

# Algoritmizace: 11. cvičení

Matouš Vrba

29. 11. 2020

# Dynamické programování

Dynamické programování je pro mě zatím:

- 1 Jednoduché
- 2 Složitě
- 3 Ani jedno

## Příklad 1

Najděte nejdelší rostoucí podposloupnost dané posloupnosti. Použijte dynamické programování.

5 8 11 13 9 4 1 2 0 3 7 10 12 6

## Příklad 1

Najděte nejdelší rostoucí podposloupnost dané posloupnosti. Použijte dynamické programování.

5 8 11 13 9 4 1 2 0 3 7 10 12 6

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
V[i]	5	8	11	13	9	4	1	2	0	3	7	10	12	6
p[i]														

d	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
iL[d]														
V[iL[d]]														

## Příklad 1

Najděte nejdelší rostoucí podposloupnost dané posloupnosti. Použijte dynamické programování.

5 8 11 13 9 4 1 2 0 3 7 10 12 6

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$V[i]$	5	8	11	13	9	4	1	2	0	3	7	10	12	6
$p[i]$														

$d$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$iL[d]$														
$V[iL[d]]$														

Kde  $V[i]$  je hodnota prvku na pozici  $i$  ve vstupním poli,  $p[i]$  je index předcházejícího prvku v posloupnosti,  $iL[d]$  je index posledního prvku v posloupnosti s délkou  $d$  a  $V[iL[d]]$  je hodnota tohoto prvku.

## Příklad 1

Najděte nejdelší rostoucí podposloupnost dané posloupnosti. Použijte dynamické programování.

5 8 11 13 9 4 1 2 0 3 7 10 12 6

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
V[i]	5	8	11	13	9	4	1	2	0	3	7	10	12	6
p[i]	-	1	2	3	2	-	-	7	-	8	10	11	12	10

d	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
iL[d]	9	8	10	14	12	13								
V[iL[d]]	0	2	3	6	10	12								

Délka výsledné sekvence je 6.

Jedná se o sekvenci: 1 2 3 7 10 12

## Příklad 3

Kolika různými způsoby lze ozávkovat součin matic ( $A, B, C, D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ )?

a  $A \times B \times C \times D$

b  $A \times B \times C \times D \times E$

## Příklad 3

Kolika různými způsoby lze ozávkovat součin matic ( $A, B, C, D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ )?

- a  $A \times B \times C \times D$ 
  - 1  $((A \times B) \times C) \times D$
  - 2  $(A \times (B \times C)) \times D$
  - 3  $A \times (B \times (C \times D))$
  - 4  $A \times ((B \times C) \times D)$
  - 5  $(A \times B) \times (C \times D)$
- b  $A \times B \times C \times D \times E$



## Příklad 3

Kolika různými způsoby lze ozávkovat součin matic ( $A, B, C, D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ )?

a  $A \times B \times C \times D : 5$

b  $A \times B \times C \times D \times E$

## Příklad 3

Kolika různými způsoby lze ozávkovat součin matic ( $A, B, C, D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ )?

a  $A \times B \times C \times D : 5$

b  $A \times B \times C \times D \times E : 14$

Catalanovo číslo:  $C_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$ , kde  $n$  je počet součinů.

## Příklad 5a

Určete, pro které hodnoty  $n$  je výhodnější vypočítat součin

①  $(A \times B) \times C$

②  $A \times (B \times C)$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times 2}, B \in \mathbb{R}^{2 \times 3}, C \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$$

## Příklad 5a

Rozměry matic po násobení obecně:

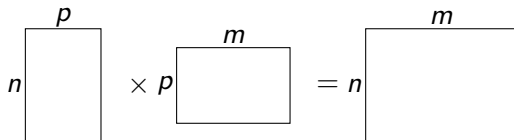
$$A \times B = C,$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times p},$$

$$B \in \mathbb{R}^{p \times m},$$

$$C \in \mathbb{R}^{n \times m},$$

$n \cdot p \cdot m$  operací

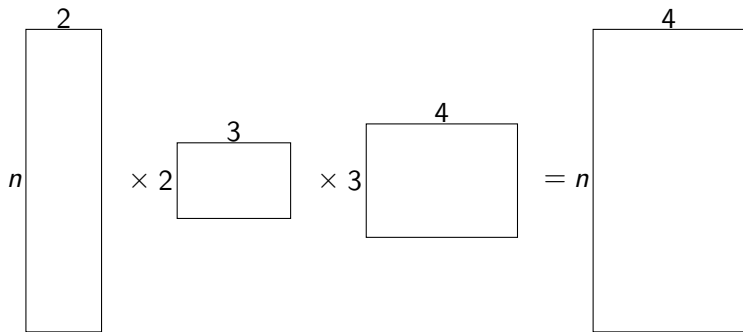


## Příklad 5a

Určete, pro které hodnoty  $n$  je výhodnější vypočítat součin

- 1  $(A \times B) \times C$
- 2  $A \times (B \times C)$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times 2}, B \in \mathbb{R}^{2 \times 3}, C \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$$



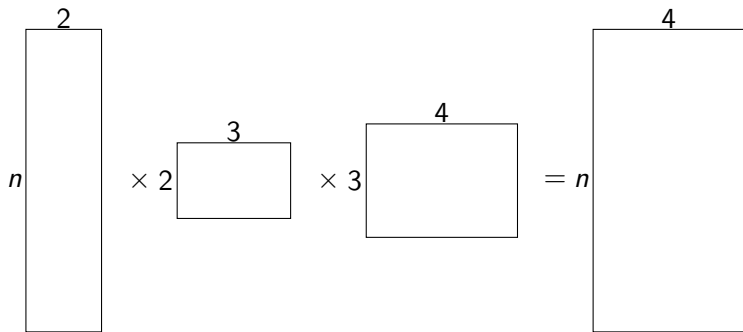
## Příklad 5a

Určete, pro které hodnoty  $n$  je výhodnější vypočítat součin

①  $(A \times B) \times C : n \cdot 2 \cdot 3 + n \cdot 3 \cdot 4 = 18n$

②  $A \times (B \times C)$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times 2}, B \in \mathbb{R}^{2 \times 3}, C \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$$



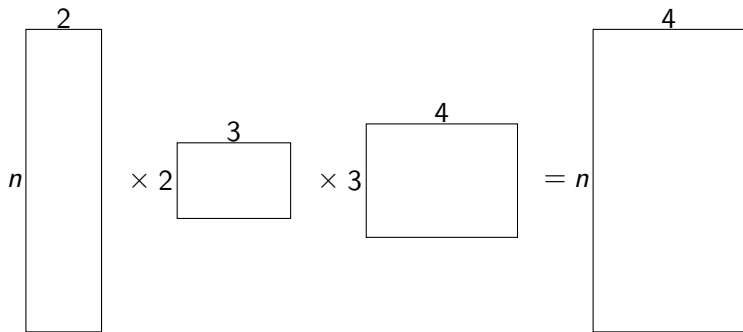
## Příklad 5a

Určete, pro které hodnoty  $n$  je výhodnější vypočítat součin

①  $(A \times B) \times C : n \cdot 2 \cdot 3 + n \cdot 3 \cdot 4 = 18n$

②  $A \times (B \times C) : 2 \cdot 3 \cdot 4 + n \cdot 2 \cdot 4 = 8n + 24$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times 2}, B \in \mathbb{R}^{2 \times 3}, C \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$$



## Příklad 6

Rozměry matic  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ , jsou po řadě:  $2 \times 5$ ,  $5 \times 3$ ,  $3 \times 6$ ,  $6 \times 2$ ,  $2 \times 4$ . Určete pomocí dynamického programování, jak uzávkovat součin  $A \times B \times C \times D \times E$ , aby počet operací násobení dvou čísel během výpočtu celého součinu byl co nejmenší. Kolik to bude operací?



## Příklad 6

Rozměry matic A, B, C, D, E, jsou po řadě:  $2 \times 5$ ,  $5 \times 3$ ,  $3 \times 6$ ,  $6 \times 2$ ,  $2 \times 4$ . Určete pomocí dynamického programování, jak uzávorkovat součin  $A \times B \times C \times D \times E$ , aby počet operací násobení dvou čísel během výpočtu celého součinu byl co nejmenší. Kolik to bude operací?

A:  $2 \times 5$

B:  $5 \times 3$

C:  $3 \times 6$

D:  $6 \times 2$

E:  $2 \times 4$

	A	B	C	D	E
A	$0_{2 \times 5}$				
B	-	$0_{5 \times 3}$			
C	-	-	$0_{3 \times 6}$		
D	-	-	-	$0_{6 \times 2}$	
E	-	-	-	-	$0_{2 \times 4}$

## Příklad 6

Rozměry matic A, B, C, D, E, jsou po řadě:  $2 \times 5$ ,  $5 \times 3$ ,  $3 \times 6$ ,  $6 \times 2$ ,  $2 \times 4$ . Určete pomocí dynamického programování, jak uzávorkovat součin  $A \times B \times C \times D \times E$ , aby počet operací násobení dvou čísel během výpočtu celého součinu byl co nejmenší. Kolik to bude operací?

A:  $2 \times 5$

B:  $5 \times 3$

C:  $3 \times 6$

D:  $6 \times 2$

E:  $2 \times 4$

	A	B	C	D	E
A	$0_{2 \times 5}$	$30_{2 \times 3}$	?		
B	-	$0_{5 \times 3}$	$90_{5 \times 6}$		
C	-	-	$0_{3 \times 6}$	$36_{3 \times 2}$	
D	-	-	-	$0_{6 \times 2}$	$48_{6 \times 4}$
E	-	-	-	-	$0_{2 \times 4}$

## Příklad 6

Rozměry matic A, B, C, D, E, jsou po řadě:  $2 \times 5$ ,  $5 \times 3$ ,  $3 \times 6$ ,  $6 \times 2$ ,  $2 \times 4$ . Určete pomocí dynamického programování, jak uzávorkovat součin  $A \times B \times C \times D \times E$ , aby počet operací násobení dvou čísel během výpočtu celého součinu byl co nejmenší. Kolik to bude operací?

A:  $2 \times 5$

B:  $5 \times 3$

C:  $3 \times 6$

D:  $6 \times 2$

E:  $2 \times 4$

	A	B	C	D	E
A	$0_{2 \times 5}$	$30_{2 \times 3}$	?		
B	-	$0_{5 \times 3}$	$90_{5 \times 6}$		
C	-	-	$0_{3 \times 6}$	$36_{3 \times 2}$	
D	-	-	-	$0_{6 \times 2}$	$48_{6 \times 4}$
E	-	-	-	-	$0_{2 \times 4}$

$A \times (B \times C)$  vs.  $(A \times B) \times C$

## Příklad 6

Rozměry matic  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ , jsou po řadě:  $2 \times 5$ ,  $5 \times 3$ ,  $3 \times 6$ ,  $6 \times 2$ ,  $2 \times 4$ . Určete pomocí dynamického programování, jak uzávkovat součin  $A \times B \times C \times D \times E$ , aby počet operací násobení dvou čísel během výpočtu celého součinu byl co nejmenší. Kolik to bude operací?

A:  $2 \times 5$

B:  $5 \times 3$

C:  $3 \times 6$

D:  $6 \times 2$

E:  $2 \times 4$

	A	B	C	D	E
A	$0_{2 \times 5}$	$30_{2 \times 3}$	$66_{2 \times 6}$		
B	-	$0_{5 \times 3}$	$90_{5 \times 6}$		
C	-	-	$0_{3 \times 6}$	$36_{3 \times 2}$	
D	-	-	-	$0_{6 \times 2}$	$48_{6 \times 4}$
E	-	-	-	-	$0_{2 \times 4}$

$$A \times (B \times C) \text{ vs. } \underline{(A \times B) \times C}$$

## Příklad 6

Rozměry matic A, B, C, D, E, jsou po řadě:  $2 \times 5$ ,  $5 \times 3$ ,  $3 \times 6$ ,  $6 \times 2$ ,  $2 \times 4$ . Určete pomocí dynamického programování, jak uzávkovat součin  $A \times B \times C \times D \times E$ , aby počet operací násobení dvou čísel během výpočtu celého součinu byl co nejmenší. Kolik to bude operací?

A:  $2 \times 5$

B:  $5 \times 3$

C:  $3 \times 6$

D:  $6 \times 2$

E:  $2 \times 4$

	A	B	C	D	E
A	$0_{2 \times 5}$	$30_{2 \times 3}$	$66_{2 \times 6}$		
B	-	$0_{5 \times 3}$	$90_{5 \times 6}$	$66_{5 \times 2}$	
C	-	-	$0_{3 \times 6}$	$36_{3 \times 2}$	
D	-	-	-	$0_{6 \times 2}$	$48_{6 \times 4}$
E	-	-	-	-	$0_{2 \times 4}$

$B \times (C \times D)$  vs.  $(B \times C) \times D$

## Příklad 6

Rozměry matic  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ , jsou po řadě:  $2 \times 5$ ,  $5 \times 3$ ,  $3 \times 6$ ,  $6 \times 2$ ,  $2 \times 4$ . Určete pomocí dynamického programování, jak uzávkovat součin  $A \times B \times C \times D \times E$ , aby počet operací násobení dvou čísel během výpočtu celého součinu byl co nejmenší. Kolik to bude operací?

A:  $2 \times 5$

B:  $5 \times 3$

C:  $3 \times 6$

D:  $6 \times 2$

E:  $2 \times 4$

	A	B	C	D	E
A	$0_{2 \times 5}$	$30_{2 \times 3}$	$66_{2 \times 6}$		
B	-	$0_{5 \times 3}$	$90_{5 \times 6}$	$66_{5 \times 2}$	
C	-	-	$0_{3 \times 6}$	$36_{3 \times 2}$	$60_{3 \times 4}$
D	-	-	-	$0_{6 \times 2}$	$48_{6 \times 4}$
E	-	-	-	-	$0_{2 \times 4}$

$$C \times (D \times E) \text{ vs. } \underline{(C \times D) \times E}$$

## Příklad 6

Rozměry matic  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ , jsou po řadě:  $2 \times 5$ ,  $5 \times 3$ ,  $3 \times 6$ ,  $6 \times 2$ ,  $2 \times 4$ . Určete pomocí dynamického programování, jak uzávorkovat součin  $A \times B \times C \times D \times E$ , aby počet operací násobení dvou čísel během výpočtu celého součinu byl co nejmenší. Kolik to bude operací?

A:  $2 \times 5$

B:  $5 \times 3$

C:  $3 \times 6$

D:  $6 \times 2$

E:  $2 \times 4$

	A	B	C	D	E
A	$0_{2 \times 5}$	$30_{2 \times 3}$	$66_{2 \times 6}$	$78_{2 \times 2}$	
B	-	$0_{5 \times 3}$	$90_{5 \times 6}$	$66_{5 \times 2}$	
C	-	-	$0_{3 \times 6}$	$36_{3 \times 2}$	$60_{3 \times 4}$
D	-	-	-	$0_{6 \times 2}$	$48_{6 \times 4}$
E	-	-	-	-	$0_{2 \times 4}$

$A \times (B \cdots D)$  vs.  $(A \times B) \times (C \times D)$  vs.  $(A \cdots C) \times D$

## Příklad 6

Rozměry matic A, B, C, D, E, jsou po řadě:  $2 \times 5$ ,  $5 \times 3$ ,  $3 \times 6$ ,  $6 \times 2$ ,  $2 \times 4$ . Určete pomocí dynamického programování, jak uzávorkovat součin  $A \times B \times C \times D \times E$ , aby počet operací násobení dvou čísel během výpočtu celého součinu byl co nejmenší. Kolik to bude operací?

A:  $2 \times 5$

B:  $5 \times 3$

C:  $3 \times 6$

D:  $6 \times 2$

E:  $2 \times 4$

	A	B	C	D	E
A	$0_{2 \times 5}$	$30_{2 \times 3}$	$66_{2 \times 6}$	$78_{2 \times 2}$	
B	-	$0_{5 \times 3}$	$90_{5 \times 6}$	$66_{5 \times 2}$	$106_{5 \times 4}$
C	-	-	$0_{3 \times 6}$	$36_{3 \times 2}$	$60_{3 \times 4}$
D	-	-	-	$0_{6 \times 2}$	$48_{6 \times 4}$
E	-	-	-	-	$0_{2 \times 4}$

$B \times (C \cdots E)$  vs.  $(B \times C) \times (D \times E)$  vs.  $(B \cdots D) \times E$



## Příklad 6

Rozměry matic A, B, C, D, E, jsou po řadě:  $2 \times 5$ ,  $5 \times 3$ ,  $3 \times 6$ ,  $6 \times 2$ ,  $2 \times 4$ . Určete pomocí dynamického programování, jak uzávorkovat součin  $A \times B \times C \times D \times E$ , aby počet operací násobení dvou čísel během výpočtu celého součinu byl co nejmenší. Kolik to bude operací?

A:  $2 \times 5$

B:  $5 \times 3$

C:  $3 \times 6$

D:  $6 \times 2$

E:  $2 \times 4$

	A	B	C	D	E
A	$0_{2 \times 5}$	$30_{2 \times 3}$	$66_{2 \times 6}$	$78_{2 \times 2}$	$94_{2 \times 4}$
B	-	$0_{5 \times 3}$	$90_{5 \times 6}$	$66_{5 \times 2}$	$106_{5 \times 4}$
C	-	-	$0_{3 \times 6}$	$36_{3 \times 2}$	$60_{3 \times 4}$
D	-	-	-	$0_{6 \times 2}$	$48_{6 \times 4}$
E	-	-	-	-	$0_{2 \times 4}$

$$A \times (B \cdots E) \text{ vs. } (A \times B) \times (C \cdots E) \\ \text{vs. } (A \cdots C) \times (D \times E) \text{ vs. } \underline{(A \cdots D) \times E}$$

# Samostatná práce

- Ve skupinách řešte úlohy 2c a 7.
- Odpovědi mi zašlete na e-mail [matous.vrba@fel.cvut.cz](mailto:matous.vrba@fel.cvut.cz).