Řešení samostatných úloh ze třetího cvičení předmětu ALG

Matouš Vrba

12. října 2021

Příklad 4)

Například:

```
int ff(int x, int y)
{
  if (x > 0)
    return ff(x-1, y)*y;
  return 1;
}
```

Příklad 10)

Ze zadání lze vyčíst, že

$$a = 2, \qquad b = 3, \qquad f(n) = n^2,$$

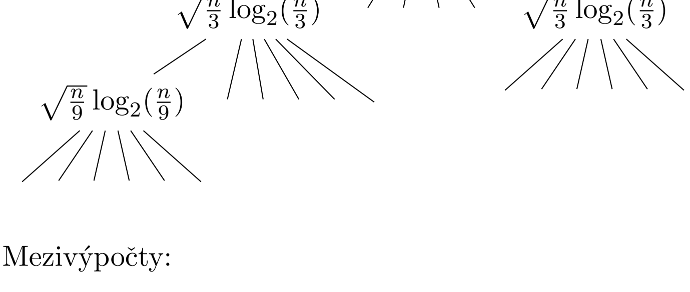
takže správně je možnost e), tedy

$$T(n) = 2T(n/3) + n^2.$$

Příklad 12)

Řešení pomocí stromu rekurze

První tři úrovně stromu rekurze:



Mezivýpočty:

- rekurentní vzorec: $T(n) = 6T\left(\frac{n}{3}\right) + \sqrt{n}\log_2(n)$,
- hloubka stromu: $h = \log_3(n)$,
- počet uzlů v i-té úrovni: $u_i = 6^i$,
- počet listů: $L = 6^{\log_3(n)} = n^{\log_3(6)}$,
- odhad optimální asymptotické složitosti zpracování listů: $T_h \in \Theta\left(n^{\log_3(6)}\right)$,
- počet operací na zpracování všech uzlů i-té úrovně:

$$T_i = \sqrt{6^i\left(\frac{n}{3^i}\right)}\log_2\left(\frac{n}{3^i}\right) = \sqrt{n}\log_2(n)\left(\frac{6}{\sqrt{3}}\right)^i - \sqrt{n}\log_2(3)i\left(\frac{6}{\sqrt{3}}\right)^i,$$

- počet operací na zpracování všech vnitřních uzlů:

$$T_{\text{vni}} = \sum_{i=0}^{\log_3(n)-1}\left(\sqrt{n}\log_2(n)\left(\frac{6}{\sqrt{3}}\right)^i - \sqrt{n}\log_2(3)i\left(\frac{6}{\sqrt{3}}\right)^i\right).$$

Rozdělme T_{vni} na dvě části, a to součet geometrické řady A, kde

$$A = \sum_{i=0}^{\log_3(n)-1}\sqrt{n}\log_2(n)\left(\frac{6}{\sqrt{3}}\right)^i,$$

a součet aritmeticko-geometrické řady B, kde

$$B = \sum_{i=0}^{\log_3(n)-1}\sqrt{n}\log_2(3)i\left(\frac{6}{\sqrt{3}}\right)^i.$$

Protože víme, že výsledek $T_{\text{vni}} = A - B$ musí být kladný, musí platit $A > B$. Při vyšetřování asymptotické složitosti součtu funkcí stačí brát v potaz nejrychleji rostoucí funkci, takže nám stačí vyčíslit asymptotickou složitost součtu geometrické řady A.

Součet geometrické řady A

- Řešíme: $A = \sum_{i=1}^{\log_3(n)}\sqrt{n}\log_2(n)\left(\frac{6}{\sqrt{3}}\right)^{i-1} = \sqrt{n}\log_2(n)\sum_{i=1}^{\log_3(n)}\left(2\sqrt{3}\right)^{i-1}$.
- Součet geometrické posloupnosti: $\sum_{i=1}^{m} a_1 q^{i-1} = a_1\frac{q^m-1}{q-1}$.
- Po dosazení:

$$\begin{aligned}
A &= \sqrt{n}\log_2(n)\sum_{i=1}^{\log_3(n)}\left(\frac{6}{\sqrt{3}}\right)^{i-1} = \sqrt{n}\log_2(n)\frac{2\sqrt{3}^{\log_3(n)}-1}{2\sqrt{3}-1} = \sqrt{n}\log_2(n)\frac{n^{\log_3(2\sqrt{3})}-1}{2\sqrt{3}-1}\\
A &\in \Theta\left(\sqrt{n}\log_2(n)(n^{\log_3(2\sqrt{3})}-1)\right) = \Theta\left(\sqrt{n}\log_2(n)n^{\log_3(2\sqrt{3})} - \sqrt{n}\log_2(n)\right)\\
&= \Theta\left(\sqrt{n}\log_2(n)n^{\log_3(2\sqrt{3})}\right)
\end{aligned}$$

Odhad optimální asymptotické složitosti zpracování vnitřních uzlů je tedy

$$T_{\text{vni}} \in \Theta\left(\sqrt{n}\log_2(n)n^{\log_3(2\sqrt{3})}\right)$$

a odhad optimální asymptotické složitosti zpracování listů je

$$T_h \in \Theta\left(n^{\log_2(6)}\right).$$

Výsledný odhad je tedy

$$T_{\text{vni}} + T_h \in \Theta\left(\max(n^{\log_2(6)}, \sqrt{n}\log_2(n)n^{\log_3(2\sqrt{3})})\right).$$

Výsledek lze zjistit například limitou:

$$\lim_{n\to\infty} = \frac{n^{\log_2(6)}}{\sqrt{n}\log_2(n)n^{\log_3(2\sqrt{3})}} = \infty,$$

takže funkce $n^{\log_2(6)}$ roste rychleji a funkci $\sqrt{n}\log_2(n)n^{\log_3(2\sqrt{3})}$ můžeme zanedbat. Výsledná složitost celého algoritmu je tedy

$$T(n) \in \Theta\left(n^{\log_2(6)}\right).$$

Řešení pomocí substituční metody

Zkusme dokázat, že $T(n) \in \Theta\left(n^{\log_2(6)}\right)$ pomocí substituční metody. Musíme zvlášť dokázat, že funkce $n^{\log_2(6)}$ je horní i dolní odhad asymptotické složitosti.

Horní odhad asymptotické složitosti

Začněme s důkazem horního odhadu, tedy $T(n) \in \mathrm{O}(n^{\log_2(6)})$, kde $T(n) = 6T\left(\frac{n}{3}\right) + \sqrt{n}\log_2(n)$.

Chceme dokázat, že platí

$$T(n) \leq cn^{\log_2(6)}$$

pro nějaké $c > 0$ a $n_0 > 0$, pokud (indukční předpoklad)

$$T\left(\frac{n}{3}\right) \leq c\left(\frac{n}{3}\right)^{\log_2(6)}.$$

Z rekurentního vztahu:

$$T(n) = 6T\left(\frac{n}{3}\right) + \sqrt{n}\log_2(n) \leq 6c\left(\frac{n}{3}\right)^{\log_2(6)} + \sqrt{n}\log_2(n).$$

Zkusme dokázat, že existuje $c > 0$ takové, že pro každé $n > n_0$ platí

$$\begin{aligned}
6c\left(\frac{n}{3}\right)^{\log_2(6)} + \sqrt{n}\log_2(n) &\leq cn^{\log_2(6)} \\
6 \cdot 3^{-\log_2(6)}cn^{\log_2(6)} + \sqrt{n}\log_2(n) &\leq cn^{\log_2(6)} \\
\sqrt{n}\log_2(n) &\leq \left(1 - 6 \cdot 3^{-\log_2(6)}\right)cn^{\log_2(6)} \approx 0,649 \cdot cn^{\log_2(6)} \\
\sqrt{n}\log_2(n) &\leq c'n^{\log_2(6)}, \qquad c' > 0.
\end{aligned}$$

Stačí tedy dokázat, že $n^{\log_2(6)}$ je horním odhadem funkce $\sqrt{n}\log_2(n)$, což lze například limitou

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\log_2(n)}{n^{\log_2(6)}},$$

nebo prostou úvahou:

- funkce $\sqrt{n}$ i funkce $\log_2(n)$ rostou sublineárně, takže jejich násobek musí růst pomaleji, než $n \cdot n = n^2$,

- funkce $n^{\log_2(6)}$ roste rychleji, než n^2 (protože $\log_2(6) > 2$),

Dokázali jsme tedy, že pokud platí indukční předpoklad, pak platí

$$T(n) \leq cn^{\log_2(6)}$$

pro nějaké $c > 0$ a $n_0 > 0$. Zbývá dokázat, že

$$T(n_0) \leq cn_0^{\log_2(6)}$$

platí pro nějaké n_0. Například pro $n_0 = 4$ a $c = \frac{1}{1-6\cdot 3^{-\log_2(6)}}$:

$$\begin{aligned}\sqrt{n}\log_2(n) &\leq \left(1 - 6\cdot 3^{-\log_2(6)}\right) cn^{\log_2(6)}\\ \sqrt{4}\log_2(4) &\leq 4^{\log_2(6)} = 6^{\log_2(4)}\\ 4 &\leq 36.\end{aligned}$$

Takže $T(n) \in \mathrm{O}(n^{\log_2(6)})$.

Řešení pomocí Mistrovské věty

Zkusme možnost 1. Mistrovské věty (víme, že by měla vyjít), tedy:

$$f(n) \in \mathrm{O}\left(n^{\log_b(a)-\epsilon}\right), \epsilon > 0.$$

Pokud je tento výrok pravdivý, potom podle Mistrovské věty musí platit $T(n) \in \Theta\left(n^{\log_b(a)}\right)$.

Dosaďme ze zadání $a = 6$, $b = 2$, $f(n) = \sqrt{n}\log_2(n)$ a získáme výrok

$$\sqrt{n}\log_2(n) \in \mathrm{O}\left(n^{log_2(6)+\epsilon}\right), \epsilon > 0,$$

který chceme dokázat. Například pro $\epsilon = \log_2(6) - 2$ vyjde $n^{log_2(6)+\epsilon} = n^2$. Protože $\log_2(6) > 2$, tak $\epsilon > 0$. Nyní stačí použít podobnou úvahu, jako při dokazování horního odhadu v substituční metodě, abychom ukázali, že funkce $f(n) = \sqrt{n}\log_2(n)$ roste pomaleji, než n^2, a tedy že opravdu platí

$$T(n) \in \Theta\left(n^{\log_2(6)}\right).$$