Algoritmizace: 3. cvičení

Matouš Vrba

5. 10. 2021

Rekurzivní algoritmy

- Opakovaně dělíme problém na menší podproblémy, které umíme vyřešit a jejichž řešení zpětně využíváme pro poskládání výsledného řešení.
- „Funkce, co opakovaně volá sebe samu.“
- Příklady rekurzivních algoritmů?

Rekurzivní algoritmy

- Opakovaně dělíme problém na menší podproblémy, které umíme vyřešit a jejichž řešení zpětně využíváme pro poskládání výsledného řešení.
- „Funkce, co opakovaně volá sebe samu.“
- Příklady rekurzivních algoritmů?
  - Faktoriál: $N! = (N-1)! \cdot N = (N-2)! \cdot (N-1) \cdot N$
  - Fibonacciho posloupnost: $f(N) = f(N-2) + f(N-1) = f(N-3) + f(N-2) + f(N-1)$
  - Merge sort, Quick sort

Složitost rekurzivních algoritmů

- Složitost rekurzivních algoritmů vyjadřujeme rekurentním vztahem

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

Složitost rekurzivních algoritmů

- Složitost rekurzivních algoritmů vyjadřujeme rekurentním vztahem

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

- Pro převod na přímé vyjádření (ve smyslu O, Θ nebo Ω) máme tři metody:
  - Substituční metoda
  - Metoda rekurzivních stromů
  - Mistrovská věta (Master theorem)

Příklad 1

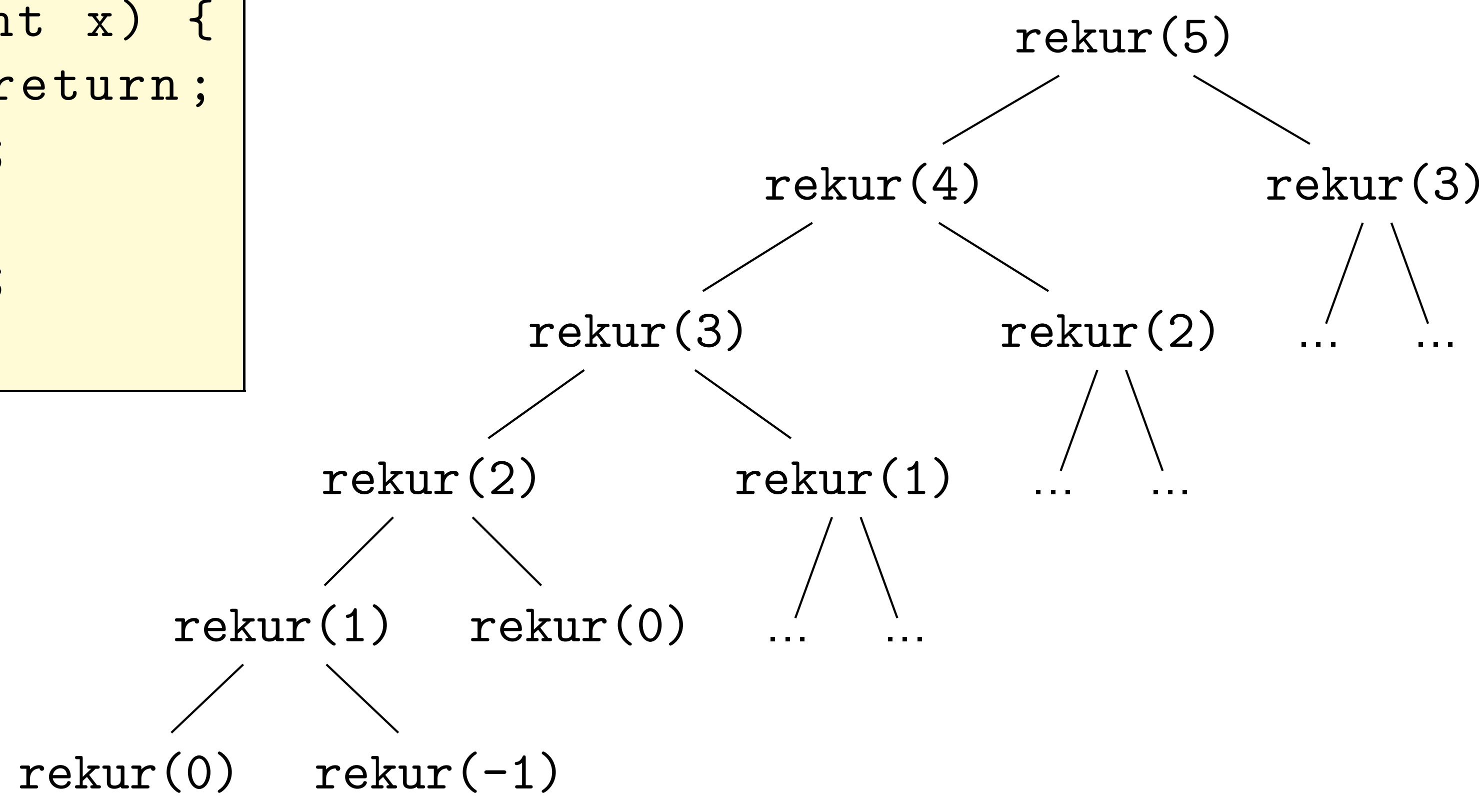
Kolikrát bude zavolána funkce `xyz` při zavolání `rekur(5)`?

```
void rekur(int x) {
  if(x < 1) return;
  rekur(x-1);
  xyz();
  rekur(x-2);
}
```

Příklad 1

Kolikrát bude zavolána funkce `xyz` při zavolání `rekur(5)`?

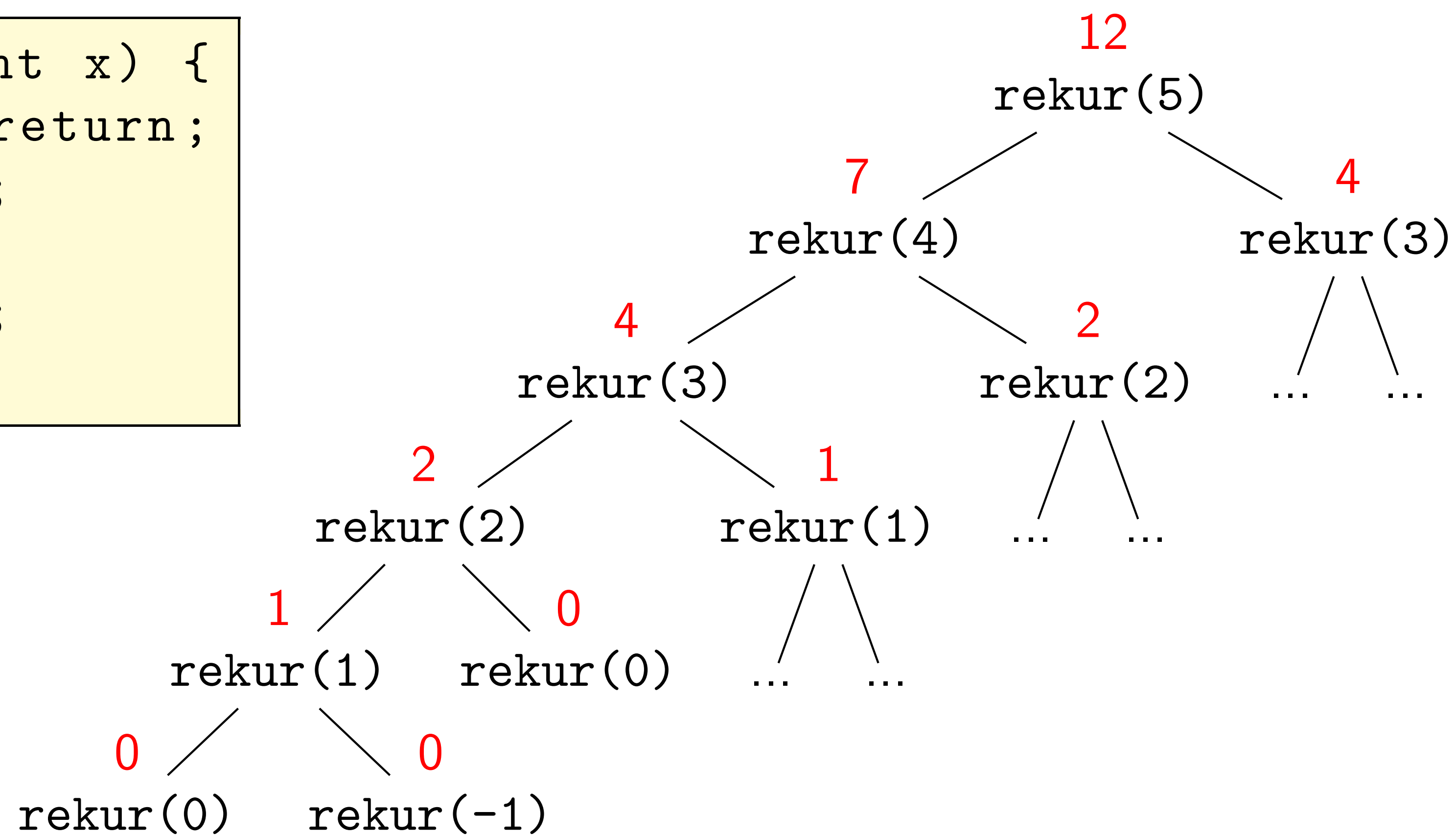
```
void rekur(int x) {
  if(x < 1) return;
  rekur(x-1);
  xyz();
  rekur(x-2);
}
```



Příklad 1

Kolikrát bude zavolána funkce `xyz` při zavolání `rekur(5)`?

```
void rekur(int x) {
  if(x < 1) return;
  rekur(x-1);
  xyz();
  rekur(x-2);
}
```



Příklad 3

Charakterizujte slovy, jakou hodnotu vrátí funkce `f` v závislosti na hodnotách jejích vstupních parametrů.

```
int f(int x, int y) {
  if(x > 0) return f(x - 1, y) + y;
  return 0;
}
```

Příklad 3

Charakterizujte slovy, jakou hodnotu vrátí funkce `f` v závislosti na hodnotách jejích vstupních parametrů.

```
int f(int x, int y) {
  if(x > 0) return f(x - 1, y) + y;
  return 0;
}
```

$$
\begin{aligned}
f(3,10) &= f(2,10) + 10 \\
&= f(1,10) + 10 + 10 \\
&= f(0,10) + 10 + 10 + 10 \\
&= 0 + 10 + 10 + 10
\end{aligned}
$$

Příklad 6

Napište rekurzivní funkci, která pro zadané číslo N vypíše řetězec skládající se z N jedniček následovaných $2N$ dvojkami. Pro dané N bude funkce volat sama sebe právě N-krát. Příklad: pro $N = 2$ vypíše 112222.

Příklad 6

Napište rekurzivní funkci, která pro zadané číslo N vypíše řetězec skládající se z N jedniček následovaných $2N$ dvojkami. Pro dané N bude funkce volat sama sebe právě N-krát. Příklad: pro $N = 2$ vypíše 112222.

```
def f(N):
    if N > 0:
        print(1)
        f(N - 1)
        print(2)
        print(2)
```

Příklad 9

Rekurzivní algoritmus $\mathcal{A}$ dělí úlohu o velikosti n na 2 stejné části. Každou část musí zpracovat dvakrát. Čas potřebný na rozdělení úlohy na části a na spojení dílčích řešení je úměrný hodnotě n. Jaký vztah popisuje složitost algoritmu $\mathcal{A}$?

A. $T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n$
B. $T(n) = nT\left(\frac{4n}{2}\right)$
C. $T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{4n}{2}$
D. $T(n) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + n$
E. $T(n) = nT\left(\frac{n}{2}\right) + n\log(n)$

Příklad 9

Rekurzivní algoritmus $\mathcal{A}$ dělí úlohu o velikosti n na 2 stejné části. Každou část musí zpracovat dvakrát. Čas potřebný na rozdělení úlohy na části a na spojení dílčích řešení je úměrný hodnotě n. Jaký vztah popisuje složitost algoritmu $\mathcal{A}$?

✓ $T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n$

B. $T(n) = nT\left(\frac{4n}{2}\right)$

C. $T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{4n}{2}$

D. $T(n) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + n$

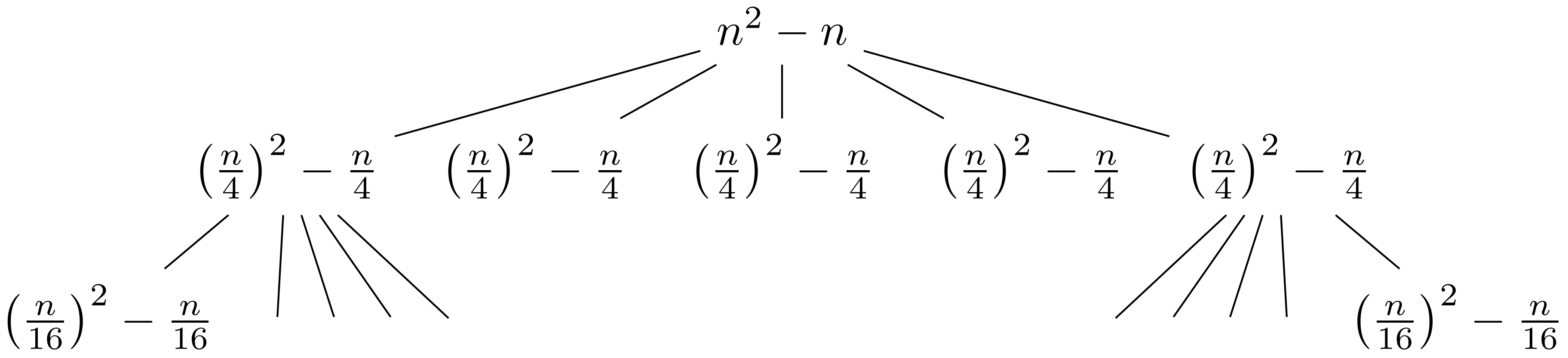
E. $T(n) = nT\left(\frac{n}{2}\right) + n\log(n)$

Příklad 11

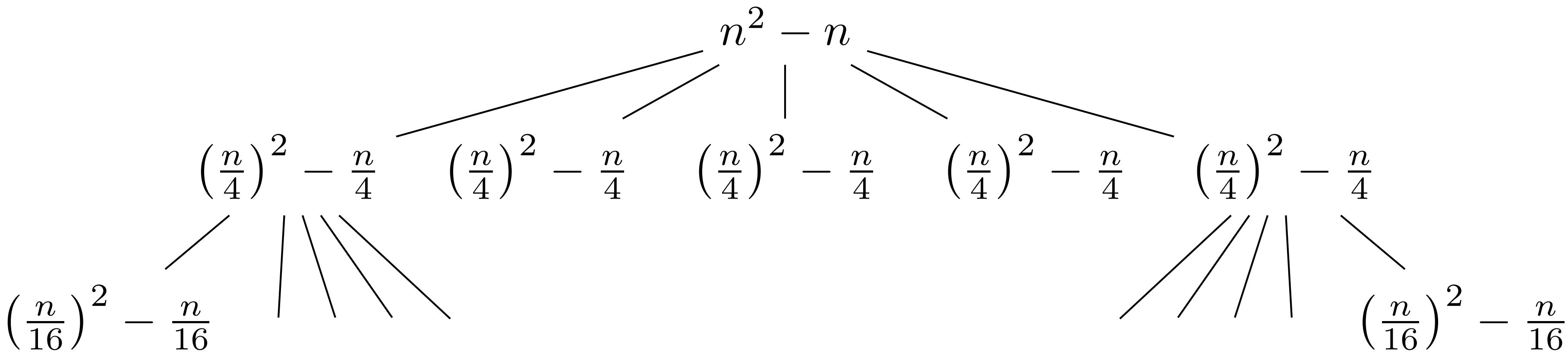
Rekurzivní algoritmus $\mathcal{A}$ pracuje tak, že pro $n > 1$ data rozdělí na 4 části stejné velikosti, zpracuje 5 těchto částí (tj. jednu dvakrát), a pak jejich řešení spojí. Na samotné rozdělení problému a spojení řešení menších částí potřebuje dobu úměrnou $n^2 - n$.
Určete asymptotickou složitost pomocí

1. stromu rekurze,
2. Mistrovské věty,
3. a substituční metody.

Příklad 11: strom rekurze

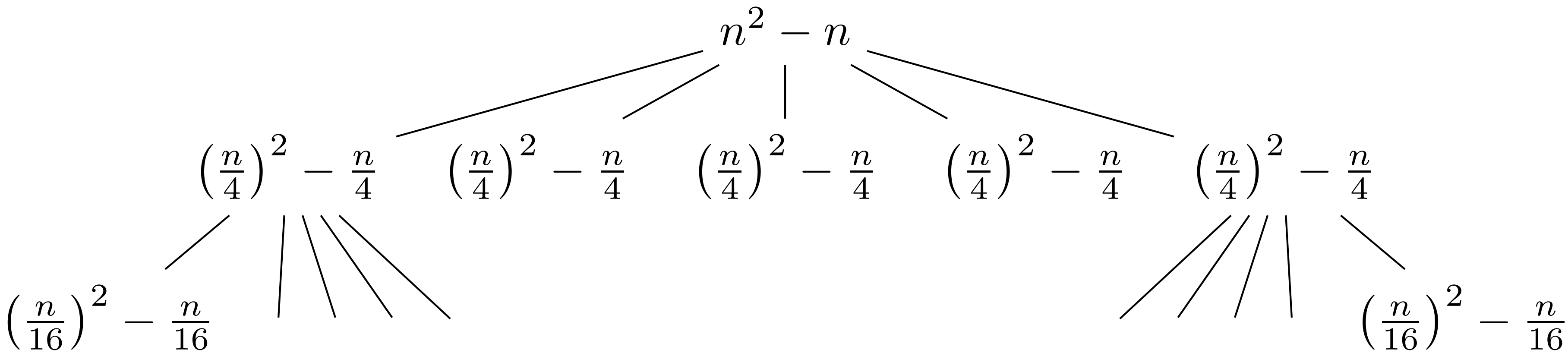


Příklad 11: strom rekurze



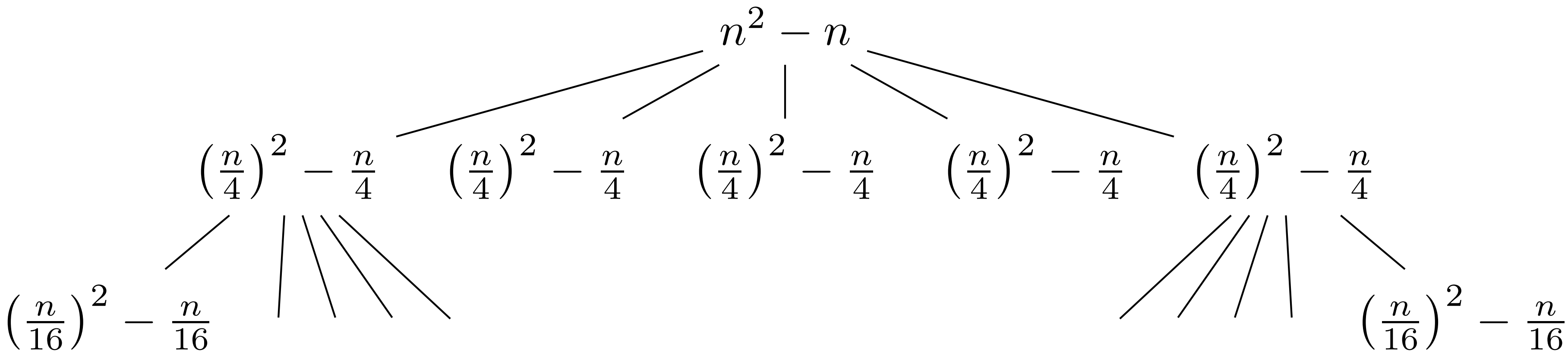
- ☐ Jaká je hloubka stromu (kořen je v 0-té úrovni)?

Příklad 11: strom rekurze



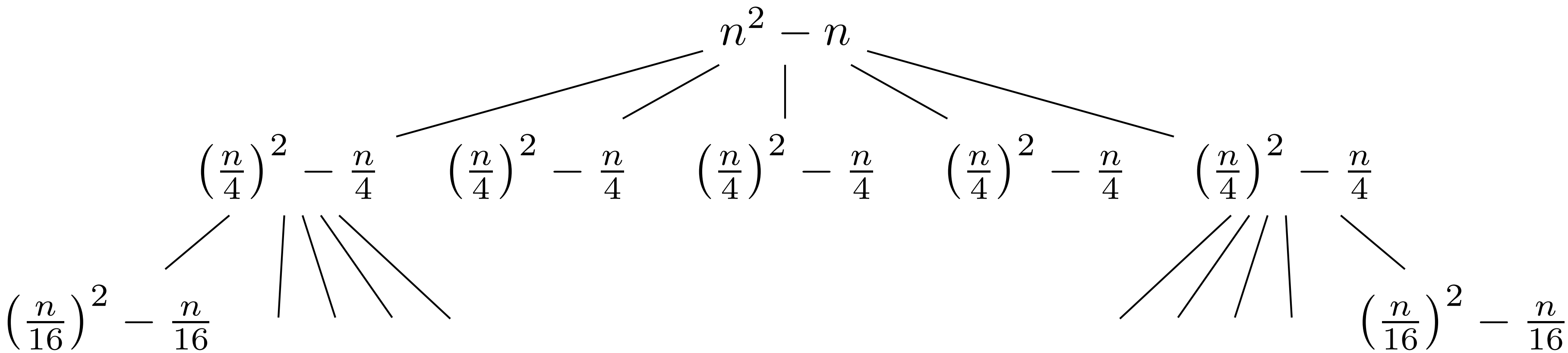
- Jaká je hloubka stromu (kořen je v 0-té úrovni)?
  - $\log_4(n)$, protože v každé úrovni dělíme problém na čtvrtiny.

Příklad 11: strom rekurze



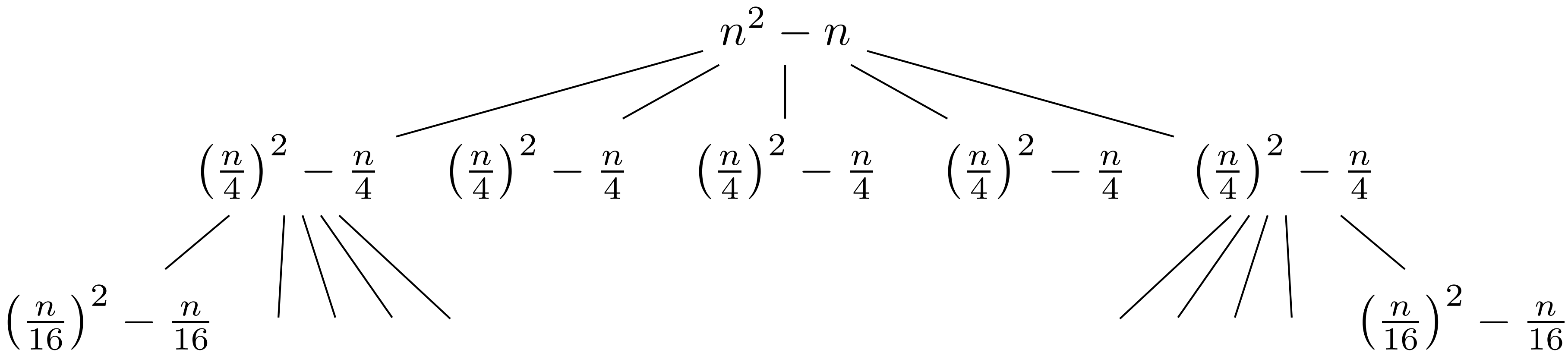
- Jaká je hloubka stromu (kořen je v 0-té úrovni)?
  - $\log_4(n)$, protože v každé úrovni dělíme problém na čtvrtiny.
- Kolik je v i-té úrovni uzlů?

Příklad 11: strom rekurze



- Jaká je hloubka stromu (kořen je v 0-té úrovni)?
  - $\log_4(n)$, protože v každé úrovni dělíme problém na čtvrtiny.
- Kolik je v i-té úrovni uzlů?
  - 5^i, protože v každé úrovni se počet uzlů zvětší 5-krát.
- Kolik operací proběhne v jednom uzlu v i-té úrovni?

Příklad 11: strom rekurze



- Jaká je hloubka stromu (kořen je v 0-té úrovni)?
  - $\log_4(n)$, protože v každé úrovni dělíme problém na čtvrtiny.
- Kolik je v i-té úrovni uzlů?
  - 5^i, protože v každé úrovni se počet uzlů zvětší 5-krát.
- Kolik operací proběhne v jednom uzlu v i-té úrovni?
  - $\left(\frac{n}{4^i}\right)^2 - \frac{n}{4^i}$, protože v i-té úrovni jsme problém zmenšili 4^i-krát.

Příklad 11: strom rekurze – pokračování

- Hloubka $d = \log_4(n)$, v i-té úrovni 5^i uzlů, každý $\left(\frac{n}{4^i}\right)^2 - \frac{n}{4^i}$ operací

Příklad 11: strom rekurze – pokračování

- Hloubka $d = \log_4(n)$, v i-té úrovni 5^i uzlů, každý $\left(\frac{n}{4^i}\right)^2 - \frac{n}{4^i}$ operací
- Kolik operací vyžaduje zpracování i-té úrovně?

Příklad 11: strom rekurze – pokračování

- Hloubka $d = \log_4(n)$, v i-té úrovni 5^i uzlů, každý $\left(\frac{n}{4^i}\right)^2 - \frac{n}{4^i}$ operací
- Kolik operací vyžaduje zpracování i-té úrovně?
  - $5^i\left[\left(\frac{n}{4^i}\right)^2 - \frac{n}{4^i}\right] = n^2\left(\frac{5}{16}\right)^i - n\left(\frac{5}{4}\right)^i, 0 \leq i \leq d-1$

Příklad 11: strom rekurze – pokračování

- Hloubka $d = \log_4(n)$, v i-té úrovni 5^i uzlů, každý $\left(\frac{n}{4^i}\right)^2 - \frac{n}{4^i}$ operací
- Kolik operací vyžaduje zpracování i-té úrovně?
  - $5^i \left[\left(\frac{n}{4^i}\right)^2 - \frac{n}{4^i}\right] = n^2 \left(\frac{5}{16}\right)^i - n \left(\frac{5}{4}\right)^i, 0 \leq i \leq d-1$
- V poslední úrovni jsou jen listy s konstantní složitostí – kolik jich je?

Příklad 11: strom rekurze – pokračování

- Hloubka $d = \log_4(n)$, v i-té úrovni 5^i uzlů, každý $\left(\frac{n}{4^i}\right)^2 - \frac{n}{4^i}$ operací
- Kolik operací vyžaduje zpracování i-té úrovně?
  - $5^i \left[\left(\frac{n}{4^i}\right)^2 - \frac{n}{4^i}\right] = n^2 \left(\frac{5}{16}\right)^i - n\left(\frac{5}{4}\right)^i, 0 \leq i \leq d-1$
- V poslední úrovni jsou jen listy s konstantní složitostí – kolik jich je?
  - Celkem $5^d = 5^{\log_4(n)} = n^?$

Příklad 11: strom rekurze – pokračování

- Hloubka $d = \log_4(n)$, v i-té úrovni 5^i uzlů, každý $\left(\frac{n}{4^i}\right)^2 - \frac{n}{4^i}$ operací
- Kolik operací vyžaduje zpracování i-té úrovně?
  - $5^i \left[\left(\frac{n}{4^i}\right)^2 - \frac{n}{4^i}\right] = n^2 \left(\frac{5}{16}\right)^i - n \left(\frac{5}{4}\right)^i, 0 \leq i \leq d-1$
- V poslední úrovni jsou jen listy s konstantní složitostí – kolik jich je?
  - Celkem $5^d = 5^{\log_4(n)} = n^?$:

$$\log_a(x) = \log_a(b) \cdot \log_b(x),$$

Příklad 11: strom rekurze – pokračování

- Hloubka $d = \log_4(n)$, v i-té úrovni 5^i uzlů, každý $\left(\frac{n}{4^i}\right)^2 - \frac{n}{4^i}$ operací
- Kolik operací vyžaduje zpracování i-té úrovně?
  - $5^i \left[\left(\frac{n}{4^i}\right)^2 - \frac{n}{4^i}\right] = n^2 \left(\frac{5}{16}\right)^i - n \left(\frac{5}{4}\right)^i, 0 \le i \le d-1$
- V poslední úrovni jsou jen listy s konstantní složitostí – kolik jich je?
  - Celkem $5^d = 5^{\log_4(n)} = n^?$:

$$\log_a(x) = \log_a(b) \cdot \log_b(x),$$

$$5^{\log_4(n)} = 5^{\log_4(5) \cdot \log_5(n)} = \left(5^{\log_5(n)}\right)^{\log_4(5)} = n^{\log_4(5)}.$$

Příklad 11: strom rekurze – pokračování

- Hloubka $d = \log_4(n)$, v i-té úrovni 5^i uzlů, každý $\left(\frac{n}{4^i}\right)^2 - \frac{n}{4^i}$ operací
- Kolik operací vyžaduje zpracování i-té úrovně?
  - $5^i\left[\left(\frac{n}{4^i}\right)^2 - \frac{n}{4^i}\right] = n^2\left(\frac{5}{16}\right)^i - n\left(\frac{5}{4}\right)^i, 0 \leq i \leq d-1$
- V poslední úrovni jsou jen listy s konstantní složitostí – kolik jich je?
  - Celkem $5^d = 5^{\log_4(n)} = n^?$:

$$\log_a(x) = \log_a(b) \cdot \log_b(x),$$

$$5^{\log_4(n)} = 5^{\log_4(5)\cdot\log_5(n)} = \left(5^{\log_5(n)}\right)^{\log_4(5)} = n^{\log_4(5)}.$$

  - Takže zpracování celé poslední úrovně je $\Theta\left(n^{\log_4(5)}\right)$.

Příklad 11: strom rekurze – pokračování

- Zpracování celé poslední úrovně je $\Theta\left(n^{\log_4(5)}\right)$.

Příklad 11: strom rekurze – pokračování

- Zpracování celé poslední úrovně je $\Theta\left(n^{\log_4(5)}\right)$.
- Kolik operací proběhne ve vnitřních uzlech?

Příklad 11: strom rekurze – pokračování

- Zpracování celé poslední úrovně je $\Theta\left(n^{\log_4(5)}\right)$.
- Kolik operací proběhne ve vnitřních uzlech?
  - Sčítáme přes všechny úrovně kromě té poslední, kde jsou listy.

$$\sum_{i=0}^{\log_4 n-1} n^2 \left(\frac{5}{16}\right)^i - n \left(\frac{5}{4}\right)^i = n^2 \sum_{i=1}^{\log_4 n} \left(\frac{5}{16}\right)^{i-1} - n \sum_{i=1}^{\log_4 n} \left(\frac{5}{4}\right)^{i-1}$$

Příklad 11: strom rekurze – pokračování

- Zpracování celé poslední úrovně je $\Theta\left(n^{\log_4(5)}\right)$.
- Kolik operací proběhne ve vnitřních uzlech?
  - Sčítáme přes všechny úrovně kromě té poslední, kde jsou listy.

$$\sum_{i=0}^{\log_4 n-1} n^2\left(\frac{5}{16}\right)^i - n\left(\frac{5}{4}\right)^i = n^2\sum_{i=1}^{\log_4 n}\left(\frac{5}{16}\right)^{i-1} - n\sum_{i=1}^{\log_4 n}\left(\frac{5}{4}\right)^{i-1}$$

  - To jsou součty geometrické posloupnosti

Příklad 11: strom rekurze – pokračování

- Zpracování celé poslední úrovně je $\Theta\left(n^{\log_4(5)}\right)$.
- Kolik operací proběhne ve vnitřních uzlech?
  - Sčítáme přes všechny úrovně kromě té poslední, kde jsou listy.

$$\sum_{i=0}^{\log_4 n-1} n^2\left(\frac{5}{16}\right)^i - n\left(\frac{5}{4}\right)^i = n^2\sum_{i=1}^{\log_4 n}\left(\frac{5}{16}\right)^{i-1} - n\sum_{i=1}^{\log_4 n}\left(\frac{5}{4}\right)^{i-1}$$

  - To jsou součty geometrické posloupnosti:

$$\sum_{i=1}^{k} a_1 q^{i-1} = a_1\frac{q^k-1}{q-1}, \qquad q \neq 1.$$

Příklad 11: strom rekurze – pokračování 2

- Zpracování listů v poslední úrovni $\Theta\left(n^{\log_4(5)}\right)$
- Zpracování všech vnitřních uzlů $n^2 \sum_{i=1}^{\log_4 n} \left(\frac{5}{16}\right)^{i-1} - n \sum_{i=1}^{\log_4 n} \left(\frac{5}{4}\right)^{i-1}$

Příklad 11: strom rekurze – pokračování 2

- Zpracování listů v poslední úrovni $\Theta\left(n^{\log_4(5)}\right)$
- Zpracování všech vnitřních uzlů $n^2 \sum_{i=1}^{\log_4 n} \left(\frac{5}{16}\right)^{i-1} - n \sum_{i=1}^{\log_4 n} \left(\frac{5}{4}\right)^{i-1}$
- Součet geometrické posloupnosti $\sum_{i=1}^{m} a_1 q^{i-1} = a_1 \frac{q^m - 1}{q-1} = a_1 \frac{1-q^m}{1-q}$

Příklad 11: strom rekurze – pokračování 2

- Zpracování listů v poslední úrovni $\Theta\left(n^{\log_4(5)}\right)$
- Zpracování všech vnitřních uzlů $n^2\sum_{i=1}^{\log_4 n}\left(\frac{5}{16}\right)^{i-1} - n\sum_{i=1}^{\log_4 n}\left(\frac{5}{4}\right)^{i-1}$
- Součet geometrické posloupnosti $\sum_{i=1}^{m} a_1 q^{i-1} = a_1\frac{q^m-1}{q-1} = a_1\frac{1-q^m}{1-q}$
- Celkem za celý strom (vnitřní uzly + listy):

$$\begin{aligned}
&\Theta\left(n^2\frac{1-\left(\frac{5}{16}\right)^{\log_4 n}}{1-\frac{5}{16}} - n\frac{1-\left(\frac{5}{4}\right)^{\log_4 n}}{1-\frac{5}{4}} + n^{\log_4 5}\right)\\
=&\Theta\left(\frac{16n^2}{11}\left(1-n^{\log_4\frac{5}{16}}\right) + 4n\left(1-n^{\log_4\frac{5}{4}}\right) + n^{\log_4 5}\right)\\
=&\Theta\left(\frac{16}{11}n^2 - \frac{16}{11}n^{\log_4 5} + 4n - 4n^{\log_4 5} + n^{\log_4 5}\right)\\
=&\Theta\left(n^2 + n - n^{\log_4 5}\right) = \Theta\left(n^2\right)
\end{aligned}$$

Příklad 11: Mistrovská věta

Pro rekurentní funkci $T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$, kde $a \geq 1$ a $b > 1$ platí:

1. pokud $f(n) \in \mathrm{O}\left(n^{\log_b(a)-\epsilon}\right), \epsilon > 0$,
   pak $T(n) \in \Theta\left(n^{\log_b(a)}\right)$,

Příklad 11: Mistrovská věta

Pro rekurentní funkci $T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$, kde $a \geq 1$ a $b > 1$ platí:

1. pokud $f(n) \in \mathrm{O}\left(n^{\log_b(a)-\epsilon}\right), \epsilon > 0$,
   pak $T(n) \in \Theta\left(n^{\log_b(a)}\right)$, (počet listů „přebije“ cenu větvení)

Příklad 11: Mistrovská věta

Pro rekurentní funkci $T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$, kde $a \geq 1$ a $b > 1$ platí:

1. pokud $f(n) \in \mathrm{O}\left(n^{\log_b(a)-\epsilon}\right), \epsilon > 0$,
   pak $T(n) \in \Theta\left(n^{\log_b(a)}\right)$, (počet listů „přebije" cenu větvení)
2. pokud $f(n) \in \Theta\left(n^{\log_b(a)}\right)$,
   pak $T(n) \in \Theta\left(n^{\log_b(a)}\log(n)\right)$,

Příklad 11: Mistrovská věta

Pro rekurentní funkci $T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$, kde $a \geq 1$ a $b > 1$ platí:

1. pokud $f(n) \in \mathrm{O}\left(n^{\log_b(a)-\epsilon}\right), \epsilon > 0$,
   pak $T(n) \in \Theta\left(n^{\log_b(a)}\right)$, (počet listů „přebije“ cenu větvení)
2. pokud $f(n) \in \Theta\left(n^{\log_b(a)}\right)$,
   pak $T(n) \in \Theta\left(n^{\log_b(a)} \log(n)\right)$,
3. pokud $f(n) \in \Omega\left(n^{\log_b(a)+\epsilon}\right), \epsilon > 0$, a $af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n), c < 1$,
   pak $T(n) \in \Theta\left(f(n)\right)$,

Příklad 11: Mistrovská věta

Pro rekurentní funkci $T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$, kde $a \geq 1$ a $b > 1$ platí:

1. pokud $f(n) \in \mathrm{O}\left(n^{\log_b(a)-\epsilon}\right), \epsilon > 0$,
   pak $T(n) \in \Theta\left(n^{\log_b(a)}\right)$, (počet listů „přebije" cenu větvení)
2. pokud $f(n) \in \Theta\left(n^{\log_b(a)}\right)$,
   pak $T(n) \in \Theta\left(n^{\log_b(a)} \log(n)\right)$,
3. pokud $f(n) \in \Omega\left(n^{\log_b(a)+\epsilon}\right), \epsilon > 0$, a $af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n), c < 1$,
   pak $T(n) \in \Theta\left(f(n)\right)$, (cena větvení „přebije" počet listů).

Příklad 11: Mistrovská věta

Pro rekurentní funkci $T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$, kde $a \geq 1$ a $b > 1$ platí:

1. pokud $f(n) \in \mathrm{O}\left(n^{\log_b(a)-\epsilon}\right), \epsilon > 0$,
   pak $T(n) \in \Theta\left(n^{\log_b(a)}\right)$, (počet listů „přebije" cenu větvení)
2. pokud $f(n) \in \Theta\left(n^{\log_b(a)}\right)$,
   pak $T(n) \in \Theta\left(n^{\log_b(a)}\log(n)\right)$,
3. pokud $f(n) \in \Omega\left(n^{\log_b(a)+\epsilon}\right), \epsilon > 0$, a $af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n), c < 1$,
   pak $T(n) \in \Theta\left(f(n)\right)$, (cena větvení „přebije" počet listů).

Ze zadání máme

$$T(n) = 5T\left(\frac{n}{4}\right) + (n^2 - n),$$

proto $a = 5$, $b = 4$ a $f(n) = n^2 - n$.

Příklad 11: Mistrovská věta

Pro rekurentní funkci $T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$, kde $a \geq 1$ a $b > 1$ platí:

1. pokud $f(n) \in \mathrm{O}\left(n^{\log_b(a)-\epsilon}\right), \epsilon > 0$,
   pak $T(n) \in \Theta\left(n^{\log_b(a)}\right)$, (počet listů „přebije“ cenu větvení)
2. pokud $f(n) \in \Theta\left(n^{\log_b(a)}\right)$,
   pak $T(n) \in \Theta\left(n^{\log_b(a)} \log(n)\right)$,
3. pokud $f(n) \in \Omega\left(n^{\log_b(a)+\epsilon}\right), \epsilon > 0$, a $af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n), c < 1$,
   pak $T(n) \in \Theta\left(f(n)\right)$, (cena větvení „přebije“ počet listů).

Ze zadání máme

$$T(n) = 5T\left(\frac{n}{4}\right) + (n^2 - n),$$

proto $a = 5$, $b = 4$ a $f(n) = n^2 - n$.
Zkusme třetí možnost.

Příklad 11: Mistrovská věta – pokračování

- Máme $a = 5$, $b = 4$ a $f(n) = n^2 - n$
- Platí $f(n) \in \Omega\left(n^{\log_b(a)+\epsilon}\right), \epsilon > 0$, a $af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n), c < 1$?

Příklad 11: Mistrovská věta – pokračování

- Máme $a = 5$, $b = 4$ a $f(n) = n^2 - n$
- Platí $f(n) \in \Omega\left(n^{\log_b(a)+\epsilon}\right), \epsilon > 0$, a $af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n), c < 1$?

1. Existuje takové $\epsilon > 0$, aby $(n^2 - n) \in \Omega\left(n^{\log_4(5)+\epsilon}\right)$?

Příklad 11: Mistrovská věta – pokračování

- ☐ Máme $a = 5$, $b = 4$ a $f(n) = n^2 - n$
- ☐ Platí $f(n) \in \Omega\left(n^{\log_b(a)+\epsilon}\right), \epsilon > 0$, a $af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n), c < 1$?

1. Existuje takové $\epsilon > 0$, aby $(n^2 - n) \in \Omega\left(n^{\log_4(5)+\epsilon}\right)$?
   Pro $\epsilon = 2 - \log_4(5)$ dostáváme $(n^2 - n) \in \Omega\left(n^2\right)$, což jistě platí, protože $(n^2 - n) \in \Theta(n^2)$.

Příklad 11: Mistrovská věta – pokračování

- Máme $a = 5$, $b = 4$ a $f(n) = n^2 - n$
- Platí $f(n) \in \Omega\left(n^{\log_b(a)+\epsilon}\right), \epsilon > 0$, a $af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n), c < 1$?

1. Existuje takové $\epsilon > 0$, aby $(n^2 - n) \in \Omega\left(n^{\log_4(5)+\epsilon}\right)$?
   Pro $\epsilon = 2 - \log_4(5)$ dostáváme $(n^2 - n) \in \Omega\left(n^2\right)$, což jistě platí, protože $(n^2 - n) \in \Theta(n^2)$.
2. Existuje takové $c < 1$, aby $5\left(\frac{n^2}{16} - \frac{n}{4}\right) \leq c(n^2 - n)$?

Příklad 11: Mistrovská věta – pokračování

- Máme $a = 5$, $b = 4$ a $f(n) = n^2 - n$
- Platí $f(n) \in \Omega\left(n^{\log_b(a)+\epsilon}\right), \epsilon > 0$, a $af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n), c < 1$?

1. Existuje takové $\epsilon > 0$, aby $(n^2 - n) \in \Omega\left(n^{\log_4(5)+\epsilon}\right)$?
   Pro $\epsilon = 2 - \log_4(5)$ dostáváme $(n^2 - n) \in \Omega\left(n^2\right)$, což jistě platí, protože $(n^2 - n) \in \Theta(n^2)$.
2. Existuje takové $c < 1$, aby $5\left(\frac{n^2}{16} - \frac{n}{4}\right) \leq c(n^2 - n)$?
   Pro $c = 5/16$:

$$5\left(\frac{n^2}{16} - \frac{n}{4}\right) \leq \frac{5}{16}(n^2 - n)$$
$$n^2 - 4n \leq n^2 - n$$

což platí pro $n > 0$, takže $T(n) \in \Theta(n^2 - n) = \Theta(n^2)$

Příklad 11: substituční metoda

Chceme ukázat, že $T(n) \in O(n^2)$, kde $T(n) = 5T\left(\frac{n}{4}\right) + (n^2 - n)$.

Příklad 11: substituční metoda

Chceme ukázat, že $T(n) \in O(n^2)$, kde $T(n) = 5T\left(\frac{n}{4}\right) + (n^2 - n)$.

Tzn. z definice: $T(n) \leq cn^2$ pro nějaké $c > 0$ a $n_0 > 0$.

Příklad 11: substituční metoda

Chceme ukázat, že $T(n) \in O(n^2)$, kde $T(n) = 5T\left(\frac{n}{4}\right) + (n^2 - n)$.

Tzn. z definice: $T(n) \leq cn^2$ pro nějaké $c > 0$ a $n_0 > 0$.

Myšlenka důkazu indukcí:

□ Dokažme, že pokud platí $T\left(\frac{n}{a}\right) \leq c\left(\frac{n}{a}\right)^2$, tak platí též $T(n) \leq cn^2$.

Příklad 11: substituční metoda

Chceme ukázat, že $T(n) \in O(n^2)$, kde $T(n) = 5T\left(\frac{n}{4}\right) + (n^2 - n)$.

Tzn. z definice: $T(n) \leq cn^2$ pro nějaké $c > 0$ a $n_0 > 0$.

Myšlenka důkazu indukcí:

- □ Dokažme, že pokud platí $T\left(\frac{n}{a}\right) \leq c\left(\frac{n}{a}\right)^2$, tak platí též $T(n) \leq cn^2$.
- □ Potom stačí jen dokázat, že $T(n_0) \leq cn_0^2$ platí pro nějaké n_0, a musí to platit i pro všechna $n = k \cdot b \cdot n_0, k \in \mathbb{N}^+$.

Příklad 11: substituční metoda - pokračování

Chceme dokázat, že platí $T(n) \leq cn^2$,
pokud $T\left(\frac{n}{4}\right) \leq c\left(\frac{n}{4}\right)^2$ (indukční předpoklad).

Příklad 11: substituční metoda - pokračování

Chceme dokázat, že platí $T(n) \leq cn^2$,
pokud $T\left(\frac{n}{4}\right) \leq c\left(\frac{n}{4}\right)^2$ (indukční předpoklad).
Z rekurentního vztahu:

$$T(n) = 5T\left(\frac{n}{4}\right) + (n^2 - n)$$

Příklad 11: substituční metoda - pokračování

Chceme dokázat, že platí $T(n) \le cn^2$,
pokud $T\left(\frac{n}{4}\right) \le c\left(\frac{n}{4}\right)^2$ (indukční předpoklad).
Z rekurentního vztahu:

$$T(n) = 5T\left(\frac{n}{4}\right) + (n^2 - n) \quad \le 5c\left(\frac{n}{4}\right)^2 + (n^2 - n)$$
$$= n^2\left(\frac{5c}{16} + 1\right) - n$$

Příklad 11: substituční metoda - pokračování

Chceme dokázat, že platí $T(n) \leq cn^2$,
pokud $T\left(\frac{n}{4}\right) \leq c\left(\frac{n}{4}\right)^2$ (indukční předpoklad).
Z rekurentního vztahu:

$$T(n) = 5T\left(\frac{n}{4}\right) + (n^2 - n) \quad \leq 5c\left(\frac{n}{4}\right)^2 + (n^2 - n)$$
$$= n^2\left(\frac{5c}{16} + 1\right) - n \leq cn^2$$

Platí např. pro $c = 16$.

Příklad 11: substituční metoda - pokračování

Chceme dokázat, že platí $T(n) \leq cn^2$,

pokud $T\left(\frac{n}{4}\right) \leq c\left(\frac{n}{4}\right)^2$ (indukční předpoklad).

Z rekurentního vztahu:

$$T(n) = 5T\left(\frac{n}{4}\right) + (n^2 - n) \qquad \leq 5c\left(\frac{n}{4}\right)^2 + (n^2 - n)$$
$$= n^2\left(\frac{5c}{16} + 1\right) - n \leq cn^2$$

Platí např. pro $c = 16$.

Stačí nalézt takové n_0, pro které vztah platí.

Příklad 11: substituční metoda - pokračování

Chceme dokázat, že platí $T(n) \leq cn^2$,
pokud $T\left(\frac{n}{4}\right) \leq c\left(\frac{n}{4}\right)^2$ (indukční předpoklad).
Z rekurentního vztahu:

$$T(n) = 5T\left(\frac{n}{4}\right) + (n^2 - n) \quad \leq 5c\left(\frac{n}{4}\right)^2 + (n^2 - n)$$
$$= n^2\left(\frac{5c}{16} + 1\right) - n \leq cn^2$$

Platí např. pro $c = 16$.

Stačí nalézt takové n_0, pro které vztah platí. Například pro $n_0 = 4$:

$$T(n) = 4^2\left(\frac{5 \cdot 16}{16} + 1\right) - 4 \quad \leq 16 \cdot 4^2,$$
$$92 \quad \leq 256.$$

Příklad 11: substituční metoda - pokračování

Chceme dokázat, že platí $T(n) \leq cn^2$,
pokud $T\left(\frac{n}{4}\right) \leq c\left(\frac{n}{4}\right)^2$ (indukční předpoklad).
Z rekurentního vztahu:

$$T(n) = 5T\left(\frac{n}{4}\right) + (n^2 - n) \quad \leq 5c\left(\frac{n}{4}\right)^2 + (n^2 - n)$$
$$= n^2\left(\frac{5c}{16} + 1\right) - n \leq cn^2$$

Platí např. pro $c = 16$.

Stačí nalézt takové n_0, pro které vztah platí. Například pro $n_0 = 4$:

$$T(n) = 4^2\left(\frac{5 \cdot 16}{16} + 1\right) - 4 \quad \leq 16 \cdot 4^2,$$
$$92 \quad \leq 256.$$

Obdobně bychom dokázali $T(n) \in \Omega(n^2)$.
Důsledek: $T(n) \in \Theta(n^2)$.

Samostatná práce

- Ve skupinách řešte příklady 4, 10, 12 včetně substituční metody
- Do řešení napište jména všech členů skupiny
- Vyfocené řešení (nebo jako PDF) odešlete do konce týdne na `matous.vrba@fel.cvut.cz` s předmětem *ALG 3*