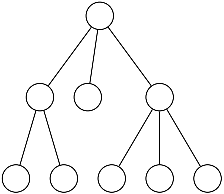
Algoritmizace: 4. cvičení

Matouš Vrba

10. 10. 2021

Strom

- Hierarchická datová struktura
- Skládá se z *uzlů* a *hran*
- Každý uzel má rodiče a může mít potomky
  - *Kořen* je speciální uzel, který nemá žádného rodiče
- Teorie grafů: strom je acyklický souvislý graf
- Rekurzivně: každý podstrom je stromem
- Stromy binární, ternární, ...



Průchod binárním stromem

- Tři způsoby průchodu do hloubky:
  1. Pre-order
  2. In-order
  3. Post-order
- Předpona určuje pořadí zpracování uzlů:
  1. Pre-order: zpracuj aktuální uzel, pak levý podstrom, pak pravý podstrom
  2. In-order: zpracuj levý podstrom, pak aktuální uzel, pak pravý podstrom
  3. Post-order: zpracuj levý podstrom, pak pravý podstrom, pak aktuální uzel

Příklad 1

Jaká je minimální možná hloubka h binárního stromu s 300 listy? Jak bude takový strom vypadat?

Příklad 1

Jaká je minimální možná hloubka h binárního stromu s 300 listy? Jak bude takový strom vypadat?

Vyvážený binární strom (co to je?). V poslední úrovni 2^h listů. Takže

$$h = \lceil \log_2(300) \rceil = 8.$$

Příklad 1

Jaká je minimální možná hloubka h binárního stromu s 300 listy? Jak bude takový strom vypadat?

Vyvážený binární strom (co to je?). V poslední úrovni 2^h listů. Takže

$$h = \lceil \log_2(300) \rceil = 8.$$

Vyvážený binární strom: hloubka podstromů se od sebe liší maximálně o jedna.

Příklad 3

Pravidelný binární strom (co je to?) má N uzlů. Kolik má listů?

Příklad 3

Pravidelný binární strom (co je to?) má N uzlů. Kolik má listů?

Pravidelný binární strom: počet potomků každého uzlu je buď 0, nebo 2.

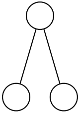
Příklad 3

Pravidelný binární strom (co je to?) má N uzlů. Kolik má listů?

Pravidelný binární strom: počet potomků každého uzlu je buď 0, nebo 2.

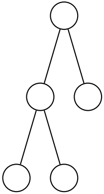
$N = 1$

$L = 1$



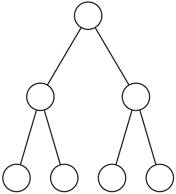
$N = 1 + 2 = 3$

$L = 2$



$N = 1 + 2 \cdot 2 = 5$

$L = 3$



$N = 1 + 3 \cdot 2 = 5$

$L = 4$

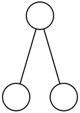
Příklad 3

Pravidelný binární strom (co je to?) má N uzlů. Kolik má listů?

Pravidelný binární strom: počet potomků každého uzlu je buď 0, nebo 2.

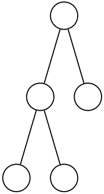
$N = 1$

$L = 1$



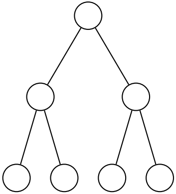
$N = 1 + 2 = 3$

$L = 2$



$N = 1 + 2 \cdot 2 = 5$

$L = 3$



$N = 1 + 3 \cdot 2 = 5$

$L = 4$

Když $N = 1 + 2k$, tak $L = k + 1$. Takže $k = \frac{N-1}{2}$ a zároveň $K = L - 1$.
Proto $L = \frac{N+1}{2}$.

Příklad 4

Daný binární strom má tři listy. Tudíž:

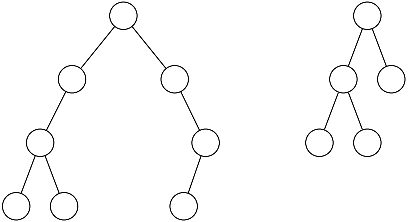
A. má nejvýše dva vnitřní uzly
B. počet vnitřních uzlů není omezen
C. všechny listy mají stejnou hloubku
D. všechny listy nemohou mít stejnou hloubku
E. strom je pravidelný

Příklad 4

Daný binární strom má tři listy. Tudíž:

- (A) má nejvýše dva vnitřní uzly
- ✓ počet vnitřních uzlů není omezen
- (C) všechny listy mají stejnou hloubku
- (D) všechny listy nemohou mít stejnou hloubku
- (E) strom je pravidelný

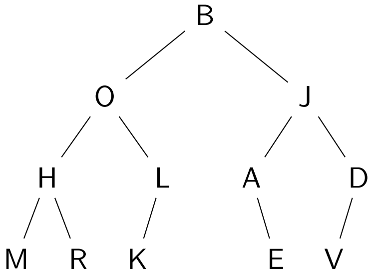
Protipříklad pro A,D,E a C:



Příklad 7

Určete posloupnost zpracovaných uzlů daného stromu při průchodu v pořadí

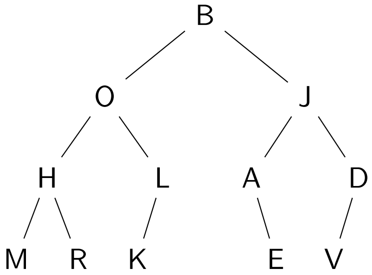
1. preorder
2. inorder
3. postorder



Příklad 7

Určete posloupnost zpracovaných uzlů daného stromu při průchodu v pořadí

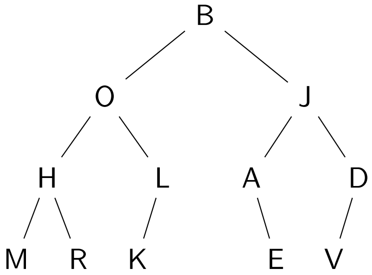
1. preorder: B, O, H, M, R, L, K, J, A, E, D, V
2. inorder
3. postorder



Příklad 7

Určete posloupnost zpracovaných uzlů daného stromu při průchodu v pořadí

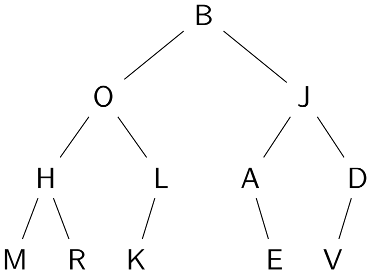
1. preorder: B, O, H, M, R, L, K, J, A, E, D, V
2. inorder: M, H, R, O, K, L, B, A, E, J, V, D
3. postorder



Příklad 7

Určete posloupnost zpracovaných uzlů daného stromu při průchodu v pořadí

1. preorder: B, O, H, M, R, L, K, J, A, E, D, V
2. inorder: M, H, R, O, K, L, B, A, E, J, V, D
3. postorder: M, R, H, K, L, O, E, A, V, D, J, B



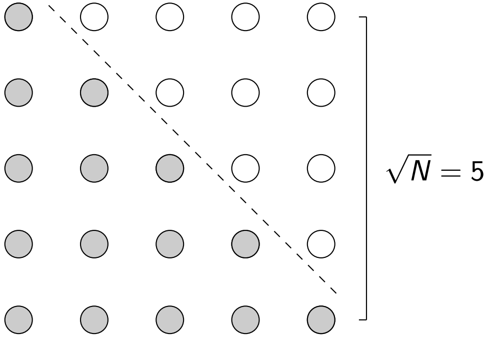
Příklad 10

Navrhněte algoritmus, který pro danou vstupní hodnotu N vytvoří binární strom s N prvky, jehož hloubka nebude vyjádřena výrazem $\Theta(log(N))$ ani $\Theta(N)$, ale výrazem $\Theta(N^{\frac{1}{2}})$.

Příklad 10

Navrhněte algoritmus, který pro danou vstupní hodnotu N vytvoří binární strom s N prvky, jehož hloubka nebude vyjádřena výrazem $\Theta(log(N))$ ani $\Theta(N)$, ale výrazem $\Theta(N^{\frac{1}{2}})$.

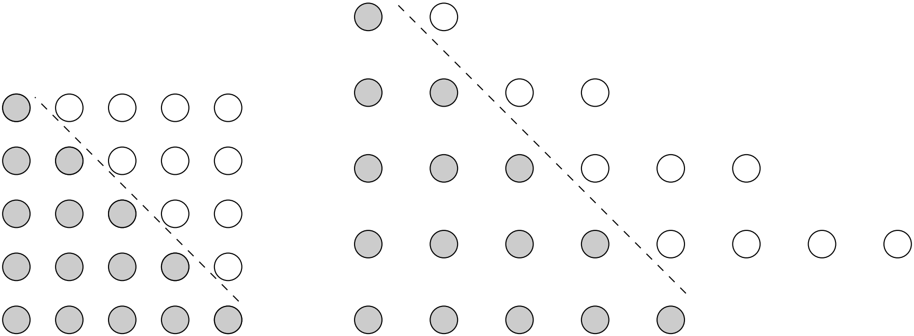
Pro $N = 25$:



Příklad 10

Navrhněte algoritmus, který pro danou vstupní hodnotu N vytvoří binární strom s N prvky, jehož hloubka nebude vyjádřena výrazem $\Theta(log(N))$ ani $\Theta(N)$, ale výrazem $\Theta(N^{\frac{1}{2}})$.

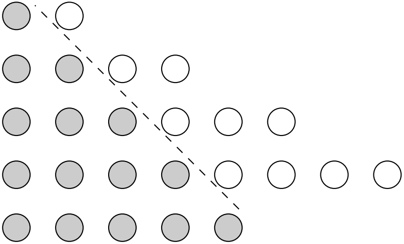
Pro $N = 25$:

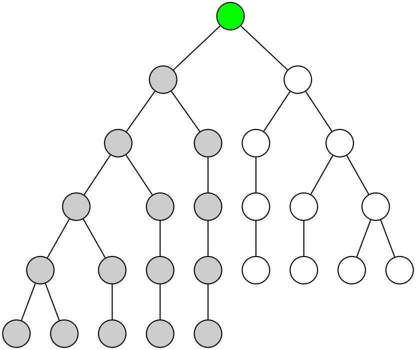


Příklad 10

Navrhněte algoritmus, který pro danou vstupní hodnotu N vytvoří binární strom s N prvky, jehož hloubka nebude vyjádřena výrazem $\Theta(log(N))$ ani $\Theta(N)$, ale výrazem $\Theta(N^{\frac{1}{2}})$.

Pro $N = 25$:





Příklad 11

Mějme pravidelný binární strom s N uzly. Kolik operací musíme udělat, abychom navštívili všechny uzly, jestliže v každém uzlu máme pouze dvě možnosti pohybu: posun do jednoho z bezprostředních potomků nebo skok zpět do kořene stromu. Řešte pro strom s

1. minimální možnou hloubkou
2. maximální možnou hloubkou

Příklad 11

Mějme pravidelný binární strom s N uzly. Kolik operací musíme udělat, abychom navštívili všechny uzly, jestliže v každém uzlu máme pouze dvě možnosti pohybu: posun do jednoho z bezprostředních potomků nebo skok zpět do kořene stromu. Řešte pro strom s

1. minimální možnou hloubkou
2. maximální možnou hloubkou

Když navštívíme všechny listy, navštívíme přitom i všechny vnitřní uzly.

Příklad 11

Mějme pravidelný binární strom s N uzly. Kolik operací musíme udělat, abychom navštívili všechny uzly, jestliže v každém uzlu máme pouze dvě možnosti pohybu: posun do jednoho z bezprostředních potomků nebo skok zpět do kořene stromu. Řešte pro strom s

1. minimální možnou hloubkou
2. maximální možnou hloubkou

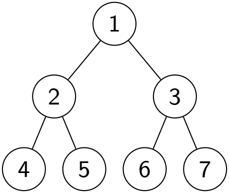
Když navštívíme všechny listy, navštívíme přitom i všechny vnitřní uzly.
Jak vypadá pravidelný binární strom s minimální možnou hloubkou?

Příklad 11

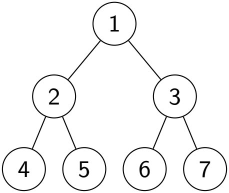
Mějme pravidelný binární strom s N uzly. Kolik operací musíme udělat, abychom navštívili všechny uzly, jestliže v každém uzlu máme pouze dvě možnosti pohybu: posun do jednoho z bezprostředních potomků nebo skok zpět do kořene stromu. Řešte pro strom s

1. minimální možnou hloubkou
2. maximální možnou hloubkou

Když navštívíme všechny listy, navštívíme přitom i všechny vnitřní uzly. Jak vypadá pravidelný binární strom s minimální možnou hloubkou?

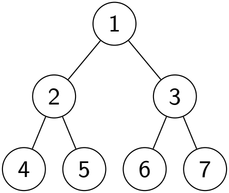


Příklad 11 A



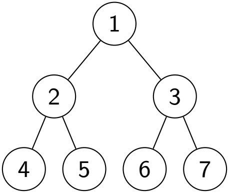
Algoritmus: doskákej do prvního listu, vrať se do kořene, opakuj pro ostatní listy.

Příklad 11 A



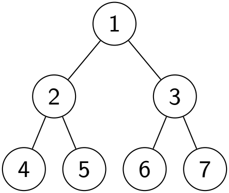
Algoritmus: doskákej do prvního listu, vrať se do kořene, opakuj pro ostatní listy.
Pravidelný binární strom s N uzly má $\frac{N+1}{2}$ listů (viz Př. 3).

Příklad 11 A



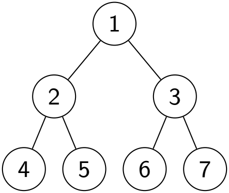
Algoritmus: doskákej do prvního listu, vrať se do kořene, opakuj pro ostatní listy.
Pravidelný binární strom s N uzly má $\frac{N+1}{2}$ listů (viz Př. 3).
Listy jsou v jaké hloubce?

Příklad 11 A



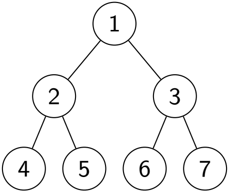
Algoritmus: doskákej do prvního listu, vrať se do kořene, opakuj pro ostatní listy.
Pravidelný binární strom s N uzly má $\frac{N+1}{2}$ listů (viz Př. 3).
Listy jsou v jaké hloubce? $\log_2(N)$

Příklad 11 A



Algoritmus: doskákej do prvního listu, vrať se do kořene, opakuj pro ostatní listy.
Pravidelný binární strom s N uzly má $\frac{N+1}{2}$ listů (viz Př. 3).
Listy jsou v jaké hloubce? $\log_2(N)$
Takže doskákat k jednomu listu zabere $\log_2(N)$ operací ($+$ 1 operace za vrácení do kořene).

Příklad 11 A



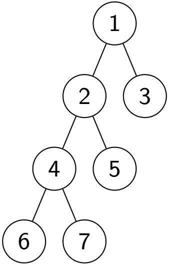
Algoritmus: doskákej do prvního listu, vrať se do kořene, opakuj pro ostatní listy.
Pravidelný binární strom s N uzly má $\frac{N+1}{2}$ listů (viz Př. 3).
Listy jsou v jaké hloubce? $\log_2(N)$
Takže doskákat k jednomu listu zabere $\log_2(N)$ operací ($+$ 1 operace za vrácení do kořene).
Proto $\left(\frac{N+1}{2}\right)(\log_2(N) + 1) \in \Theta(N \log(N))$.

Příklad 11 B

Jak vypadá pravidelný binární strom s maximální hloubkou?

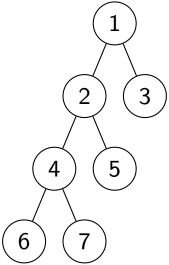
Příklad 11 B

Jak vypadá pravidelný binární strom s maximální hloubkou?



Příklad 11 B

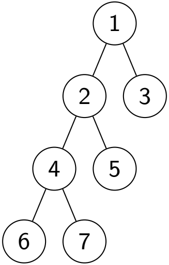
Jak vypadá pravidelný binární strom s maximální hloubkou?



Jaká je hloubka takového stromu pro N uzlů?

Příklad 11 B

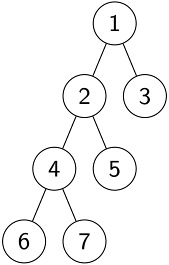
Jak vypadá pravidelný binární strom s maximální hloubkou?



Jaká je hloubka takového stromu pro N uzlů? $h = \frac{N-1}{2}$

Příklad 11 B

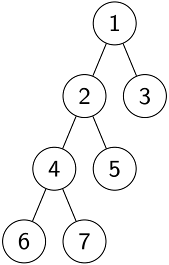
Jak vypadá pravidelný binární strom s maximální hloubkou?



Jaká je hloubka takového stromu pro N uzlů? $h = \frac{N-1}{2}$
Cesta k uzlu nejvíce vlevo zabere h operací ($+1$ vrácení do kořene).

Příklad 11 B

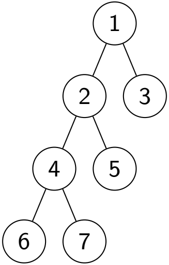
Jak vypadá pravidelný binární strom s maximální hloubkou?



Jaká je hloubka takového stromu pro N uzlů? $h = \frac{N-1}{2}$
Cesta k uzlu nejvíce vlevo zabere h operací ($+1$ vrácení do kořene).
Ostatní listy zaberou $\sum_{i=1}^{h} i + 1$.

Příklad 11 B

Jak vypadá pravidelný binární strom s maximální hloubkou?



Jaká je hloubka takového stromu pro N uzlů? $h = \frac{N-1}{2}$
Cesta k uzlu nejvíce vlevo zabere h operací ($+1$ vrácení do kořene).
Ostatní listy zaberou $\sum_{i=1}^{h} i + 1$.
Dohromady $\frac{N^2+8N-1}{8} \in \Theta(N^2)$.

Samostatná práce

- Ve skupinách řešte příklady 2, 3, 5, 8
- Odpovědi mi zašlete na e-mail matous.vrba@fel.cvut.cz.