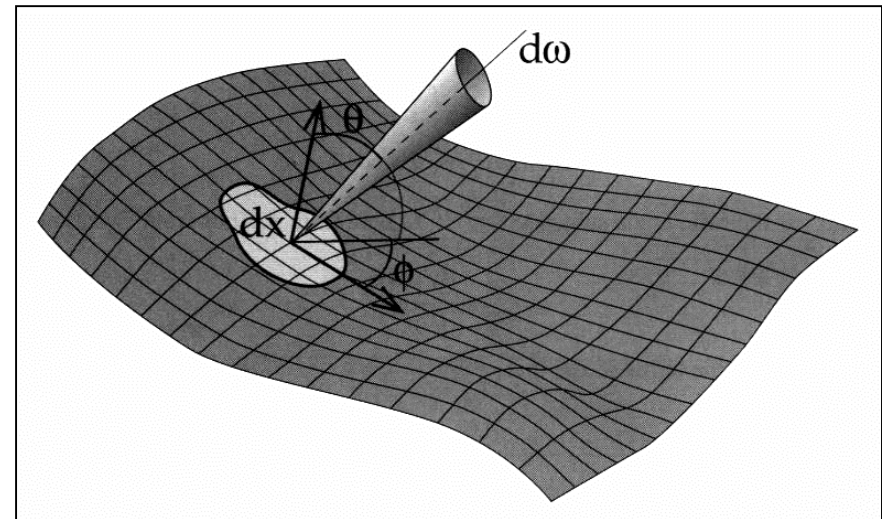
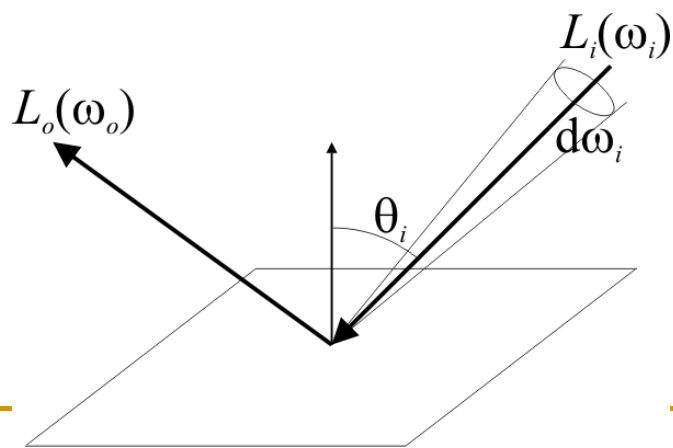
---

# Zopakování: BRDF – Bidirectional Reflectance Distribution Function

Definice BRDF:

$$f_r(\omega_i, \mathbf{x}, \omega_o) = \frac{dL_o(\mathbf{x}, \omega_o)}{dE(\mathbf{x}, \omega_i)} = \frac{dL_o(\mathbf{x}, \omega_o)}{L_i(\mathbf{x}, \omega_i) \cos \theta_i d\omega_i}$$

- Jednotka: [sr<sup>-1</sup>]



# Lokální odraz světla – rovnice odrazu

- Rovnice odrazu (“Reflection equation”)
- “Kolik světla je odraženo do směru  $\omega_o$ , je-li bod  $\mathbf{x}$  osvětlen ze všech příchozích směrů  $\omega_i$ ?”
- Integrál přes všechny příchozí směry
  - hemisféra  $H(\mathbf{x})$  – pouze odraz, nebo
  - sféra  $\Omega$  – lom i odraz (BSDF)

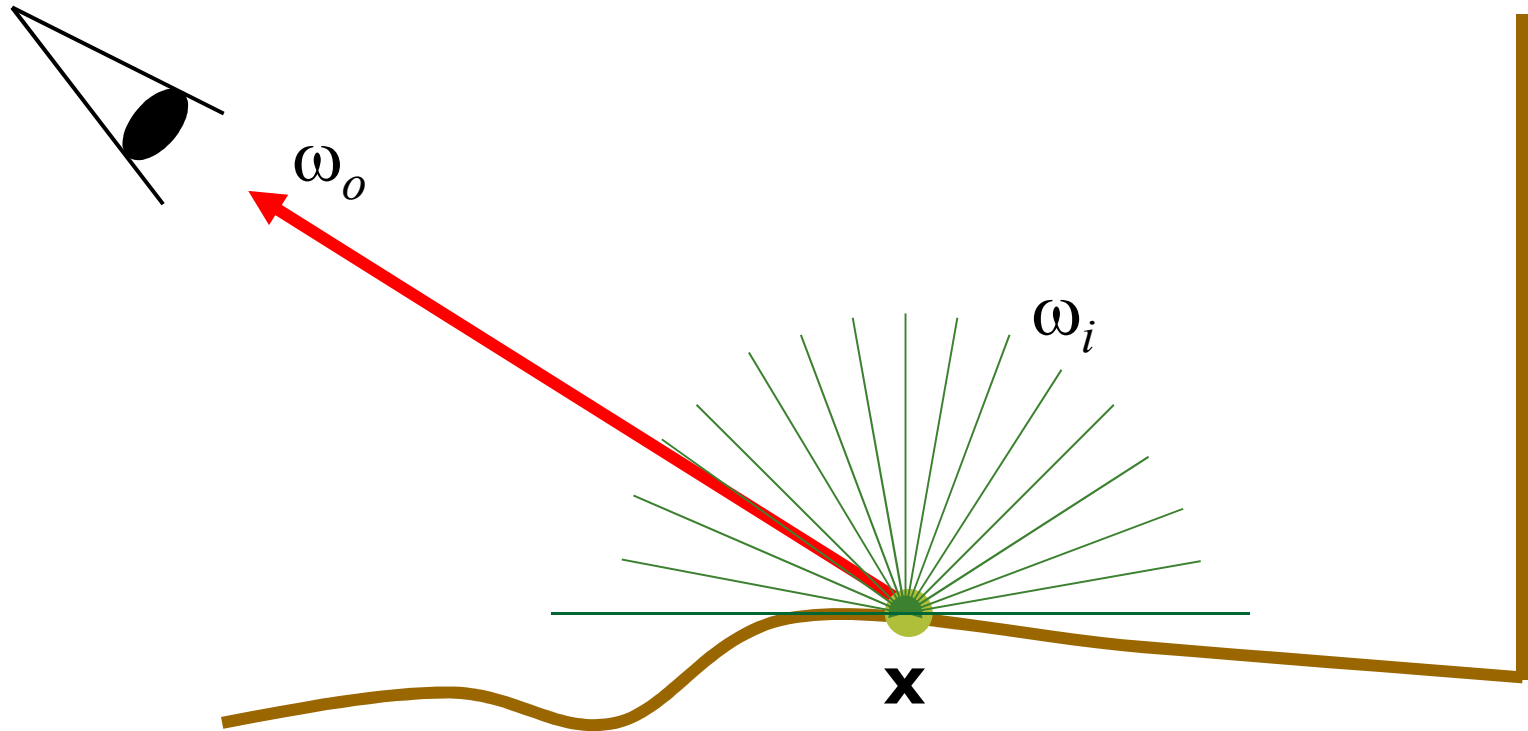
$$L_o(\mathbf{x}, \omega_o) = L_e(\mathbf{x}, \omega_o) + \int_{\Omega} L_i(\mathbf{x}, \omega_i) f_r(\omega_i, \mathbf{x}, \omega_o) \cos \theta_i d\omega_i$$

emise

odraz (+ lom)

# Lokální odraz světla

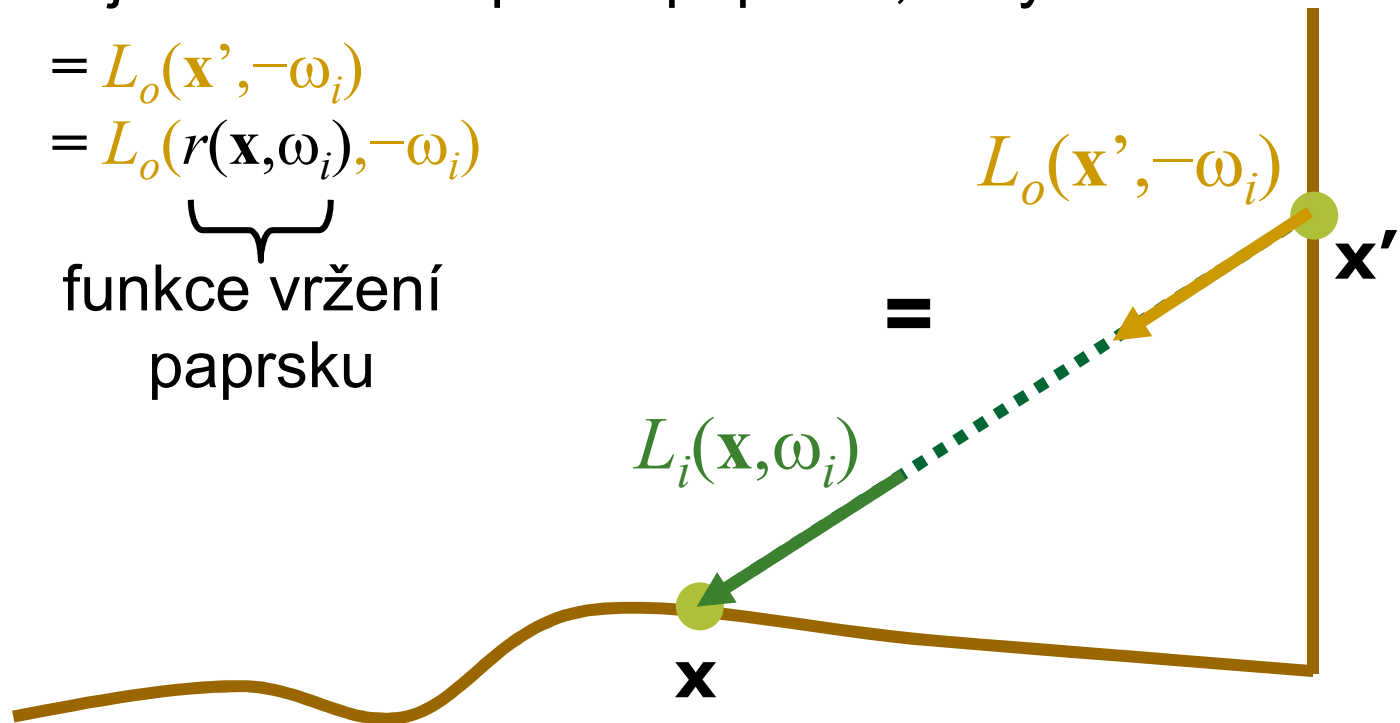
$$L_o(\mathbf{x}, \omega_o) = L_e(\mathbf{x}, \omega_o) + \int_{\Omega} L_i(\mathbf{x}, \omega_i) f_r(\omega_i, \mathbf{x}, \omega_o) \cos \theta_i d\omega_i$$



# Transport světla

- **Q:** Jaká je příchozí radiance ze směru  $\omega_i$  ?
- **A:** Radiance je konstantní podél paprsku, tedy

$$\begin{aligned} L_i(\mathbf{x}, \omega_i) &= L_o(\mathbf{x}', -\omega_i) \\ &= L_o(\underbrace{r(\mathbf{x}, \omega_i)}_{\text{funkce vržení paprsku}}, -\omega_i) \end{aligned}$$



# Od lokálního odrazu ke globálnímu šíření světla

- Funkce vržení paprsku:  $r(\mathbf{x}, \omega)$ 
  - Nejbližší průsečík paprsku z bodu  $\mathbf{x}$  ve směru  $\omega$
- Dosazení  $L_i(\mathbf{x}, \omega_i) = L_o(r(\mathbf{x}, \omega_i), -\omega_i)$  do rovnice odrazu:

$$L_o(\mathbf{x}, \omega_o) = L_e(\mathbf{x}, \omega_o) + \int_{\Omega} L_o(r(\mathbf{x}, \omega_i), -\omega_i) f_r(\omega_i, \mathbf{x}, \omega_o) \cos \theta_i d\omega_i$$

- Příchozí radiance  $L_i$  byla vyloučena.
- Odchozí radiance  $L_o$  použita jinde ve scéně – další odraz.
- Neznámá radiance  $L_o$  je na obou stranách rovnice.



# Zobrazovací rovnice – Rendering equation

- Kajiya, James T., "The rendering equation", SIGGRAPH 1986
- Odstranění indexu „o“ u radiance:

$$L(\mathbf{x}, \omega_o) = L_e(\mathbf{x}, \omega_o) + \int_{\Omega} L(r(\mathbf{x}, \omega_i), -\omega_i) f_r(\omega_i, \mathbf{x}, \omega_o) \cos \theta_i d\omega_i$$

- Popis ustáleného stavu = energetické rovnováhy ve scéně.
- Algoritmy globálního osvětlení hledají takové rozložení radiance ve scéně, které odpovídá zobrazovací rovnici.

Výpočet obrázku = výpočet  $L(\mathbf{x}, \omega)$  pro místa na površích objektů viditelných přes pixely.

# Rozdíl mezi rovnicí odrazu a zobrazovací rovnicí

Podobný tvar – rozdílný význam

$$L_o(\mathbf{x}, \omega_o) = L_e(\mathbf{x}, \omega_o) + \int_{\Omega} L_i(\mathbf{x}, \omega_i) f_r(\omega_i, \mathbf{x}, \omega_o) \cos \theta_i d\omega_i$$

## ■ Rovnice odrazu

- popisuje lokální odraz světla v jednom místě
- Integrál, pomocí něhož lze spočítat odchozí radianci z příchozí radianci v daném bodě

$$L(\mathbf{x}, \omega_o) = L_e(\mathbf{x}, \omega_o) + \int_{\Omega} L(r(\mathbf{x}, \omega_i), -\omega_i) f_r(\omega_i, \mathbf{x}, \omega_o) \cos \theta_i d\omega_i$$

## ■ Zobrazovací rovnice

- Podmínka na globální rozložení světla ve scéně
- Integrální rovnice – neznámá  $L$  vlevo i vpravo

---

# **Od zobrazovací rovnice k rekurzivnímu sledování paprsku**

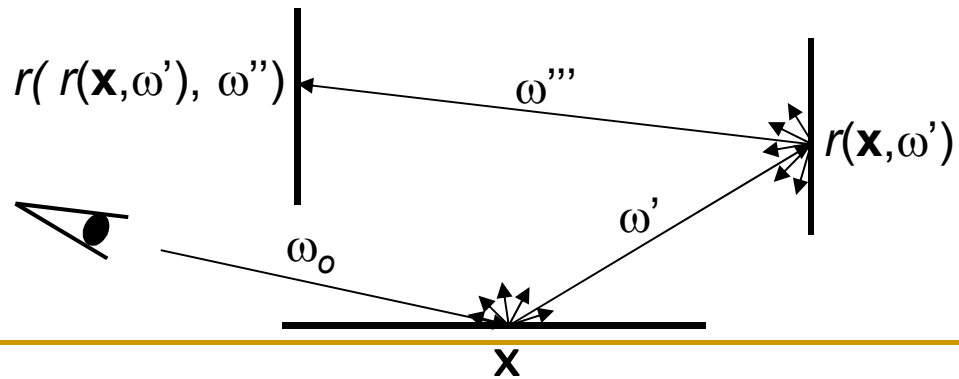
---

# Rekurzivní výpočet zobrazovací rovnice

- **Úhlová formulace** zobrazovací rovnice (ZR):

$$L(\mathbf{x}, \omega_o) = L_e(\mathbf{x}, \omega_o) + \int_{\Omega} L(r(\mathbf{x}, \omega_i), -\omega_i) f_r(\omega_i, \mathbf{x}, \omega_o) \cos \theta_i d\omega_i$$

- Pro výpočet  $L(\mathbf{x}, \omega_o)$  potřebuji spočítat  $L(r(\mathbf{x}, \omega'), -\omega')$  pro všechny směry  $\omega'$  okolo bodu  $\mathbf{x}$
- Pro výpočet každého  $L(r(\mathbf{x}, \omega'), -\omega')$  potřebuji spočítat  $L(r(r(\mathbf{x}, \omega'), \omega''), -\omega'')$  pro všechny směry  $\omega''$  okolo bodu  $r(\mathbf{x}, \omega')$
- Atd... => rekurze



---

# Rekurzivní výpočet zobrazovací rovnice

- Rekurzivní výpočet
  - převedení zobrazovací rovnice zpět na postupnou aplikaci rovnice odrazu
- Výpočet integrálu přes **všechny** příchozí směry
  - Monte Carlo metody = výběr náhodných směrů, viz. příští přednáška

# Zjednodušení pro zrcadlový odraz – klasický ray tracing

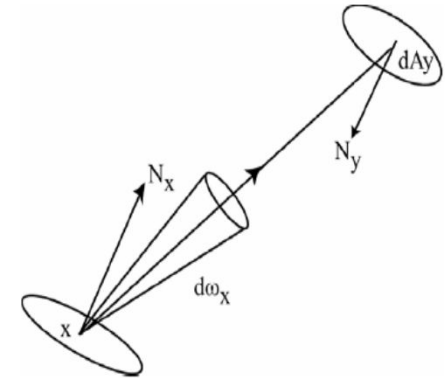
- Pro odhad integrálu  $\int_{\Omega} L(r(\mathbf{x}, \omega_i), -\omega_i) f_r(\omega_i, \mathbf{x}, \omega_o) \cos \theta_i d\omega_i$  na jedné úrovni rekurze je obecně zapotřebí mnoha vzorků integrandu (tj. mnoha vržených sekundárních paprsků)
- Zrcadlový odraz
  - BRDF  $f_r$  je Diracův impuls, tj. je nenulová pouze pro jediný směr
  - Pro odhad integrálu stačí jediný sekundární paprsek v tomto směru
- Podobně pro ideální lom

---

# Zobrazovací rovnice jako integrál přes směry a přes plochy

---

# Zobrazovací rovnice – úhly versus plochy



- Integrál přes směry – původní formulace

$$L(\mathbf{x}, \omega_o) = L_e(\mathbf{x}, \omega_o) + \int_{\Omega} L(r(\mathbf{x}, \omega_i), -\omega_i) f_r(\omega_i, \mathbf{x}, \omega_o) \cos \theta_i d\omega_i$$

- Integrál přes plochy scény (substituce  $d\omega = dA \frac{\cos \theta}{r^2}$ )

$$L(\mathbf{x}, \omega_o) = L_e(\mathbf{x}, \omega_o) + \int_S L(\mathbf{y}, \mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}) f_r(\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}, \mathbf{x}, \omega_o) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) V(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dA$$

$$\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \quad \dots \text{jednotkový vektor ve směru od } \mathbf{y} \text{ k } \mathbf{x}$$

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\cos \theta_x \cos \theta_y}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2} \quad \dots \text{geometrický člen}$$

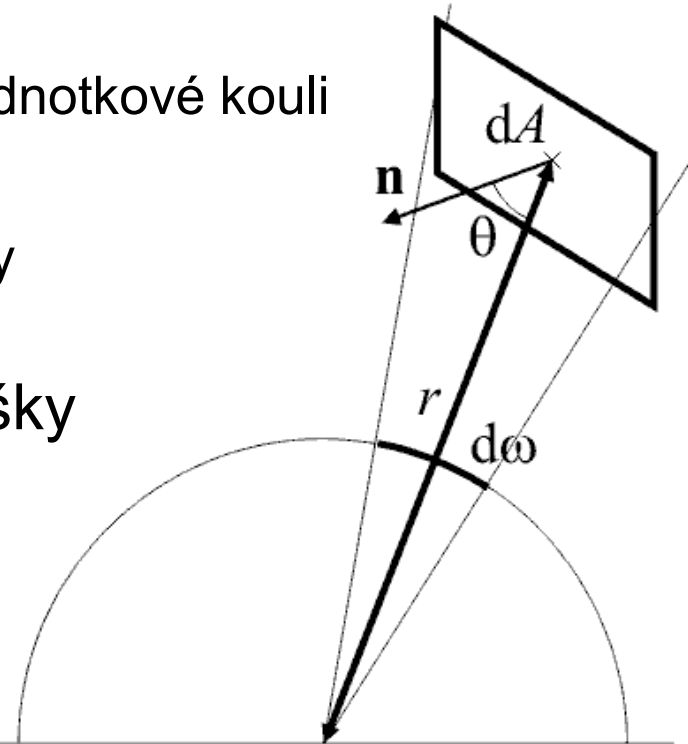
$V(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \dots$ viditelnost  $\mathbf{y}$  z  $\mathbf{x}$   
 $1 \Leftrightarrow \mathbf{y}$  viditelné z  $\mathbf{x}$   
 $0$  jinak



# Zopakování: Diferenciální prostorový úhel

- „Nekonečně malý“ prostorový úhel okolo směru
- 3D vektor
  - Velikost  $d\omega$ 
    - velikost diferenciální plošky na jednotkové kouli
  - Směr  $d\omega$ 
    - střed projekce diferenciální plošky na jednotkovou kouli
- Prostorový úhel diferenciální plošky

$$d\omega = dA \frac{\cos \theta}{r^2}$$



# Integrální formulace zobrazovací rovnice přes úhly

- Sčítání příspěvků světla do bodu ze všech směrů
- Pro každý směr najdu nejbližší plochu
- Implementace ve stochastickém ray tracingu:
  - Pro dané místo  $\mathbf{x}$ , generuj náhodné směry, pro každý směr vrhni paprsek a najdi nejbližší průsečík, v něm spočítej odchozí radianci. To vše sečti přes všechny náhodné směry.

$$L(\mathbf{x}, \omega_o) = L_e(\mathbf{x}, \omega_o) + \int_{\Omega} L(r(\mathbf{x}, \omega_i), -\omega_i) f_r(\omega_i, \mathbf{x}, \omega_o) \cos \theta_i d\omega_i$$

# Integrální formulace zobrazovací rovnice přes plochy

- Sčítání příspěvků světla do bodu ze všech ploch scény
- Příspěvek započítán pouze pokud je plocha z bodu viditelná
- Implementace ve stochastickém ray tracingu:
  - Generuj náhodně místa  $\mathbf{y}$  na geometrii. Pro každé otestuj viditelnost mezi  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{y}$ . Pokud viditelné, přičti k osvětlení v  $\mathbf{x}$  odchozí radianci z  $\mathbf{y}$  váženou geometrickým faktorem.
- Nejběžnější použití plošné formulace: radiozita, výpočet přímého osvětlení v stochastickém ray tracingu

$$L(\mathbf{x}, \omega_o) = L_e(\mathbf{x}, \omega_o) + \int_S L(\mathbf{y}, \mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}) f_r(\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}, \mathbf{x}, \omega_o) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) V(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dA$$

---

# **Přímé a nepřímé osvětlení**

---

---

# Přímé a nepřímé osvětlení

- Obecná formulace zobrazovací rovnice platná pro přímé i nepřímé osvětlení
- Praktické strategie výpočtu ZR pro přímé a nepřímé osvětlení se však liší:
  - Formální rozdělení ZR na přímé a nepřímé osvětlení

---

# Výpočet přímého osvětlení

- A priori víme, kde se nachází zdroje přímého osvětlení
- Tyto zdroje jsou často velmi lokalizované (malé v poměru s velikostí scény)
- Náhodné vrháním paprsku by mělo malou (u bodového zdroje nulovou) pravděpodobnost zásahu světelného zdroje => šum
- Použití plošné formulace ZR je výhodnější
  - vzorkování plochy světleného zdroje
  - testování viditelnosti mezi vzorkem na zdroji na osvětlovaným bodem
  - kvadratický útlum se vzdáleností

---

# Výpočet nepřímého osvětlení

- A priori nevíme, kde jsou ve scéně zdroje nepřímého osvětlení
- Tyto zdroje (tj. všechny plochy scény) nejsou lokalizované
- Použití úhlové formulace ZR je výhodnější
  - Vzorkování hemisféry - vržení sekundárních paprsků
  - Rekurzivní aplikace

---

# Bodový světelný zdroj

- „Plocha“ světelného zdroje je jediný bod
- Plošný integrál přes světelné zdroje degeneruje na sumarizaci přes všechny bodové zdroje
- Jeden stínový paprsek na světlo v klasickém sledování paprsku



# Plošný světelný zdroj

- Plošný integrál přes plochu zdroje

$$L^{direct}(\mathbf{x}, \omega) = \int_{Zdroj} L_e(\mathbf{y}, \mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}) f_r(\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}, \mathbf{x}, \omega) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) V(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dA$$

- Vzorkování plochy zdroje
- Pro každý vzorek vyhodnocení integrandu (=příspěvek vzorku)
- Sečíst příspěvky vzorků, vynásobit plochou zdroje, vydělit počtem vzorků
- Speciální případ Monte Carlo integrace
  - ale to až na příští přednášce...

---

# **Od zobrazovací rovnice k radiozitě**

---

# Od zobrazovací rovnice k radiozitě

- Formulace ZR pomocí integrálu přes plochy:

$$L(\mathbf{x}, \omega_o) = L_e(\mathbf{x}, \omega_o) + \int_S L(\mathbf{y}, \mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}) f_r(\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}, \mathbf{x}, \omega_o) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) V(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dA$$

- Radiozita – pouze difúzní plochy

- BRDF konstantní v  $\omega_i$  a  $\omega_o$

$$L(\mathbf{x}, \omega_o) = L_e(\mathbf{x}, \omega_o) + \frac{\rho(\mathbf{x})}{\pi} \int_S L(\mathbf{y}, \mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) V(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dA$$

- Odchozí radiance je nezávislá na  $\omega$  a je rovna radiozitě B děleno  $\pi$  pro každý bod  $\mathbf{x}$

$$B(\mathbf{x}) = B_e(\mathbf{x}) + \rho(\mathbf{x}) \int_S B(\mathbf{y}) \underbrace{\frac{G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) V(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\pi}}_{G'(\mathbf{x}, \mathbf{y})} dA$$

# Radiozita s konstantními konečnými elementy

- Konstantní radiozita přispívajících plošných elementů

$$B(\mathbf{x}) = B_e(\mathbf{x}) + \rho(\mathbf{x}) \sum_{j=1}^N B_j \int_{A_j} G'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dA_j$$

- Průměrná (konstantní) radiozita elementu  $i$ :
  - Střední hodnota radiozity přes plochu elementu

$$\begin{aligned} B_i &= \frac{1}{A_i} \int_{A_i} B(\mathbf{x}) dA_i = \\ &= B_{e,i} + \rho_i \sum_{j=1}^N B_j \underbrace{\frac{1}{A_i} \int_{A_i} \int_{A_j} G'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dA_j}_{F_{ij}} \end{aligned}$$

$F_{ij}$  ... form faktor

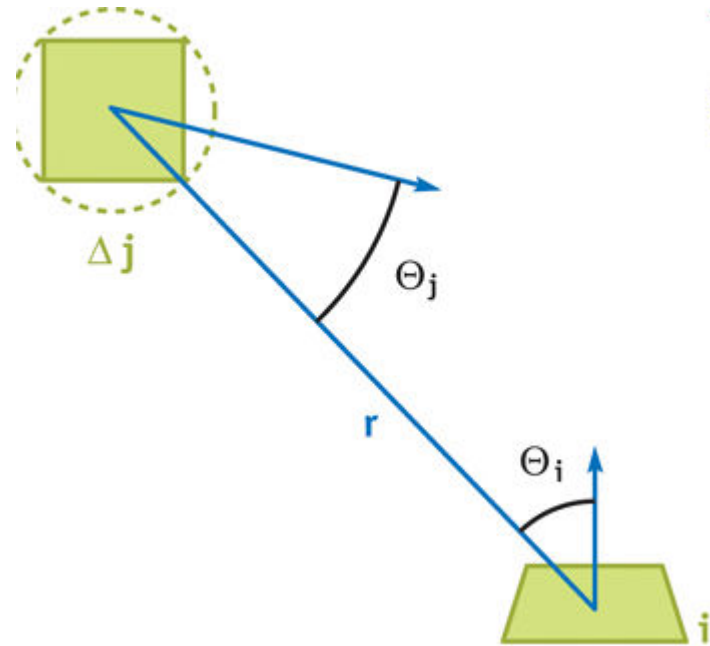
# Radiozita s konstantními konečnými elementy

- Klasická radiozitní rovnice

$$B_i = B_{e,i} + \rho_i \sum_{j=1}^N B_j F_{ij}$$

- Form faktor je vypočítán:

$$F_{ij} = \frac{1}{A_i} \iint_{A_i A_j} \frac{\cos \theta_x \cos \theta_y}{\pi \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2} \cdot V(x, y) dA_i dA_j$$



---

# Zobrazovací rovnice jako integrální operátor

---

---

# Integrální rovnice

- Integrální rovnice prvního druhu
  - Neznámá pouze na pravé straně uvnitř integrálu

$$f(x) = \int k(x, x')g(x') dx'$$

- Integrální rovnice druhého druhu
  - neznámá na obou stranách

$$f(x) = g(x) + \int k(x, x')f(x') dx'$$

- Často je označeno jako Fredholmova integrální rovnice druhého druhu

# Lineární operátory

- Lineární operátory působí na funkce
  - jako matice na vektory

$$h(x) = (L \circ f)(x)$$

- Působení je lineární

$$L \circ (af + bg) = a(L \circ f) + b(L \circ g)$$

- Příklady lineárních operátorů

$$(K \circ f)(x) \equiv \int k(x, x') f(x') dx'$$

$$(D \circ f)(x) \equiv \frac{\partial f}{\partial x}(x)$$



# Transportní operátor

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}, \omega_o) &= \int_{\Omega} L(r(\mathbf{x}, \omega_i), -\omega_i) f_r(\omega_i, \mathbf{x}, \omega_o) \cos \theta_i d\omega_i \\ &= K \circ L \end{aligned}$$

- Zobrazovací rovnice

$$L = L_e + K \circ L$$

$$(I - K) \circ L = L_e$$

- Řešení

$$L = (I - K)^{-1} \circ L_e$$

# Formální řešení

- Neumannova řada

$$(I - K)^{-1} = \frac{1}{I - K} = I + K + K^2 + \dots^3 + \dots$$

- Ověřte

$$\begin{aligned}(I - K) \circ (I - K)^{-1} &= (I - K) \circ (I + K + K^2 + \dots^3) \\ &= (I + K + \dots^2) - (K + K^2 + \dots^3) \\ &= I\end{aligned}$$

# Postupné aproximace

- Postupné aproximace

$$L^1 = L_e$$

$$L^2 = L_e + K \circ L^1 \quad \dots \text{přímé osvětlení}$$

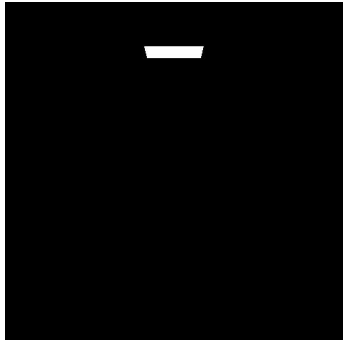
...

$$L^n = L_e + K \circ L^{n-1}$$

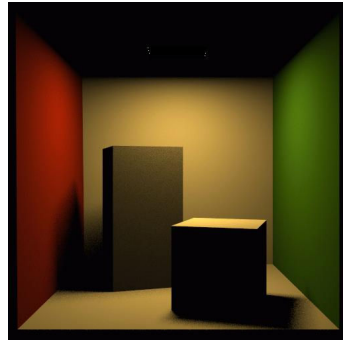
- Zkonvergované řešení

$$L^n = L^{n-1} \quad \therefore \quad L^n = L_e + K \circ L^n$$

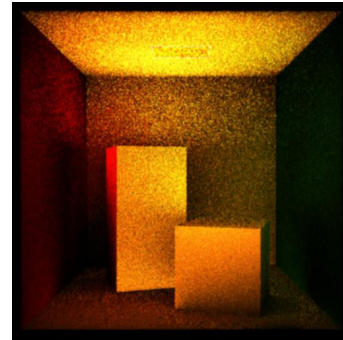
# Postupné aproximace



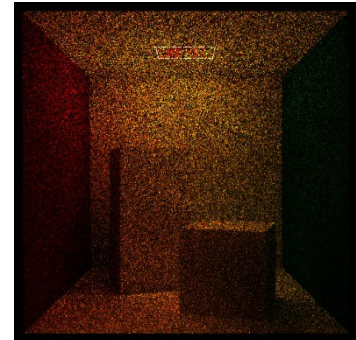
$L_e$



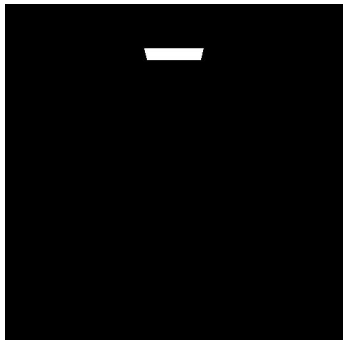
$K \circ L_e$



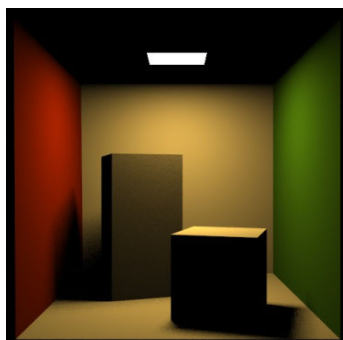
$K \circ K \circ L_e$



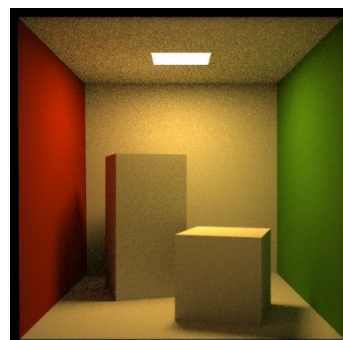
$K \circ K \circ K \circ L_e$



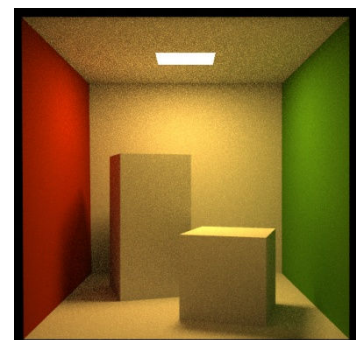
$L_e$



$L_e + K \circ L_e$



$L_e + \dots K^2 \circ L_e$



$L_e + \dots K^3 \circ L_e$

Images by Pat Hanrahan