PAL: 11. cvičení

9. 12. 2021

Náhodná čísla. Prvočísla. Modulární umocňování.

Př. 10/2: náhodná čísla

Máte jednu hrací kostku. Popište, jak využijte házení kostkou tak, abyste měli generátor náhodných celých čísel v rozmezí $0 \ldots 10$. Všechna čísla $0, 1, 2, \ldots 10$ musí být generována se stejnou pravděpodobností.

Př. 10/12: modulární umocňování

Vypočtěte $18^{89}\ mod\ 11$.

Př. 10/5: perioda Lehmerova generátoru náh. čísel

Určete délku periody v Lehmerově generátoru, který je dán předpisem $x_{n+1} = ((M-1) \cdot x_n) \; mod \; M$, kde M je prvočíslo.

Př. 10/11: největší společný dělitel

Vypočtěte největší společný dělitel

a) $GCD(220, 284)$,

b) $GCD(\binom{30}{10}, \binom{31}{9})$,

c) $GCD(2^{100}, 100!)$.

Skip list. B-stromy.

Př. 11/1: skip list - konstrukce

Sestavte skip list, který je nejprve prázdný a dále do něj vkládáte dané klíče v uvedeném pořadí. Číslo za klíčem v závorce uvádí úroveň (level) klíče, tj. kolikrát byla hozena mince, než padl rub (včetně rubu): 16(3), 23(2), 18(2), 5(2), 15(1), 19(1), 33(1), 11(2), 21(2), 4(1), 22(2), 6(2), 17(4), 10(1), 9(1), 28(4).

Př. 11/2: skip list - sloučení

Mějme dvě datové struktury skip list délky N. Máme navrhnout efektivní algoritmus, který tyto dva seznamy spojí do seznamu jediného o délce $2N$. Jaká bude jeho asymptotická složitost?

Př. 11/6*: skip list - jiná úroveň

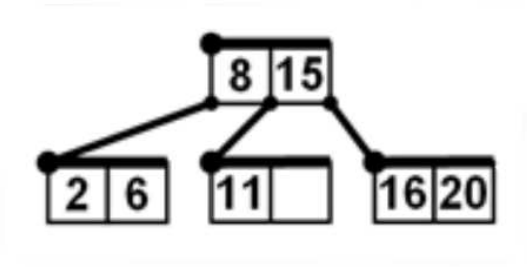
Při implementaci struktury skip list se stalo, že úroveň každého uzlu v operaci Insert je určena jako náhodné číslo z intervalu $[1, \lceil log2N \rceil]$, přičemž se jedná o rovnoměrné rozložení a N je vždy aktuální počet prvků v seznamu. Odhadněte (pro velké N), nakolik se zhorší asymptotická složitost operací Find/Insert/Delete v této struktuře.

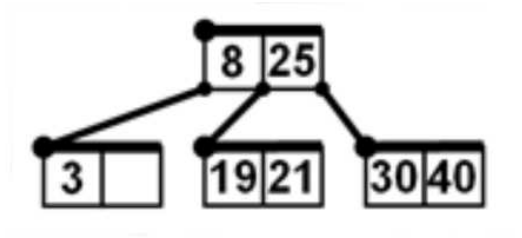
Př. 11/7: skip list - součet úrovní

Profesor Velký tvrdí, že v průměrném případě ve struktuře skip list o délce N je součet všech hodnot $prvek.level$ úměrný hodnotě $Nlog(N)$. Profesor Malý tvrdí, že tento součet je úměrný pouze hodnotě N. Profesor Různý tvrdí, že mohou nastávat oba případy a že záleží na datech. Rozhodněte akademický spor.

Př. 11/11: B stromy

Do B-stromu znázorněného na levém resp. pravém obrázku vložíme postupně klíče 14, 10, resp. 7, 5. Jaké klíče pak bude obsahovat kořen stromu?





Př. 11/12*: izomorfní B stromy

Dva prázdné B-stromy řádu 1 (max. 2 klíče v uzlu) jsou izomorfní. Neprázdný B-strom B1 řádu 1 s kořenem K1 je izomorfní s neprázdným B-stromem B2 řádu 1 s kořenem K2 právě tehdy, když zároveň platí 1. a 2.:

1. K1 obsahuje stejný počet klíčů jako K2
2. Levý podstrom K1 je izomorfní s levým podstromem K2, pravý podstrom K1 je izomorfní s pravým podstromem K2 a prostřední podstrom K1, pokud existuje, je izomorfní s prostředním podstromem K2.

Určete počet navzájem neizomorfních B-stromů řádu 1 s A) 0, B) 1, C) 3, D) 4, E) 7 uzly.

Př. 11/14: konstrukce a destrukce B stromu

B-strom je řádu k, pokud každý jeho uzel, kromě kořene, musí obsahovat alespoň k klíčů a zároveň může obsahovat nejvýše $2k$ klíčů. Vybudujte B-strom řádu 1 tak, že do prázdného stromu vložíte v uvedeném pořadí klíče $25, 13, 37, 32, 40, 20, 22$. Dále tento strom zrušte, a to tak, že jednotlivé klíče klíče odstraníte v pořadí $13, 25, 40, 22, 20, 37, 32$. Nakreslete strom po každé operaci Insert a Delete.