PAL: 3. cvičení

T. Sieger

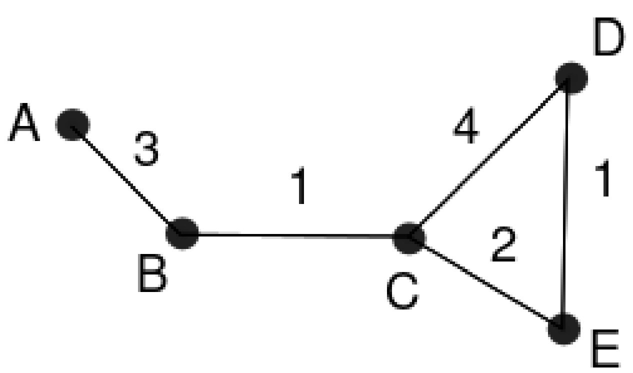
7. 10. 2021

Př. 1/9: DFS/BFS se sekvenčním přístupem

Předpokládejte, že máte k dispozici neorientovaný graf $G = (V, E)$, který je reprezentován seznamem hran. Seznam hran není nijak uspořádán a přístup k jeho jednotlivým prvkům je pouze sekvenční (k prvkům nelze přistupovat pomocí indexu). Určete, jaká je za těchto okolností asymptotická složitost algoritmů BFS a DFS.

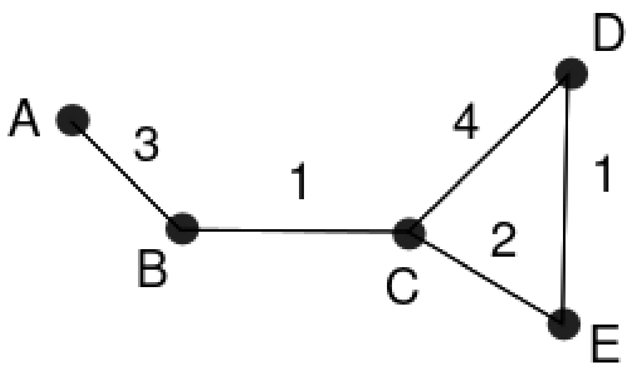
Př. 1/10: Hledání minimální kostry

Napište pseudokód Jarníkova algoritmu, určete jeho asymptotickou složitost a najděte pomocí něj minimální kostru následujícího grafu:



Př. 1/11: Hledání minimální kostry

Napište pseudokód Kruskalova algoritmu, určete jeho asymptotickou složitost a najděte pomocí něj minimální kostru následujícího grafu:



Př. 3/1: orientovaná kružnice

Každou hranu neorientované kružnice libovolně orientujeme. Jaký je vztah mezi počtem kořenů a listů v takto vzniklém grafu?

Př. 3/2: bipartitní graf

Pro která m, n je úplný bipartitní graf $K_{m,n}$ Hamiltonovský?

Př. 3/3*: Eulerovský cyklus

Kolika způsoby lze do kružnice délky 20 vložit další tři hrany tak, aby výsledný graf obsahoval Eulerovský cyklus (=uzavřený eulerovský tah)? Vkládáme pouze hrany, počet uzlů se nemění.

Př. 3/4: ekvivalentní grafy

Dva orientované grafy G1, G2 prohlásíme za slabě ekvivalentní, pokud jejich kondenzace mají stejný počet uzlů. Jaká je asymptotická složitost ověření slabé ekvivalence dvou grafů?

Př. 3/5*: cesty délky 3

Popište, jak najdete a vypíšete všechny cesty délky 3 v acyklickém prostém grafu (bez násobných hran). Jaký je jejich maximální možný počet v závislosti na počtu uzlů grafu? Jaká bude asymptotická složitost Vašeho algoritmu?

Př. 3/6*: orientace kružnice

Orientujte kružnici se 7 vrcholy tak, aby vznikl acyklický graf. Kolika navzájem neizomorfními způsoby to lze udělat?

Př. 3/7*: tušení souvislosti

Je dán orientovaný graf G s n uzly a m hranami. Do tohoto grafu máme přidat co nejmenší počet nových hran tak, aby se výsledný graf stal silně souvislým. Navrhněte efektivní algoritmus řešení této úlohy a určete jeho asymptotickou složitost.

Př. 3/8: homogenní graf

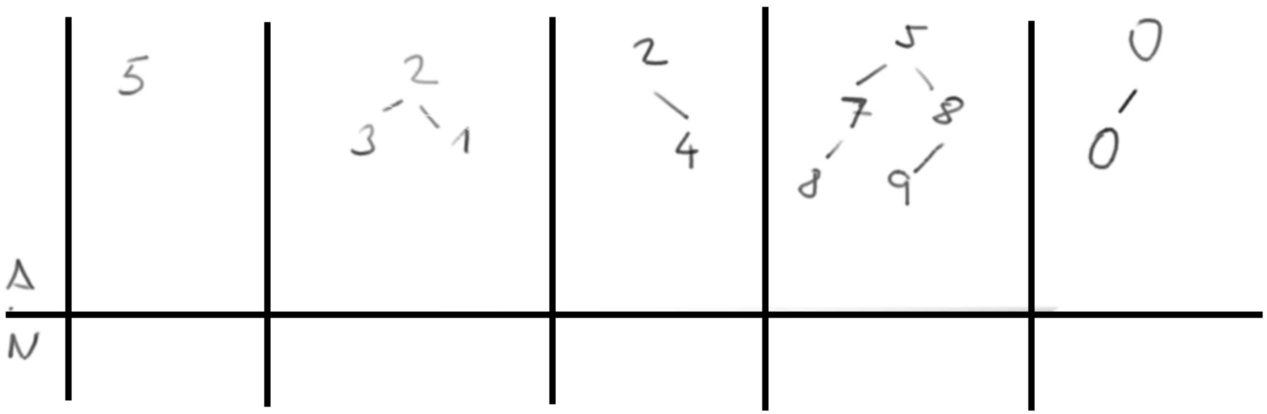
Orientovaný graf prohlásíme za směrově homogenní, pokud vzdálenost (= počet hran na nejkratší možné cestě) každé dvojice uzlů (kořen, list) je vždy stejně velká bez ohledu na to, který kořen nebo list zvolíme. Formulujte efektivní algoritmus, který rozhodne, zda daný graf je směrově homogenní a určete jeho asymptotickou složitost. Lze algoritmus zrychlit, pokud víme, že graf je acyklický?

Př. 3/9*: orientovaný graf bez cyklu

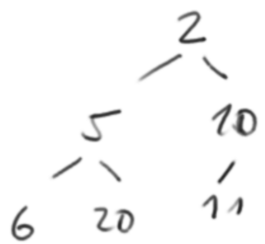
Najděte orientovaný graf, v němž je vstupní i výstupní stupeň každého uzlu nenulový a přitom graf obsahuje uzel, kterým neprochází žádný cyklus.

Haldy

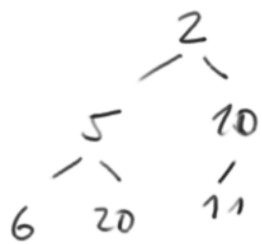
Binární haldy?



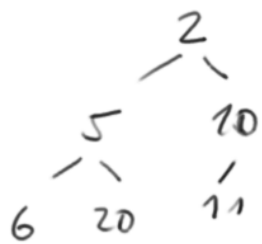
INSERT(1)



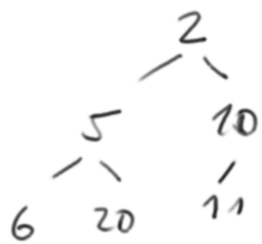
DELETEMIN()



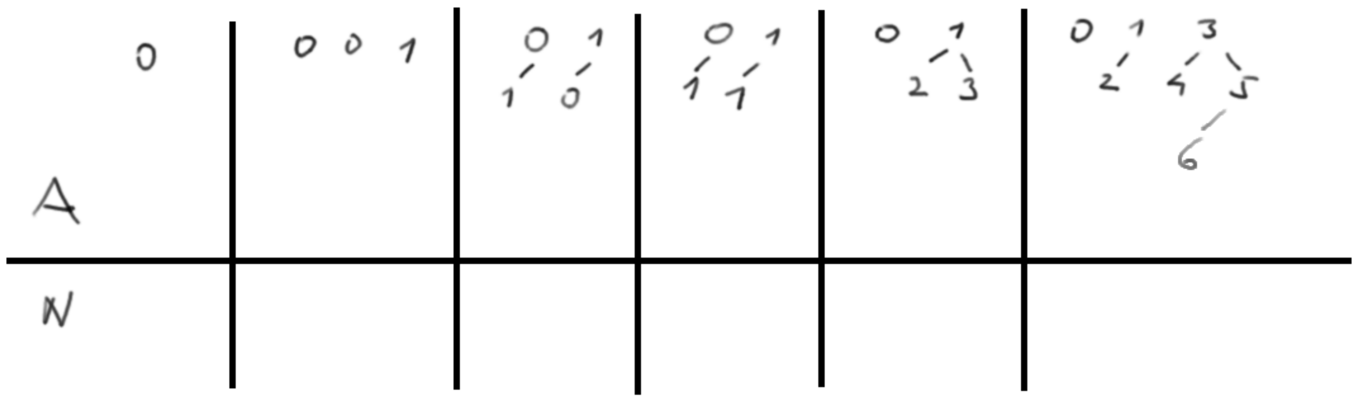
DELETE(5)



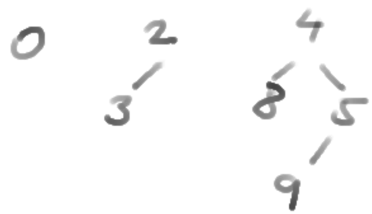
DECREASEKEY(20, 20)



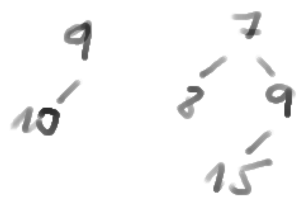
Binomiální haldy?



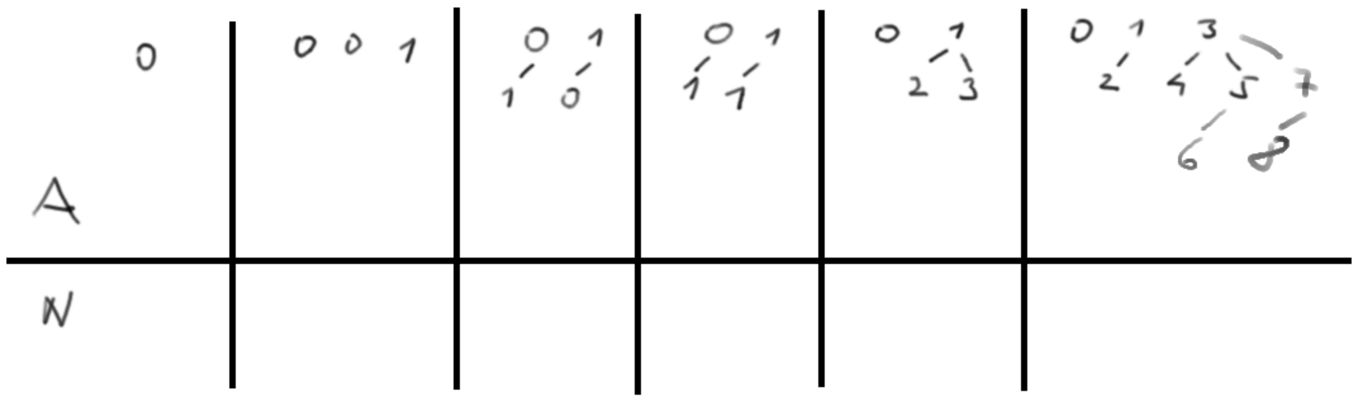
INSERT(1)



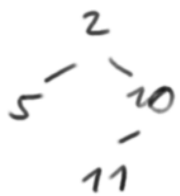
DELETEMIN()



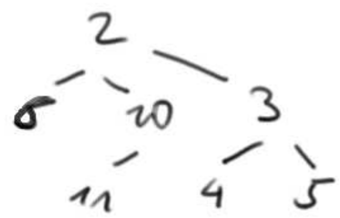
Fibonacciho haldy?



INSERT (1)



DECREASEKEY(5,3) a DECREASEKEY(4,2)



Př. 4/1: binární halda

Z binární haldy obsahující n^3 prvků, jejíž kořen obsahuje nejmenší hodnotu z celé haldy, odstraníme $n^2 lg(n)$ nejmenších prvků. Jaká je asymptotická složitost této akce? Bude složitost jiná, pokud halda nebude binární, ale binomiální?

Př. 4/2: d-ární halda

Je dána d-ární halda s hloubkou h, jejíž všechny listy leží ve stejné hloubce. Jaký je maximální možný a jaký je minimální možný počet porovnání dvou klíčů když v této haldě provedeme operaci deleteMin?

Př. 4/3: binomiální halda

Jaký je nejvyšší možný stupeň uzlu (stupeň = počet synů) v binomiální haldě s N klíči?

Př. 4/4*: reprezentace binomiální haldy

Uzel v binomiální haldě může mít stupeň (= počet synů) vyšší než dva a obecně stupeň uzlu není shora omezen. Uzel odkazuje na další binomiální stromy. Máme dvě možnosti: a) Odkazy jsou uspořádány v rostoucím pořadí velikostí podstromů, na které odkazují, b) odkazy jsou řazeny náhodně. Rozhodněte, jestli volba možností a), b) ovlivňuje rychlost implementace operací Insert, DeleteMin.

Př. 4/5: Fibonacciho halda

Do nejprve prázdné Fibonacciho haldy vložíme $2^n + 5$ navzájem různých klíčů ($n > 2$). Poté v haldě provedeme operaci DeleteMin včetně následující konzolidace haldy. Žádné jiné operace s haldou neprovádíme. Kolik binomiálních stromů s kořenem v kořenovém seznamu haldy bude halda obsahovat po této akci?

Př. 4/8: maximum v binomiální haldě

V binomiální haldě, která udržuje klíče s minimální hodnotou v kořenech svých stromů máme najít klíč s maximální hodnotou a poté ho z haldy vymazat. Zdůvodněte asymptotickou složitost této akce.

Př. 4/9*: kolik pojme binomiální halda?

Předpokládejme, že binomiální halda H obsahuje k binomiálních stromů $T_1, T_2, \ldots T_k$. Kolik celkem listů obsahuje celá halda H? Pokud H obsahuje n klíčů, jaká je maximální možná hodnota k v závislosti na n?