Algoritmizace: 10. cvičení

Matouš Vrba

21. 11. 2021

Obsah cvičení

- Dynamické programování

Obsah cvičení

- Dynamické programování
  - Využívá již nalezených mezivýsledků úlohy.
  - Implementace většinou pomocí tabulky mezivýsledků.

Příklad 1

- Popište, jak byste výpočet hodnoty rekurzivní funkce $f(6,7)$ převedli na vyplňování hodnot v poli, když funkce f je rekurzivně definována takto:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= 0, \text{ pro } x = 0 \text{ nebo } y = 0,\\
f(x,y) &= f(x-1,y-1) + f(x-1,y) + f(x,y-1) + 1, \text{ jinak.}
\end{aligned}
$$

Příklad 1

- Popište, jak byste výpočet hodnoty rekurzivní funkce $f(6,7)$ převedli na vyplňování hodnot v poli, když funkce f je rekurzivně definována takto:

$$f(x,y) = 0, \text{ pro } x = 0 \text{ nebo } y = 0,$$
$$f(x,y) = f(x-1,y-1) + f(x-1,y) + f(x,y-1) + 1, \text{ jinak.}$$

x \y	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0							
2	0							
3	0							
4	0							
5	0							
6	0							

Příklad 4

- Ackermannova funkce $A(n, m)$ je definována rekurzivním zápisem

$$\begin{aligned} A(n, m) &= m + 1 && \text{pro } n = 0, \\ A(n, m) &= A(n-1, 1) && \text{pro } n > 0, m = 0, \\ A(n, m) &= A(n-1, A(n, m-1)) && \text{pro } n > 0, m > 0. \end{aligned}$$

- Jak lze interpretovat Ackermannovu funkci?

Příklad 4

- Ackermannova funkce $A(n, m)$ je definována rekurzivním zápisem

$$
\begin{aligned}
A(n, m) &= m + 1 && \text{pro } n = 0, \\
A(n, m) &= A(n-1, 1) && \text{pro } n > 0, m = 0, \\
A(n, m) &= A(n-1, A(n, m-1)) && \text{pro } n > 0, m > 0.
\end{aligned}
$$

- Dokážete určit hodnotu A(4,4)?

Příklad 4

- Ackermannova funkce $A(n, m)$ je definována rekurzivním zápisem

$$
\begin{aligned}
A(n, m) &= m + 1 && \text{pro } n = 0, \\
A(n, m) &= A(n-1, 1) && \text{pro } n > 0, m = 0, \\
A(n, m) &= A(n-1, A(n, m-1)) && \text{pro } n > 0, m > 0.
\end{aligned}
$$

- Dokážete určit hodnotu A(4,4)? $\rightarrow$ Hodnoty Ackermannovy funkce A(n,m) lze standarně zapisovat do tabulky.

Příklad 4

- Ackermannova funkce $A(n, m)$ je definována rekurzivním zápisem

$$
\begin{aligned}
A(n, m) &= m + 1 && \text{pro } n = 0, \\
A(n, m) &= A(n-1, 1) && \text{pro } n > 0, m = 0, \\
A(n, m) &= A(n-1, A(n, m-1)) && \text{pro } n > 0, m > 0.
\end{aligned}
$$

- Dokážete určit hodnotu A(4,4)? $\rightarrow$ Hodnoty Ackermannovy funkce A(n,m) lze standarně zapisovat do tabulky.

n \m	0	1	2	3	4
0	1	2	3	4	5
1					
2					
3					
4					

Příklad 4

- Ackermannova funkce $A(n,m)$ je definována rekurzivním zápisem

$$
\begin{aligned}
A(n,m) &= m+1 && \text{pro } n = 0,\\
A(n,m) &= A(n-1,1) && \text{pro } n > 0, m = 0,\\
A(n,m) &= A(n-1, A(n,m-1)) && \text{pro } n > 0, m > 0.
\end{aligned}
$$

- Dokážete určit hodnotu A(4,4)? $\rightarrow$ Hodnoty Ackermannovy funkce A(n,m) lze standarně zapisovat do tabulky.

n \m	0	1	2	3	4	5
0	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	
2						
3						
4						

Příklad 4

- Ackermannova funkce $A(n,m)$ je definována rekurzivním zápisem

$$
\begin{aligned}
A(n,m) &= m+1 && \text{pro } n=0,\\
A(n,m) &= A(n-1,1) && \text{pro } n>0, m=0,\\
A(n,m) &= A(n-1,A(n,m-1)) && \text{pro } n>0, m>0.
\end{aligned}
$$

- Dokážete určit hodnotu A(4,4)? $\rightarrow$ Hodnoty Ackermannovy funkce A(n,m) lze standarně zapisovat do tabulky.

n \m	0	1	2	3	4	5	
0	1	2	3	4	5	6	$\leftarrow m+1$
1	2	3	4	5	6	7	$\leftarrow m+2$
2	3	5	7	9	11	13	$\leftarrow 2m+3$
3	5	13	29	61	125	253	$\leftarrow 2^{m+3}-3$
4	13	65533	$2^{65533+3}-3$	$\cdots$	$\cdots$	NE	

Příklad 4

- Ackermannova funkce $A(n,m)$ je definována rekurzivním zápisem

$$\begin{aligned} A(n,m) &= m+1 && \text{pro } n=0, \\ A(n,m) &= A(n-1,1) && \text{pro } n>0, m=0, \\ A(n,m) &= A(n-1, A(n,m-1)) && \text{pro } n>0, m>0. \end{aligned}$$

- Dokážete určit hodnotu A(4,4)? $\rightarrow$ Hodnoty Ackermannovy funkce A(n,m) lze standarně zapisovat do tabulky.

n \m	0	1	2	3	4	5	
0	1	2	3	4	5	6	$\leftarrow 2[0]m$
1	2	3	4	5	6	7	$\leftarrow 2[1]m$
2	3	5	7	9	11	13	$\leftarrow 2[2](m+3)$
3	5	13	29	61	125	253	$\leftarrow 2[3](m+3)-3$
4	13	65533	$2^{2^{2^{2^{2}}}}-3$	$\cdots$	$\cdots$	NE	$\leftarrow 2[4](m+2)-3$

Příklad 5a

- Určete topologické uspořádání DAG G1. Uzly G1 jsou číslovány 0,1, 2, ..., 7 a jeho seznam hran je

$$E(G1) = \{(0,1),(0,4),(1,2),(1,7),(4,2),(4,3),(4,6),\\ (5,0),(5,1),(5,4),(6,2),(6,7),(7,3)\}$$

Příklad 5a

- Určete topologické uspořádání DAG G1. Uzly G1 jsou číslovány 0,1, 2, ..., 7 a jeho seznam hran je

$$E(G1) = \{(0,1),(0,4),(1,2),(1,7),(4,2),(4,3),(4,6),\\ (5,0),(5,1),(5,4),(6,2),(6,7),(7,3)\}$$

Topologické uspořádání: *Každá hrana vede z uzlu s nižším pořadím do uzlu s vyšším pořadím.*

Příklad 5a

- Určete topologické uspořádání DAG G1. Uzly G1 jsou číslovány 0,1, 2, ..., 7 a jeho seznam hran je

$$E(G1) = \{(0,1),(0,4),(1,2),(1,7),(4,2),(4,3),(4,6),\\ (5,0),(5,1),(5,4),(6,2),(6,7),(7,3)\}$$

Topologické uspořádání: *Každá hrana vede z uzlu s nižším pořadím do uzlu s vyšším pořadím.*

$$E(G1) = \{(0,1),(0,4),(1,2),(1,7),(2,4),(3,4),(4,6),\\ (0,5),(1,5),(4,5),(2,6),(6,7),(3,7)\}$$

Příklad 7

- Popište, jak metodou DP určíte počet všech cest délky 3 v neváženém DAG, bez toho, že byste tyto cesty skutečně konstruovali nebo jednotlivě procházeli.
  Návod: V každém uzlu registrujte, kolik v něm končí cest délky 1, kolik cest délky 2, kolik cest délky 3.

Příklad 7

- Popište, jak metodou DP určíte počet všech cest délky 3 v neváženém DAG, bez toho, že byste tyto cesty skutečně konstruovali nebo jednotlivě procházeli.
  Návod: V každém uzlu registrujte, kolik v něm končí cest délky 1, kolik cest délky 2, kolik cest délky 3.

Stačí procházet BFS celý DAG a pamatovat si počet uzlů s hloubkou ≥ 3.

Samostatná práce

- Ve skupinách řešte úlohy 3, a 8 z první prezentace a 2 z druhé prezentace.
- Odpovědi zašlete na e-mail matous.vrba@fel.cvut.cz, s předmětem ALG10.