B4B33ALG:
Řešení samostatných úloh ze cvičení 8

Matouš Vrba

22. listopadu 2021

Úloha 3

Asymptotická složitost obou algoritmů je obecně $\mathrm{O}\left(N^2\right)$, kde N je rozsah vstupních dat. Po dosazení $N = 2n^3 \log(n)$ do asymptotické složitosti dostaneme

$$\mathrm{O}\left(\left[2n^3 \log(n)\right]^2\right) = \mathrm{O}\left(2n^6 \log(n)^2\right) = \mathrm{O}\left(n^6 \log(n)^2\right),$$

což je výsledná asymptotická složitost obou algoritmů ve vztahu k n.

Úloha 8

1. Výchozí stav: prvky na první a n-té pozici jsou největší (hodnota např. 10), ostatní prvky jsou menší a stejné (hodnota např. 2).

pozice:	1	2	3	4	$\cdots$	$n-2$	$n-1$	n
hodnota:	10	2	2	2	$\cdots$	2	2	10

2. Prvek na druhé pozici se porovná a prohodí s prvním: 1 porovnání, 2 zápisy (uvažujme prohození dvou prvků jako dva zápisy).

pozice:	1	2	3	4	$\cdots$	$n-2$	$n-1$	n
hodnota:	2	10	2	2	$\cdots$	2	2	10

3. Prvky na pozici 3 až $n-1$ se porovnají s se svým sousedem o pozici dříve (což je prvek původně na pozici 1), se kterým se prohodí (protože je větší), a potom ještě jednou s novým sousedem o pozici dříve, se kterým se neprohodí, protože je stejný: $2(n-3)$ porovnání, $2(n-3)$ zápisů.

pozice:	1	2	3	4	$\cdots$	$n-2$	$n-1$	n
hodnota:	2	2	2	2	$\cdots$	2	10	10

4. Poslední prvek v poli se porovná se sousedem o pozici dříve a neprohodí se (teď mají stejnou hodnotu): 1 porovnání.

pozice:	1	2	3	4	$\cdots$	$n-2$	$n-1$	n
hodnota:	2	2	2	2	$\cdots$	2	10	10

Celkem: $1 + 2(n-3) + 1 = 2n - 4$ porovnání a $2 + 2(n-3) = 2n - 4$ zápisů.

Úloha 12

- Zpracování každého úseku Quicksortu má asymptotickou složitost $\Theta(n)$, kde n je počet prvků v úseku.
- Rozdělení a spojení podúseků má konstatní složitost.
- Pokud rozdělujeme úseky pokaždé na podúseky v poměru $1/4$ a $3/4$, můžeme n vstupních prvků rozdělit celkem $\log_{\frac{4}{3}}(n)$-krát.
- Výsledná asymptotická složitost tedy bude $\Theta(n \log(n))$ (až $\log_{\frac{4}{3}}(n)$ úrovní, každá s lineární složitostí zpracování).

Výše uvedenou myšlenku lze robustněji dokázat například substituční metodou. Pro horní odhad asymptotické složitosti:

$$T(n) = T\left(\frac{3n}{4}\right) + T\left(\frac{n}{4}\right) + n \leq cn\log(n) \tag{1}$$

$$T\left(\frac{3n}{4}\right) \leq c\frac{3n}{4}\log\left(\frac{3n}{4}\right), \tag{2}$$

$$T\left(\frac{n}{4}\right) \leq c\frac{n}{4}\log\left(\frac{n}{4}\right), \tag{3}$$

po dosazení (2) a (3) do (1):

$$\begin{aligned}
c\frac{3n}{4}\log\left(\frac{3n}{4}\right) + c\frac{n}{4}\log\left(\frac{n}{4}\right) + n &\leq cn\log(n), \\
3n\log\left(\frac{3n}{4}\right) + n\log\left(\frac{n}{4}\right) + c'n &\leq 4n\log(n), \\
3\log\left(\frac{3n}{4}\right) + \log\left(\frac{n}{4}\right) + c' &\leq 4\log(n), \\
3\log(3) + 3\log(n) - 3\log(4) + \log(n) - \log(4) + c' &\leq 4\log(n), \\
4\log(n) + 3\log(3) - 4\log(4) + c' &\leq 4\log(n), \\
3\log(3) - 4\log(4) + c' &\leq 0,
\end{aligned}$$

což platí například pro $c' = 4\log(4) - 3\log(3) \approx 2,249$ nezávisle na n. Obdobně můžeme dokázat i spodní odhad asymptotické složitosti. Vše vyjde stejně, až na nerovnítko, které bude obráceně, takže v posledním kroku dostaneme

$$3\log(3) - 4\log(4) + c' \geq 0,$$

což platí pro $c' > 4\log(4) - 3\log(3)$, například $c = 3$. Můžeme tedy říct, že odhad optimální asymptotické složitosti Quicksortu pro takto zadaná data a volbu pivota je $\Theta\left(n\log(n)\right)$.