Algoritmizace: 2. cvičení

Matouš Vrba

27. 9. 2020

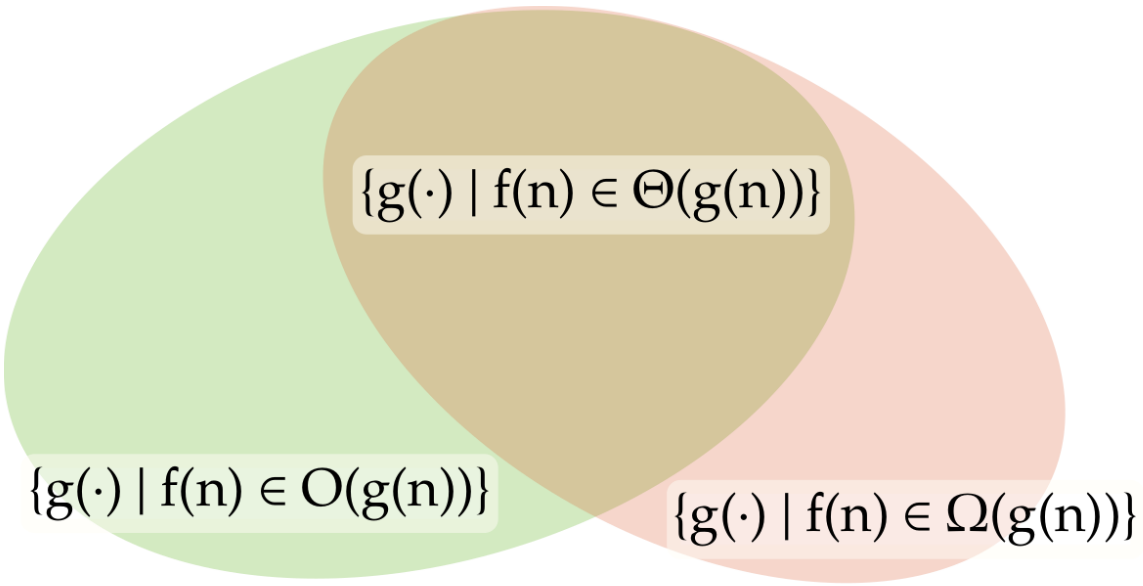
Asymptotické odhady

- horní: $f(n) \in \mathrm{O}(g(n)) \Leftrightarrow \exists c > 0, \exists n_0, \forall n > n_0 : f(n) \leq c \cdot g(n)$
- dolní: $f(n) \in \Omega(g(n)) \Leftrightarrow \exists c > 0, \exists n_0, \forall n > n_0 : f(n) \geq c \cdot g(n)$
- optimální: $f(n) \in \Theta(g(n)) \Leftrightarrow f(n) \in O(g(n)) \wedge f(n) \in \Omega(g(n))$

Asymptotické odhady

- horní: $f(n) \in \mathrm{O}(g(n)) \Leftrightarrow \exists c > 0, \exists n_0, \forall n > n_0 : f(n) \leq c \cdot g(n)$
- dolní: $f(n) \in \Omega(g(n)) \Leftrightarrow \exists c > 0, \exists n_0, \forall n > n_0 : f(n) \geq c \cdot g(n)$
- optimální: $f(n) \in \Theta(g(n)) \Leftrightarrow f(n) \in O(g(n)) \wedge f(n) \in \Omega(g(n))$

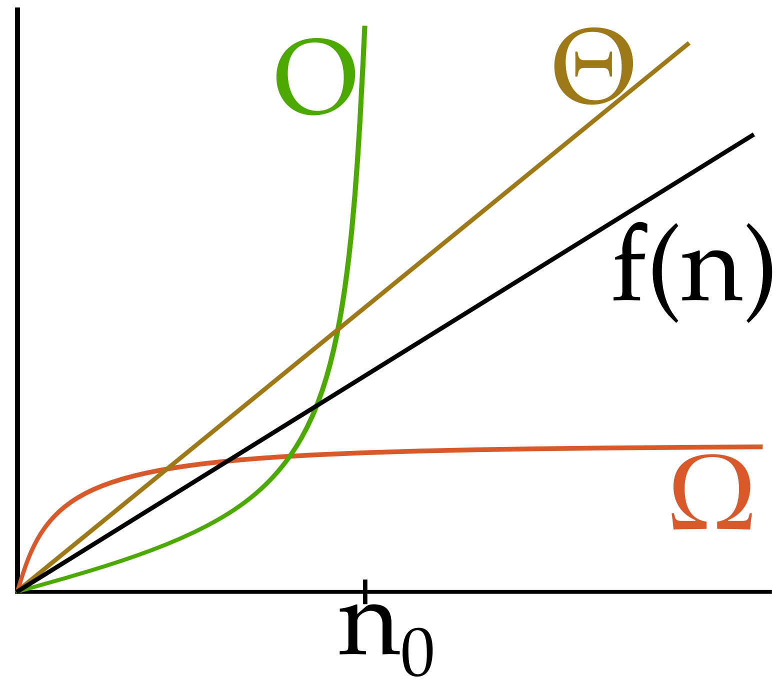
- Symboly O, Ω a Θ reprezentují množiny



Asymptotické odhady

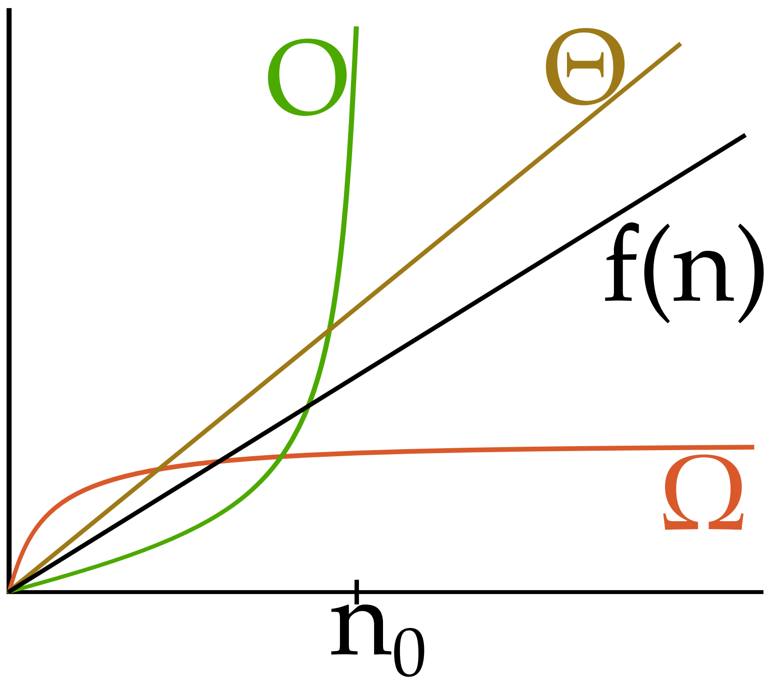
- horní: $f(n) \in \mathrm{O}(g(n)) \Leftrightarrow \exists c > 0, \exists n_0, \forall n > n_0 : f(n) \leq c \cdot g(n)$
- dolní: $f(n) \in \Omega(g(n)) \Leftrightarrow \exists c > 0, \exists n_0, \forall n > n_0 : f(n) \geq c \cdot g(n)$
- optimální: $f(n) \in \Theta(g(n)) \Leftrightarrow f(n) \in O(g(n)) \wedge f(n) \in \Omega(g(n))$

- Častěji si pod nimi ale představíme vztah dvou funkcí



Chování v nekonečnu

- $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$, pak $f(n) \in \mathrm{O}(g(n))$, ale $f(n) \notin \Theta(g(n))$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$, pak $f(n) \in \Omega(g(n))$, ale $f(n) \notin \Theta(g(n))$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} =$ konst., pak $f(n) \in \Theta(g(n))$



Základ logaritmu a asymptotická složitost

Záleží při vyšetřování asymptotické složitosti na základu logaritmu?
Příklad: pokud vím, že $f(n) \in \mathrm{O}\left(\log_2(n)\right)$, můžu tvrdit, že $f(n) \in \mathrm{O}\left(\log_{10}(n)\right)$?

A. na základu záleží
B. na základu nezáleží

Základ logaritmu a asymptotická složitost

Záleží při vyšetřování asymptotické složitosti na základu logaritmu?
Příklad: pokud vím, že $f(n) \in \mathrm{O}\left(\log_2(n)\right)$, můžu tvrdit, že $f(n) \in \mathrm{O}\left(\log_{10}(n)\right)$?

A. na základu záleží
B. na základu nezáleží

Nezáleží, protože

$$\log_a(n) = \frac{\ln(n)}{\ln(a)} = \frac{1}{\ln(a)}\ln(n) = c \cdot \ln(n),$$

takže

$$\log_a(n) \in \Theta(\ln(n)).$$

Příklad 1

Pro rostoucí spojité fukce f, g platí $f(x) \in \Omega(g(x))$. Z toho plyne, že

A. $f(x) \in \mathrm{O}(g(x))$
B. $f(x) \in \Theta(g(x))$
C. $g(x) \in \Theta(f(x))$
D. $g(x) \in \Omega(f(x))$
E. $g(x) \in \mathrm{O}(f(x))$

Příklad 1

Pro rostoucí spojité fukce f, g platí $f(x) \in \Omega(g(x))$. Z toho plyne, že

A. $f(x) \in \mathrm{O}(g(x))$
B. $f(x) \in \Theta(g(x))$
C. $g(x) \in \Theta(f(x))$
D. $g(x) \in \Omega(f(x))$
✓ $g(x) \in \mathrm{O}(f(x))$

Z definice

$$f(n) \in \Omega(g(n)) \Leftrightarrow \exists c > 0, \exists n_0, \forall n > n_0 : f(n) \geq c \cdot g(n),$$

takže

$$g(n) \leq \frac{1}{c} f(n) = d \cdot f(n).$$

Proto $g(x) \in \mathrm{O}(f(x))$.

Příklad 2

Pro rostoucí spojité fukce f, g platí $f(x) \in \mathrm{O}(g(x))$. Z toho plyne, že

A. $f(x) \in \Theta(g(x))$
B. $f(x) \in \Omega(g(x))$
C. $g(x) \in \Theta(f(x))$
D. $g(x) \in \Omega(f(x))$
E. $g(x) \in \mathrm{O}(f(x))$

Příklad 2

Pro rostoucí spojité fukce f, g platí $f(x) \in \mathrm{O}(g(x))$. Z toho plyne, že

A. $f(x) \in \Theta(g(x))$
B. $f(x) \in \Omega(g(x))$
C. $g(x) \in \Theta(f(x))$
✓ $g(x) \in \Omega(f(x))$
E. $g(x) \in \mathrm{O}(f(x))$

Z definice

$$f(n) \in \mathrm{O}(g(n)) \Leftrightarrow \exists c > 0, \exists n_0, \forall n > n_0 : f(n) \leq c \cdot g(n),$$

takže

$$g(n) \geq \frac{1}{c} f(n) = d \cdot f(n).$$

Proto $g(x) \in \Omega(f(x))$.

Příklad 3

Pokud funkce f roste asymptoticky rychleji než funkce g, platí následující tvrzení:

A. jsou-li v bodě x definovány obě funkce, pak $f(x) > g(x)$
B. rozdíl $f(x) - g(x)$ je vždy kladný
C. rozdíl $f(x) - g(x)$ je kladný pro každé $x > y$, kde y je nějaké dostatečně velké číslo
D. obě funkce f i g jsou definovány jen pro nezáporné argumenty
E. nic z předchozího

Příklad 3

Pokud funkce f roste asymptoticky rychleji než funkce g, platí následující tvrzení:

A. jsou-li v bodě x definovány obě funkce, pak $f(x) > g(x)$
B. rozdíl $f(x) - g(x)$ je vždy kladný
✓ rozdíl $f(x) - g(x)$ je kladný pro každé $x > y$, kde y je nějaké dostatečně velké číslo
D. obě funkce f i g jsou definovány jen pro nezáporné argumenty
E. nic z předchozího

Viz definice dolního odhadu Ω:

$$f(n) \in \Omega(g(n)) \Leftrightarrow \exists \boldsymbol{c} > 0, \exists n_0, \forall n > n_0 : f(n) \geq \boldsymbol{c} \cdot g(n).$$

Příklad 4

Pokud funkce f roste asymptoticky stejně rychle jako funkce g (tj. $f(x) \in \Theta(g(x))$), platí následující tvrzení:

A. jsou-li v bodě x definovány obě funkce, pak $f(x) = g(x)$
B. ani poměr $f(x)/g(x)$ ani poměr $g(x)/f(x)$ nekonverguje k nule s rostoucím x
C. rozdíl $f(x) - g(x)$ je kladný pro každé $x > y$, kde y je nějaké dostatečně velké číslo
D. obě funkce f i g jsou definovány jen pro nezáporné argumenty
E. nic z předchozího

Příklad 4

Pokud funkce f roste asymptoticky stejně rychle jako funkce g (tj. $f(x) \in \Theta(g(x))$), platí následující tvrzení:

A. jsou-li v bodě x definovány obě funkce, pak $f(x) = g(x)$
✓ ani poměr $f(x)/g(x)$ ani poměr $g(x)/f(x)$ nekonverguje k nule s rostoucím x
C. rozdíl $f(x) - g(x)$ je kladný pro každé $x > y$, kde y je nějaké dostatečně velké číslo
D. obě funkce f i g jsou definovány jen pro nezáporné argumenty
E. nic z předchozího

Viz chování v nekonečnu.

Příklad 5

Pro dvě spojité funkce f, g rostoucí na celém $\mathbb{R}$ platí $f(x) < g(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Tudíž:

A. $f(x) \notin \Omega(g(x))$
B. $f(x) \notin \mathrm{O}(g(x))$
C. je možné, že $f(x) \in \Omega(g(x))$
D. $g(x) \notin \Theta(f(x))$
E. $f(x)$ roste asymptoticky pomaleji než $g(x)$

Příklad 5

Pro dvě spojité funkce f, g rostoucí na celém $\mathbb{R}$ platí $f(x) < g(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Tudíž:

A. $f(x) \notin \Omega(g(x))$
B. $f(x) \notin \mathrm{O}(g(x))$
C. je možné, že $f(x) \in \Omega(g(x))$
D. $g(x) \notin \Theta(f(x))$
E. $f(x)$ roste asymptoticky pomaleji než $g(x)$

Co funkce $f(x) = x$ a $g(x) = x + 1$?

Podmínka dolního asymptotického odhadu $f(x) \in \Omega\left(g(x)\right)$:

$$\exists \boldsymbol{c} > 0, \exists n_0, \forall n > n_0 : f(n) \geq \boldsymbol{c} \cdot g(n).$$

Příklad 5

Pro dvě spojité funkce f, g rostoucí na celém $\mathbb{R}$ platí $f(x) < g(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Tudíž:

A. $f(x) \notin \Omega(g(x))$
B. $f(x) \notin \mathrm{O}(g(x))$
✓ je možné, že $f(x) \in \Omega(g(x))$
D. $g(x) \notin \Theta(f(x))$
E. $f(x)$ roste asymptoticky pomaleji než $g(x)$

Co funkce $f(x) = x$ a $g(x) = x + 1$?

Podmínka dolního asymptotického odhadu $f(x) \in \Omega\left(g(x)\right)$:

$$\exists \boldsymbol{c} > 0, \exists n_0, \forall n > n_0 : f(n) \geq \boldsymbol{c} \cdot g(n).$$

Příklad 6

Pro dvě spojité funkce f, g rostoucí na celém $\mathbb{R}$ platí $f(x) \notin \Omega(g(x))$, $f(x) \notin \Theta(g(x))$. Tudíž:

A. $g(x) \in \mathrm{O}(f(x))$
B. $g(x) \in \Theta(f(x))$
C. $f(x) < g(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$
D. $f(x) \leq g(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$
E. může existovat $y \in \mathbb{R}$ takové, že $f(y) > g(y)$

Příklad 6

Pro dvě spojité funkce f, g rostoucí na celém $\mathbb{R}$ platí $f(x) \notin \Omega(g(x))$, $f(x) \notin \Theta(g(x))$. Tudíž:

A. $g(x) \in \mathrm{O}(f(x))$
B. $g(x) \in \Theta(f(x))$
C. $f(x) < g(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$
D. $f(x) \leq g(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$
E. může existovat $y \in \mathbb{R}$ takové, že $f(y) > g(y)$

Co funkce $f(x) = x + 100$ a $g(x) = x^2$?

Příklad 6

Pro dvě spojité funkce f, g rostoucí na celém $\mathbb{R}$ platí $f(x) \notin \Omega(g(x))$, $f(x) \notin \Theta(g(x))$. Tudíž:

A. $g(x) \in \mathrm{O}(f(x))$
B. $g(x) \in \Theta(f(x))$
C. $f(x) < g(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$
D. $f(x) \leq g(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$
✓ může existovat $y \in \mathbb{R}$ takové, že $f(y) > g(y)$

Co funkce $f(x) = x + 100$ a $g(x) = x^2$?

Zkusme $y = 1$.

Příklad 7

Algoritmus $\mathcal{A}$ prochází matici o velikosti $n \times n$ a s každým prvkem provádí akci, jejíž složitost je $\Theta(\log_2(n))$. Celková asymptotická složitost algoritmu $\mathcal{A}$ je:

A. $\Theta(n \log_2(n))$
B. $\Theta(n^2)$
C. $\Theta(n^3)$
D. $\Theta(n^2 + \log_2(n))$
E. $\Theta(n^2 \log_2(n))$

Příklad 7

Algoritmus $\mathcal{A}$ prochází matici o velikosti $n \times n$ a s každým prvkem provádí akci, jejíž složitost je $\Theta(\log_2(n))$. Celková asymptotická složitost algoritmu $\mathcal{A}$ je:

A. $\Theta(n \log_2(n))$
B. $\Theta(n^2)$
C. $\Theta(n^3)$
D. $\Theta(n^2 + \log_2(n))$
✓ $\Theta(n^2 \log_2(n))$

Matice má n^2 prvků a zpracování každého má složitost $\Theta(\log_2(n))$.

Příklad 8

Který z následujících výroků je nepravdivý?

A. $x \log_2(x) \in \mathrm{O}(x^2 - x)$
B. $x \log_2(x) \in \mathrm{O}(x^2 - \log_2(x))$
C. $x \log_2(x) \in \Omega(x^2 - \log_2(x))$
D. $x \log_2(x) \in \Omega(x + \log_2(x))$
E. $x \log_2(x) \in \Theta(x \log_2(x^2))$

Příklad 8

Který z následujících výroků je nepravdivý?

A. $x \log_2(x) \in \mathrm{O}(x^2 - x)$
B. $x \log_2(x) \in \mathrm{O}(x^2 - \log_2(x))$
✓ $x \log_2(x) \in \Omega(x^2 - \log_2(x))$
D. $x \log_2(x) \in \Omega(x + \log_2(x))$
E. $x \log_2(x) \in \Theta(x \log_2(x^2))$

Kdyby C. platilo, tak $\lim_{x\to\infty} \frac{x \log x}{x^2 - \log x} = \infty$, jenže

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x \log x}{x^2 - \log x} \overset{\text{(H)}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\log x + 1}{2x - x^{-1}} \overset{\text{(H)}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{x^{-1}}{2 + x^{-2}} = 0.$$

(Což znamená?)

Jaktože platí E.?

Příklad 9

Algoritmus $\mathcal{A}$ prochází pole s n prvky. Při zpracování prvku na pozici k provede $k+n$ operací. Asymptotická složitost algoritmu $\mathcal{A}$ je

A. $\Theta(k+n)$
B. $\Theta(n(k+n))$
C. $\Theta(k^2+n)$
D. $\Theta(n^2)$
E. $\Theta(n^3)$

Příklad 9

Algoritmus $\mathcal{A}$ prochází pole s n prvky. Při zpracování prvku na pozici k provede $k+n$ operací. Asymptotická složitost algoritmu $\mathcal{A}$ je

A. $\Theta(k+n)$
B. $\Theta(n(k+n))$
C. $\Theta(k^2+n)$
✓ $\Theta(n^2)$
E. $\Theta(n^3)$

$$\sum_{k=1}^{n}(k+n) = n^2 + \sum_{k=1}^{n} k = n^2 + \frac{(n+1)n}{2} = \frac{3n^2+n}{2} \in \Theta(n^2)$$

Příklad 16

Uvažte algoritmus násobení dvou celých čísel tak, jak je znám ze školy pro ruční násobení. Předpokládejte, že sečtení nebo vynásobení dvou *číslic* má konstantní časovou složitost. Jaká je asymptotická složitost vynásobení dvou celých čísel M, N zapsaných v desítkové soustavě?

Příklad: $M = 9803$, $N = 347$

```
   9803
  x 347
=======
  68621
 39212
29409
=======
3401641
```

Příklad 16: řešení

```
   9803
  x 347
=======
  68621
 39212
29409
=======
3401641
```

Kolik číslic má číslo zapsané v desítkové soustavě?

Příklad 16: řešení

```
   9803
  x 347
=======
  68621
 39212
29409
=======
3401641
```

Kolik číslic má číslo zapsané v desítkové soustavě?

$\lfloor \log_{10} n \rfloor + 1 \in \Theta(\log n)$

Příklad 16: řešení

```
   9803
 x  347
=======
  68621
 39212
29409
=======
3401641
```

Kolik číslic má číslo zapsané v desítkové soustavě?
$\lfloor \log_{10} n \rfloor + 1 \in \Theta(\log n)$

Jakou složitost má výpočet mezivýsledků?

Příklad 16: řešení

```
    9803
  x  347
=======
   68621
  39212
 29409
=======
 3401641
```

Kolik číslic má číslo zapsané v desítkové soustavě?
$\lfloor \log_{10} n \rfloor + 1 \in \Theta(\log n)$

Jakou složitost má výpočet mezivýsledků?
$\Theta(\log M) \cdot \Theta(\log N)$
(násobení každé číslice v M s každou číslicí v N)

Příklad 16: řešení

```
   9803
  x 347
=======
  68621
 39212
29409
=======
3401641
```

Kolik číslic má číslo zapsané v desítkové soustavě?
$\lfloor \log_{10} n \rfloor + 1 \in \Theta(\log n)$

Jakou složitost má výpočet mezivýsledků?
$\Theta(\log M) \cdot \Theta(\log N)$
(násobení každé číslice v M s každou číslicí v N)

Jakou složitost má sečtení mezivýsledků?

Příklad 16: řešení

```
   9803
  x 347
=======
  68621
 39212
29409
=======
3401641
```

Kolik číslic má číslo zapsané v desítkové soustavě?
$\lfloor \log_{10} n \rfloor + 1 \in \Theta(\log n)$

Jakou složitost má výpočet mezivýsledků?
$\Theta(\log M) \cdot \Theta(\log N)$
(násobení každé číslice v M s každou číslicí v N)

Jakou složitost má sečtení mezivýsledků?
$\Theta(\log N) \cdot \Theta(\log M)$
(„počet řádek krát počet sloupců" $=$ celkový počet cifer ve všech mezivýsledcích)

Příklad 16: řešení

```
   9803
 x  347
=======
  68621
 39212
29409
=======
3401641
```

Kolik číslic má číslo zapsané v desítkové soustavě?
$\lfloor \log_{10} n \rfloor + 1 \in \Theta(\log n)$

Jakou složitost má výpočet mezivýsledků?
$\Theta(\log M) \cdot \Theta(\log N)$
(násobení každé číslice v M s každou číslicí v N)

Jakou složitost má sečtení mezivýsledků?
$\Theta(\log N) \cdot \Theta(\log M)$
(„počet řádek krát počet sloupců" $=$ celkový počet cifer ve všech mezivýsledcích)

Dohromady?

Příklad 16: řešení

```
   9803
  x 347
=======
  68621
 39212
29409
=======
3401641
```

Kolik číslic má číslo zapsané v desítkové soustavě?
$\lfloor \log_{10} n \rfloor + 1 \in \Theta(\log n)$

Jakou složitost má výpočet mezivýsledků?
$\Theta(\log M) \cdot \Theta(\log N)$
(násobení každé číslice v M s každou číslicí v N)

Jakou složitost má sečtení mezivýsledků?
$\Theta(\log N) \cdot \Theta(\log M)$
(„počet řádek krát počet sloupců" $=$ celkový počet cifer ve všech mezivýsledcích)

Dohromady?
$\Theta(\log M) \cdot \Theta(\log N) + \Theta(\log N) \cdot \Theta(\log M) =$
$\Theta(\log M) \cdot \Theta(\log N)$

Samostatná práce

- Ve skupinách řešte příklady 10, 12, 15, 17, 23 (odkaz v chatu)
- Do řešení napište jména všech členů skupiny
- Vyfocené řešení (nebo jako PDF) odešlete do konce dne na `matous.vrba@fel.cvut.cz` s předmětem *ALG řešení 02.10.2020*
- Konzultace a diskuze k příkladům možná do konce cvičení na BBB